

01:03

Неустойчивость заряженной границы раздела двух несмешивающихся вязких жидкостей с учетом релаксации заряда

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 1997 г.)

На основе анализа выведенного дисперсионного уравнения показана возможность существования двух различных видов неустойчивости по отношению к собственному заряду заряженной плоской границы раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей конечной электропроводности в поле силы тяжести. При больших значениях поверхностной плотности заряда в зависимости от вязкостей и отношения удельных электропроводностей сред может наблюдаться либо аperiodическая (типа Тонкса–Френкеля), либо колебательная неустойчивость границы раздела. Увеличение вязкости нижней жидкости приводит к существенному снижению инкрементов рассмотренных видов неустойчивостей и изменению критических условий проявления колебательной неустойчивости, тогда как варьирование вязкости верхней жидкости на этих характеристиках сказывается весьма слабо.

Феномен неустойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, различающихся своими физико-химическими характеристиками, в различных предельных ситуациях неоднократно исследовался в связи с многочисленными физическими, геофизическими и техническими задачами (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы, связанные с этим феноменом, мало исследованы, причиной чего является громоздкость получающегося даже для идеализированных моделей дисперсионного уравнения, допускающего аналитический анализ лишь в асимптотических ситуациях. В настоящей работе исследуется влияние вязкостей и электропроводностей граничащих жидкостей на устойчивость плоской заряженной границы раздела между ними и на спектр реализующихся капиллярных движений.

1. Пусть две несмешивающиеся вязкие электропроводные жидкости заполняют в поле силы тяжести все пространство. Невозмущенная граница раздела между жидкостями пусть совпадает с плоскостью XOY декартовой системы координат, ось z которой направлена вверх, в направлении, противоположном направлению действия поля сил тяжести. Верхнюю жидкость с кинематической вязкостью ν_1 , плотностью ρ_1 , заполняющую полупространство $z > 0$, будем считать электропроводной с удельной проводимостью σ_1 и диэлектрической проницаемостью ε_1 . Нижняя жидкость заполняет полупространство $z < 0$ и обладает кинематической вязкостью ν_2 , плотностью $\rho_2 > \rho_1$, диэлектрической проницаемостью ε_2 и удельной проводимостью σ_2 . Примем также, что невозмущенная граница раздела жидкостей однородно заряжена с поверхностной плотностью заряда \varkappa , обладает поверхностным натяжением с коэффициентом γ , а носители заряда на границе раздела характеризуются подвижностью b . Электростатические поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в верхней и нижней областях будем описывать с помощью электростатических потенциалов Φ_1 и Φ_2 соот-

ветственно. В итоге для отыскания условий проявления неустойчивости в описанной системе можно записать линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_j} \text{grad } P_j + \nu_j \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{g}; \quad j = 1, 2; \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{U}_j = 0; \quad \Delta \Phi_j = 0; \quad \mathbf{E}_j = -\text{grad } \Phi_j; \quad (2), (3)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{U}_1 = 0; \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_1 = E_{10} \mathbf{n}_z; \quad (5)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \mathbf{U}_2 = 0; \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_2 = E_{20} \mathbf{n}_z. \quad (7)$$

В этих выражениях $P_j = P_j(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри j -й жидкости, $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей в ней; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; \mathbf{n}_z — орт координаты z . На границе раздела сред, возмущенной капиллярным волновым движением, уравнение которой имеет вид $z = \zeta(x, y, t)$, должны удовлетворяться граничные условия

$$4\pi \varkappa = \varepsilon_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{E}_1) + \varepsilon_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{E}_2); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} + \text{div}_s(\varkappa \mathbf{U}_\tau + \varkappa b \mathbf{E}_\tau) + \sigma_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{E}_1) + \sigma_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{E}_2) = 0; \quad (9)$$

$$\text{div}_s \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t); \quad (11)$$

$$U_{jz} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad j = 1, 2; \quad (12)$$

$$\frac{\nu_1}{\rho_1} [(\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{n}_1, \nabla), \mathbf{U}_1) + (\mathbf{n}_1(\boldsymbol{\tau}_1, \nabla), \mathbf{U}_1)] - \frac{\nu_2}{\rho_2} [(\boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{n}_2, \nabla), \mathbf{U}_2) + (\mathbf{n}_2(\boldsymbol{\tau}_2, \nabla), \mathbf{U}_2)] = \Pi_\varkappa; \quad (13)$$

$$P_1 - P_2 + 2\nu\rho_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} - 2\nu\rho_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = P_\varkappa + P_\gamma. \quad (14)$$

В этих соотношениях

$$P_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

— давление сил поверхностного натяжения под возмущенной волновым движением плоской поверхностью жидкости [5];

$$P_\varkappa = P_{\varkappa 1} - P_{\varkappa 2};$$

$$P_{\varkappa j} = \frac{\varepsilon_j}{8\pi} [(\mathbf{n}_j, \mathbf{E}_j)^2 - (\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{E}_j)^2] \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

— электростатическое давление на нее из-за наличия поверхностного заряда, распределенного с плотностью \varkappa [6];

$$\Pi_\varkappa = \Pi_{\varkappa 1} - \Pi_{\varkappa 2};$$

$$\Pi_{\varkappa j} = \frac{\varepsilon_j}{4\pi} (\mathbf{n}_j, \mathbf{E}_j)(\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{E}_j) \quad (j = 1, 2) \quad (16)$$

— электрическая часть касательных компонент тензора натяжений; $\boldsymbol{\tau}_j$ и \mathbf{n}_j — орты касательной и нормали к поверхности j -й жидкости.

2. Задачу (1)–(16) будем решать классическими методами [5,6] гидродинамики, разделяя поле скоростей $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ на две компоненты: потенциальную (с потенциалом скоростей $\varphi_j(\mathbf{r}, t)$) и вихревую (описываемую функцией тока $\psi_j(\mathbf{r}, t)$)

$$U_{xj} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_j}{\partial z};$$

$$U_{zj} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \quad (j = 1, 2). \quad (17)$$

Выражения для давлений $P_1(\mathbf{r}, t)$ и $P_2(\mathbf{r}, t)$ в верхней и нижней жидкостях можно записать в форме

$$P_j = -\rho_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \rho_j g \zeta \quad (j = 1, 2). \quad (18)$$

Скалярные функции φ_j и ψ_j будем искать в виде [5,6]

$$\varphi_1(x, z, t) = A_1 \exp(-kz) \exp(st - ikx);$$

$$\psi_1(x, z, t) = B_1 \exp(-q_1 z) \exp(st - ikx);$$

$$\varphi_2(x, z, t) = A_2 \exp(kz) \exp(st - ikx);$$

$$\psi_2(x, z, t) = B_2 \exp(q_2 z) \exp(st - ikx);$$

$$q_j^2 = k^2 + s/\nu_j. \quad (19)$$

Электрическое поле в верхней и нижней средах определяется потенциалами

$$\Phi_1 = E_{01} z + D_1 \exp(-kz) \exp(st - ikz);$$

$$\Phi_2 = E_{02} z + D_2 \exp(kz) \exp(st - ikz), \quad (20)$$

s — комплексная частота; k — волновое число; A_j , B_j , D_j — константы.

Подстановка (17)–(20) в (1)–(16) позволяет получить однородную систему шести линейных уравнений относительно шести неизвестных констант A_j , B_j , D_j .

Равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных амплитудах A_j , B_j , D_j является необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения задачи. Это условие дает дисперсионное соотношение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе. В безразмерных переменных, в которых $g = \rho_2 = \gamma = 1$, а характерные масштабы размерных величин имеют вид

$$s_* = \left(\frac{\rho_2 g^3}{\gamma} \right)^{1/4}; \quad k_* = \left(\frac{\rho_2 g}{\gamma} \right)^{1/2}; \quad \rho_* = \rho_2; \quad B_* = \sqrt{\rho_2};$$

$$\nu_{1*} = \left(\frac{\gamma^3}{\rho_2^3 g} \right)^{1/4}; \quad \nu_{2*} = \left(\frac{\gamma^3}{\rho_2^3 g} \right)^{1/4};$$

$$\beta_* = \left(\frac{\gamma}{\rho_2 g^3} \right)^{1/4}; \quad W_* = \sqrt{\rho_2 g \gamma};$$

дисперсионное уравнение можно записать в форме

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 (s^2 Z_1 Z_3 + sk\Theta d) - sk^3 H \Lambda + Z_1^2 (s^4 (\rho + 1) \\ & \times Z_1 - 4s^2 k^3 \nu^2 (\rho - 1)^2 d + 4s^3 k^2 \nu (\rho - 1) \\ & \times Z_2 + 4\rho s^4 k) + Z_3 (s^3 k^2 \Theta Z_1 + s^3 k \Theta (\rho + 1) d \\ & + k^2 (H + \Lambda s) (s^2 Z_2 - 2sk\Theta \nu (\rho - 1) d) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$Z_1 = \rho \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_2} - k \right) + \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_1} - k \right);$$

$$Z_2 = \rho \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_2} - k \right) - \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_1} - k \right);$$

$$Z_3 = 1 + s\beta + \beta k B \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} 4\pi W;$$

$$d = \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_1} - k \right) \left(\sqrt{k^2 + s/\nu_1} - k \right);$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)};$$

$$B = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}; \quad \rho = \rho_1/\rho_2; \quad W = \frac{\varepsilon_1 E_{10}^2}{4\pi};$$

$$\alpha^2 = Z_3 (k(\rho - 1) - k^3) + k^2 F; \quad F = F_1 + F_2;$$

$$F_1 = W(1 - \sigma) \left(s\beta \frac{1 - \sigma}{1 + \varepsilon} + \frac{1 + \varepsilon \sigma^2}{1 + \sigma} \right);$$

$$F_2 = W \left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \right) \beta k B \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} 4\pi W;$$

$$H = W \left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \left(s\beta \left[1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \varepsilon} \right] + \frac{2\sigma}{1 + \sigma} \right);$$

$$\Lambda = W\beta \left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \varepsilon} \right);$$

$$\Theta = W(1 - \varepsilon\sigma)\beta \left(1 - \frac{1 + \sigma}{1 + \varepsilon} \right).$$

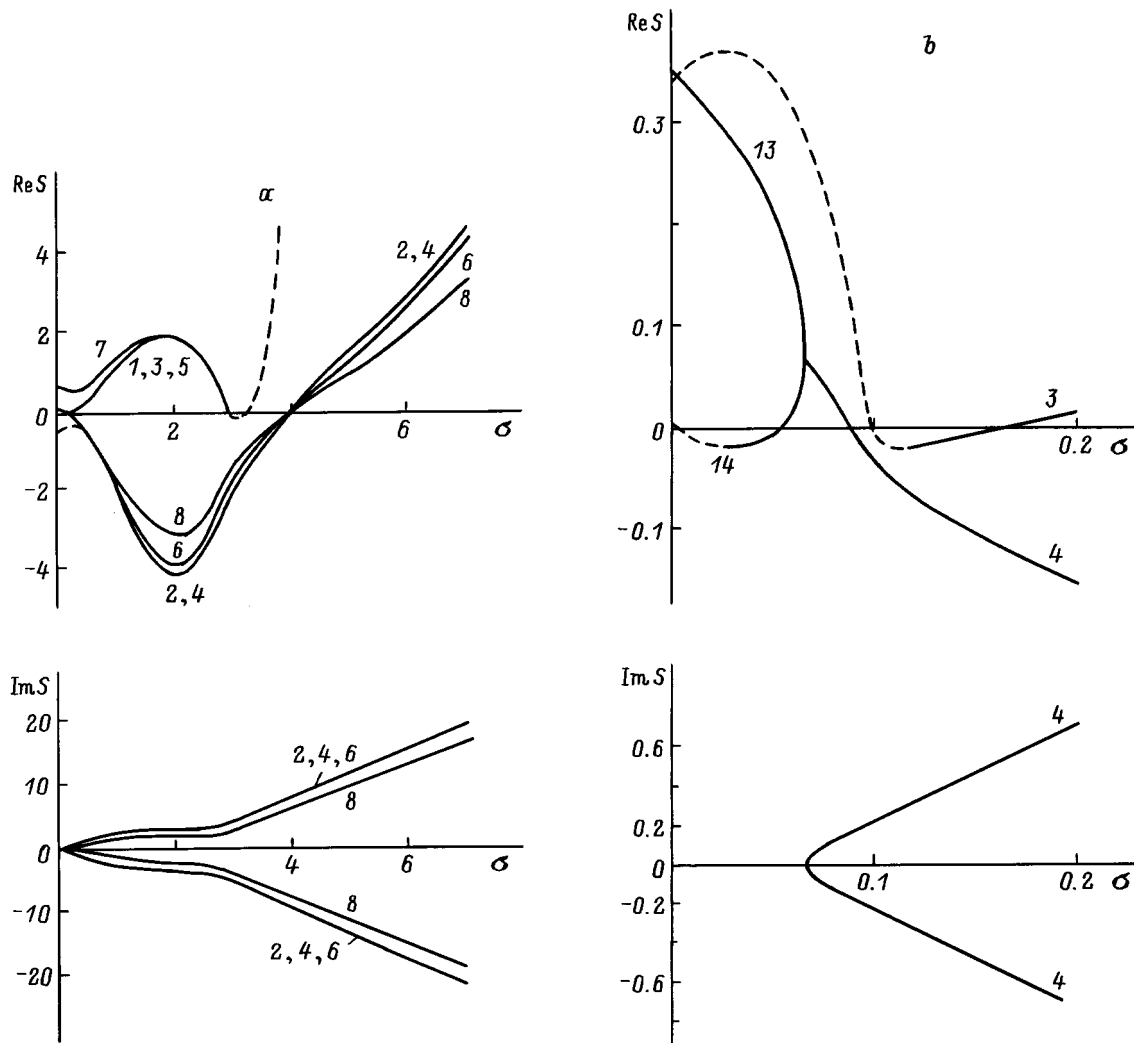


Рис. 1. Зависимости вещественной $\text{Re } s(\sigma)$ и мнимой $\text{Im } s(\sigma)$ компонент комплексной частоты от отношения удельных проводимостей верхней и нижней жидкостей при $k = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.02$, $\varepsilon = 10$, $\beta = 0.01$, $W = 2.15$, $b = 0.01$ и значениях параметра ρ : 1, 2 — 0.001; 3, 4 — 0.01; 5, 6 — 0.1; 7, 8 — 0.5; *a* — мелкий масштаб; *b, c, d* — левые части *a* в более крупном масштабе при $\rho = 0.001, 0.01$ и 0.1 соответственно. Ветви с четными номерами образовали ветвь 6–16 (штриховые кривые — ветви, лежащие на нижнем листе римановской поверхности — ненеблюдаемое решение).

3. На рис. 1 приведены результаты численного анализа дисперсионного уравнения (21) в виде зависимостей безразмерной комплексной частоты s от σ — отношения удельных проводимостей верхней и нижней жидкостей ($\sigma \equiv \sigma_1/\sigma_2$) при различных значениях параметра ρ , $k = 1$ и $W = 2.15 > W_*$ (при используемом безразмеривании $W_* = k + 1/k = 2$ — критическое для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля значение параметра W при $\sigma_1 = 0$ [7,8]). В представленном на рис. 1, *a* масштабе не видны некоторые существенные для понимания физической сути детали, которые и представлены на рис. 1, *b* и *c* (нумерация ветвей на рис. 1, *d* выбрана с учетом конфигураций рис. 1, *b* и *c*). Из рисунков видно, что в большей части рассматриваемой области изменения параметра σ ($0.5 \lesssim \sigma < 7$) характер представленных решений слабо зависит от отношения

плотностей веществ ρ (ветви 1, 3, 5 и 2, 4 совпадают в масштабе рис. 1, *a*). Во всех рассмотренных случаях выделяется область $0.5 < \sigma < 3$, в которой реализуется аperiodическая неустойчивость (ветви с нечетными номерами, меньшими 10), инкремент которой достигает максимума при $\sigma \simeq 2$, а при увеличении σ до 3 действительная часть ветвей 1, 3, 5, 7 проходит через нуль и становится отрицательной, описывая аperiodически затухающее движение жидкости. При дальнейшем увеличении σ обсуждаемые ветви переходят на нижние листы четырехлистной римановой поверхности, на которой определено дисперсионное уравнение (21).

Кроме аperiodической неустойчивости наблюдается волновое движение, связанное с релаксацией заряда на свободной поверхности жидкости (ветви с четными но-

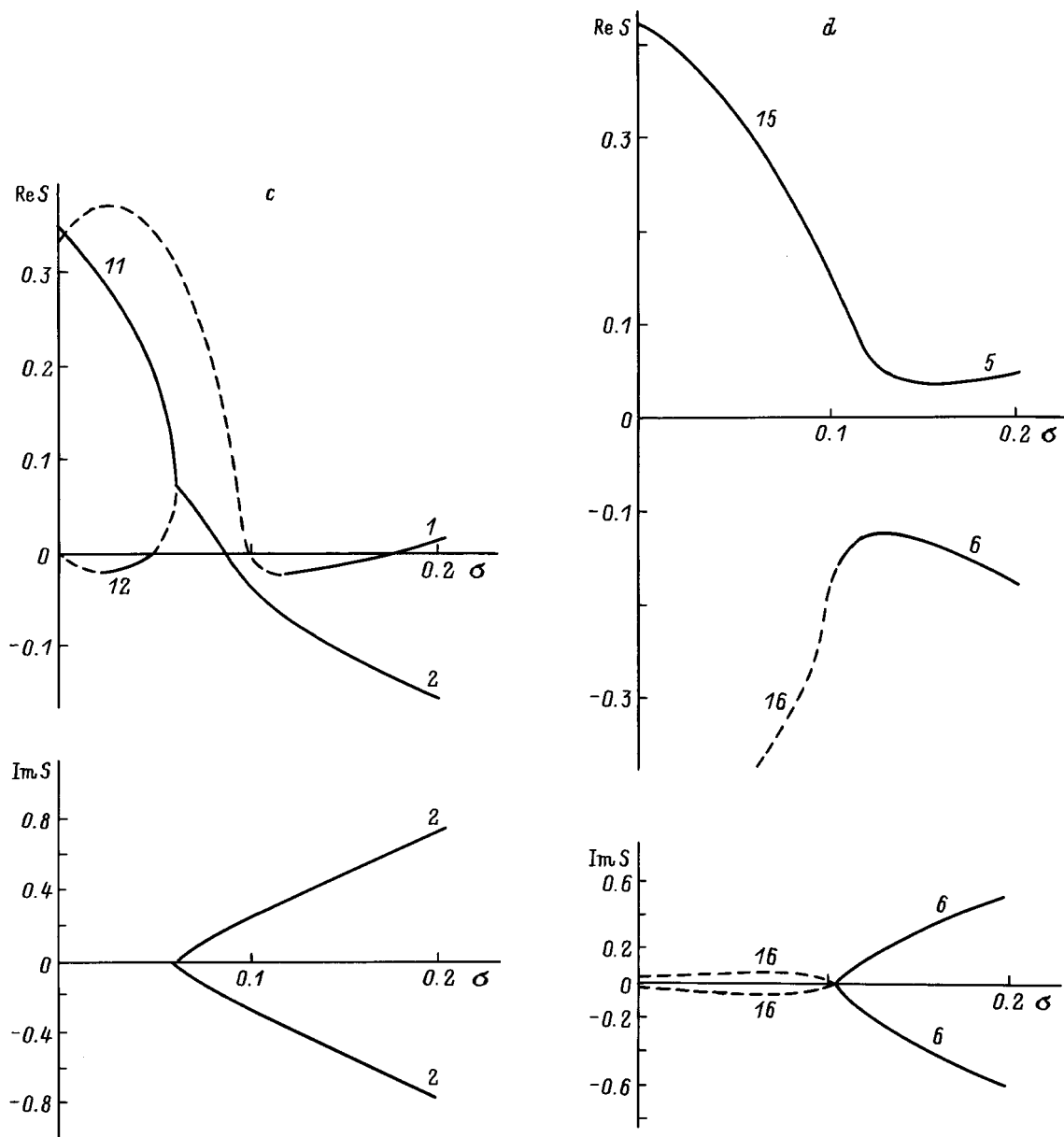


Рис. 1 (продолжение).

мерами). Ветви 2, 4, 6, 8 при $0.5 \lesssim \sigma \lesssim 4$ соответствуют волнам, декремент затухания которых максимален при $\sigma \simeq 2$. По мере увеличения до значений $\sigma > 4$ вещественная часть ветвей волновых движений становится положительной, что означает начало экспоненциального роста амплитуд волн. Частоты неустойчивых волн и их инкременты растут с увеличением σ . Влияние параметра ρ на характер анализируемых решений в области $0.5 \lesssim \sigma < \infty$ становится заметным лишь при $\rho \gtrsim 0.1$ и сводится к снижению декрементов (при $0.5 \lesssim \sigma < 4$) и инкрементов (при $\sigma > 4$) волновых движений. Физический смысл появления колебательной неустойчивости в нормальном к границе раздела электростатическом поле связан с раскачкой

тепловых капиллярных волн волнами перераспределяющегося вдоль границы раздела электрического заряда (волнами давления электрического поля). Если же плотность верхней среды меньше плотности нижней жидкости (как это и имеет место в анализируемом случае), то реализуется колебательная неустойчивость границы раздела. По всей видимости, именно такая неустойчивость имела место в экспериментах М.Д. Габовича с сотрудниками [9]. Ясно, что колебательная неустойчивость капиллярных волн на границе раздела вязких жидкостей должна существенно зависеть от вязкостей обеих жидкостей.

Из рис. 1, *b-d* следует, что при $\rho \leq 0.01$ ветви колебательных движений 2 и 4 берут начало в точке

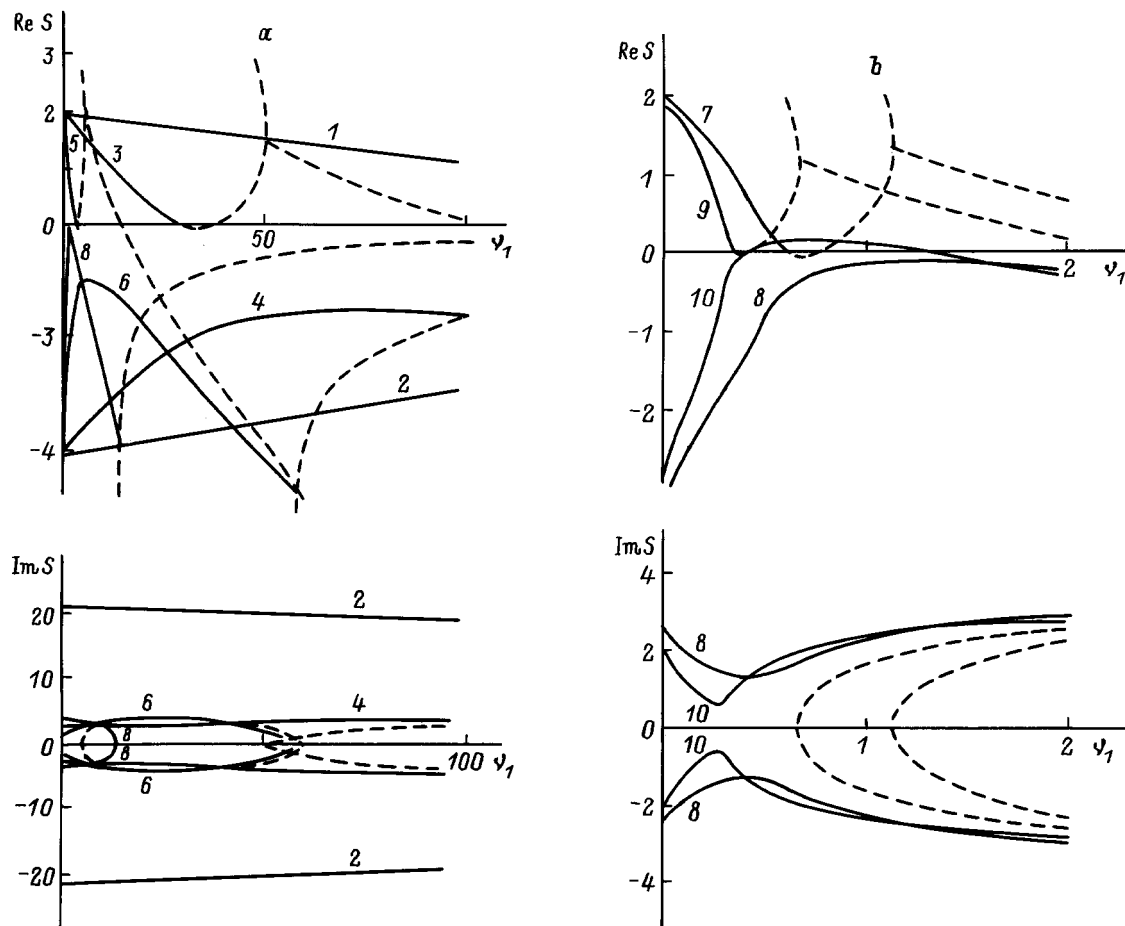


Рис. 2. Зависимости тех же величин, что на рис. 1 от кинематической вязкости верхней жидкости при $\sigma = 2, \nu_2 = 0.02$, значения параметров $k, \varepsilon, \beta, W, b, \rho$ те же, что для рис. 1 (9, 10 — $\rho = 0.9$).

ветвления (при $\sigma \simeq 0.05$), образуемой ветвью аперриодической неустойчивости, идентифицируемой при $\sigma = 0$ с неустойчивостью Тонкса–Френкеля (нечетные ветви с номерами больше 10 на рис. 1, b–d) и зарядово-релаксационной ветвью (четные ветви с номерами больше 10 на рис. 1, b–d). Зарядово-релаксационное движение является аперриодически затухающими при $\rho \leq 0.01$ (рис. 1, b, c) и может проявиться в виде аперриодической неустойчивости при $\rho = 0.01$ (рис. 1, c). Вблизи $\sigma = 0$ соответствующая ветвь переходит на нижние листы римановой поверхности. На вещественной плоскости точка ветвления (точка пересечения ветвей 2, 11, 12 на рис. 1, b и точки 4, 13, 14 на рис. 1, c) положительна и появляющаяся ветвь колебательного движения должна определять начало колебательной неустойчивости с инкрементом, существенно меньшим, чем инкремент неустойчивости Тонкса–Френкеля. Этот инкремент быстро уменьшается с увеличением σ и уже при $\sigma < 0.01$ кривые оказываются ветвями 2 и 4 затухающего колебательного движения, приведенными на рис. 1, a. Согласно рис. 1, a, при $\rho \rightarrow 1$ ($\rho < 1$) уменьшаются декременты колебательного движения и инкременты колебательной неустойчивости (в масштабе рис. 1 это заметно лишь при $\rho \simeq 0.9$).

Влияние вязкостей верхней и нижней жидкостей на развитие обнаруженных видов неустойчивостей анализировалось по отдельности. Наиболее интересные результаты численного анализа уравнения (17) представлены в виде зависимостей комплексной частоты s от кинематической вязкости верхней ν_1 (рис. 2, a, b) и нижней ν_2 (рис. 3, a, b) сред при различных значениях ρ . Результаты, представленные на рис. 2, a имеют модельный характер и показывают, что при $\rho \ll 1$ инкременты аперриодической неустойчивости (нечетные ветви на рисунках) заметно снижаются, а затем обращаются в нуль лишь при аномально высоком значении $\nu_{1*} \gg 1$ — кинематической вязкости верхней среды. При $\nu_1 > \nu_{1*}$ рассматриваемые ветви описывают аперриодически затухающее движение и переходят на нижние листы римановой поверхности. При увеличении ν_2 величина инкрементов уменьшается гораздо быстрее и слабее зависит от значения ρ (ветви 1, 3, 5, 7 на рис. 3, a и b в области проявления аперриодической неустойчивости в представленном масштабе совпадают). Минимальное значение ν_2 , выше которого аперриодической неустойчивости не существует, во всех рассмотренных ситуациях меньше единицы и явление может быть отождествлено с реальной физической ситуацией.

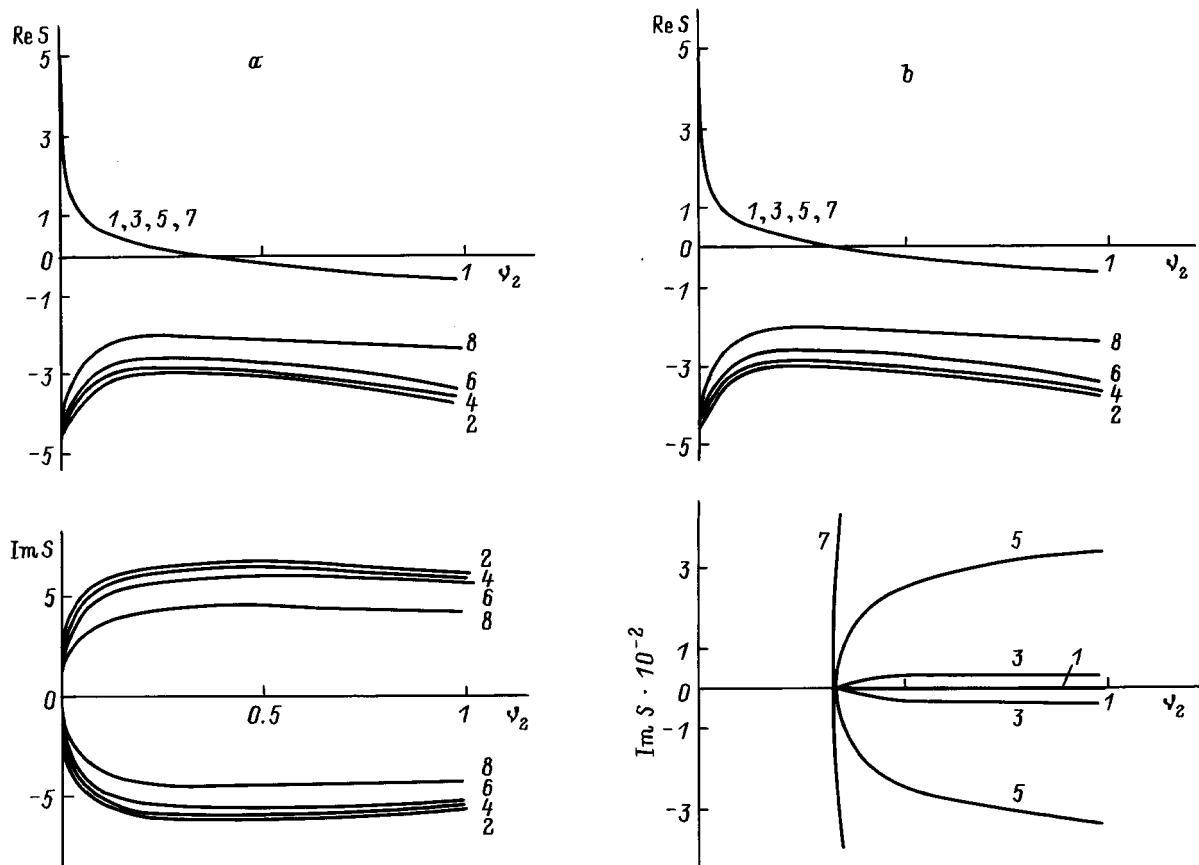


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для нижней жидкости: $\sigma = 2$, $\nu_1 = 0.02$; значения остальных параметров те же, что для рис. 2.

Наблюдается асимметрия изменения исследованных зависимостей при варьировании ν_1 по отношению к зависимостям от ν_2 . Во-первых, эффекты, связанные с изменением ν_1 , гораздо слабее, чем связанные с изменением ν_2 , и зависят от значений параметра ρ в областях неустойчивости. Во-вторых, при увеличении ν_1 до $\nu_1 > \nu_{1*}$ ветви аperiodической неустойчивости переходят на нижние листы римановой поверхности (нечетные ветви на рис. 2, *a, b*), тогда как продолжение ветвей аperiodического движения в область $\nu_2 > \nu_{2*}$ (ν_{2*} определяется по аналогии с ν_{1*}) приводит к появлению периодически затухающего движения с заметно растущим при увеличении ρ декрементом затухания (нечетные ветви на рис. 3, *a*).

Наиболее же интересно указанная асимметрия проявляет себя по отношению к колебательному движению. Декременты затухания проходят через минимум: до исчезновения аperiodической неустойчивости при увеличении ν_2 (ветви с четными номерами в области $\nu_2 < \nu_{2*}$ на рис. 2, *a* и *b*) и после ее исчезновения при росте ν_1 (ветви с четными номерами при $\nu_1 < \nu_{1*}$ на рис. 3, *a* и *b*). Величина минимального декремента уменьшается с ростом ρ . Для зависимостей безразмерной комплексной частоты от ν_1 увеличение ρ до 0.9 (ветвь 10 на рис. 2, *b*) приводит к тому, что значение экстремума вещественной части ветви колебательного движения оказывается поло-

жительным, т. е. характеризует инкремент колебательной неустойчивости. Дальнейшее увеличение ν_1 стабилизирует движение жидкости, а ветвь 10 при $\nu_1 > 1.5$ соответствует периодически затухающему движению. На зависимостях от ν_2 подобного явления не наблюдается. Проведенный анализ показывает, что колебательная и аperiodическая неустойчивости несовместимы, так как они не могут существовать одновременно. Это утверждение объясняет невозможность проявления колебательной неустойчивости на рис. 2, *a* и *b*.

Кроме представленных результатов проводился численный анализ поведения ветвей колебательной неустойчивости в зависимости от кинематических вязкостей сред при $\sigma = 7$, 0.08 и значениях ρ , при которых неустойчивость данного типа существует. Выяснилось, что, так же как в выше проведенном рассмотрении, только увеличение до аномально высоких значений вязкости верхней среды ν_1 заметно уменьшает инкременты колебательной неустойчивости и приводит к ее исчезновению и этот эффект тем сильнее, чем больше ρ . Явления, связанные с изменением ν_2 , аналогичны, но более заметны (колебательное движение становится аperiodически затухающим уже при некотором значении $\nu_2 = \nu_{2*}$: $0 < \nu_{2*} \lesssim 1$, а дальнейший рост ν_2 сопровождается увеличением инкремента этого движения) и слабее зависят от ρ .

Заключение

На плоской границе раздела двух вязких несжимаемых несмешивающихся электропроводных жидкостей (когда плотность верхней много меньше плотности нижней среды), находящихся в перпендикулярном границе раздела электростатическом поле, могут реализоваться неустойчивости как апериодического, так и колебательного типов. Причем колебательная неустойчивость имеет место при величине внешнего электростатического поля, превышающей критическое для проявления апериодической неустойчивости типа Тонкса–Френкеля. Неустойчивость какого типа будет иметь место в том либо ином случае (апериодическая или колебательная), определяется отношением удельных электропроводностей верхней и нижней жидкостей, а при близком к единице значении $\rho \lesssim 1$ — кинематической вязкостью верхней среды. Инкременты неустойчивостей любого вида и критические условия проявления колебательной неустойчивости при увеличении кинематической вязкости нижней среды снижаются гораздо сильнее, чем с ростом кинематической вязкости верхней среды.

Список литературы

- [1] Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–24.
- [2] Григорьев О.А., Ширяева С.О. // МЖГ. 1996. № 1. С. 98–105.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 74–79.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 23. Вып. 6. С. 74–79.
- [5] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [6] Melcher J.R., Schwarz W.J. // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. N 12. P. 2604–2616.
- [7] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [8] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [9] Габович М.Д., Порицкий В.Я. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 6. С. 320–324.