

01:03

## Деление заряженных капель на части сравнимых размеров при сильных сфероидальных виртуальных деформациях

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 28 марта 1997 г. В окончательной редакции 16 февраля 1998 г.)

На основе принципа минимизации потенциальной энергии замкнутой системы, в которой идут самопроизвольные процессы, исследованы закономерности деления на две и три части сравнимых размеров сильно заряженной капли при виртуальных сфероидальных деформациях.

### Введение

Как было показано в [1,2], капля, несущая заряд, равный (или больший) предельному по Рэлею, распадается, эмиттируя примерно две сотни на два порядка более мелких дочерних капелек и теряя при таком распаде всего лишь 0.005-ю часть своей исходной массы и 0.23-ю часть исходного заряда. Вместе с тем в целом ряде экспериментов (см., например, [3–5]) отмечается деление заряженных капель на небольшое количество частей сравнимых размеров. Такой же тип деления отмечается наблюдателями и у шаровых молний [6]. Естественно, что в разных экспериментальных и природных условиях деление исходной капли на две части сравнимых размеров может объясняться различными причинами. Так, в экспериментах [5] такое деление обусловлено влиянием значительной вязкости среды, демпфирующей неустойчивость высоких мод капиллярных колебаний неустойчивой капли, механизм такого процесса на качественном уровне разобран в [7,8]. В экспериментах [3] деление капли на части сравнимых размеров при докритическом заряде обусловлено значительными механическими деформациями изначально сферической капли. В работе [4] то же явление обусловлено торможением в резко неоднородном внешнем электрическом поле [9]. В экспериментах [10] распад капли на несколько частей сравнимых размеров происходил в периодически изменяющемся внешнем электрическом поле.

В теории грозowego электричества в связи с проблемой микроразделения зарядов в грозговом облаке, а также при изучении временной эволюции заряженных жидкокапельных аэродисперсных систем наибольший интерес представляет ситуация деления капли с докритическим по Рэлею зарядом при значительных сфероидальных деформациях, вызванных действием сил не электрической природы. В связи с вышесказанным будем решать задачу о делении при виртуальных сфероидальных деформациях слабозаряженной капли на две и три части сравнимых размеров по аналогии с тем, как это делалось в [11] при попытке объяснить явление радиоактивности в капельной модели ядра атома, не повторяя, однако, расчетов, допущенных в этой работе. В [11] предприняли попытку исследовать устойчивость по отношению

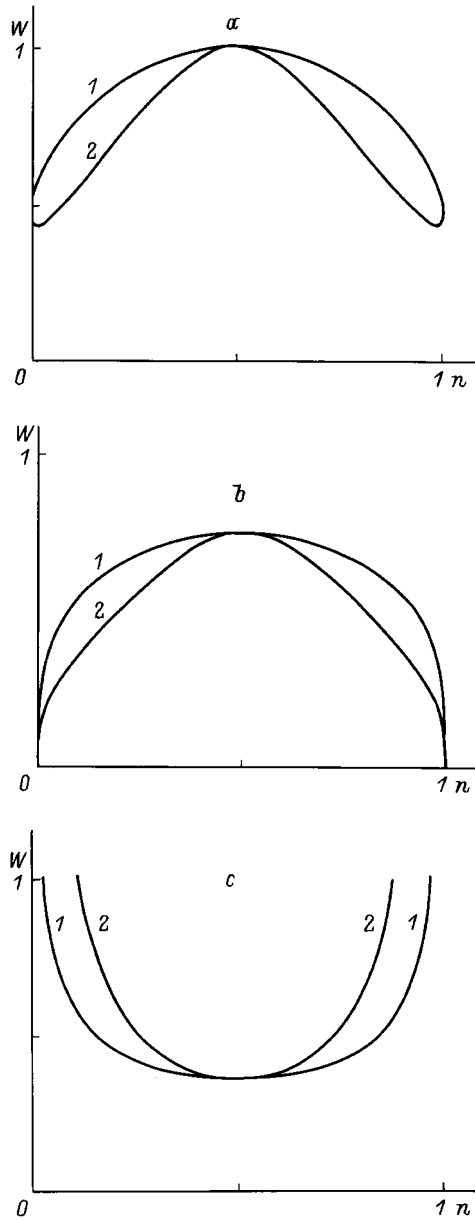
к сильным сфероидальным деформациям заряженной капли при докритическом по Рэлею заряде на ней. Однако в [11] были допущены некоторые неточности в физической постановке задачи, сводящие на нет возможный положительный эффект проводимого анализа. В частности, в [11] пренебрегалось электростатическим взаимодействием капель в конечном состоянии (после деления), которое вносит существенный вклад в баланс энергии.

Итак, попробуем получить условие распада заряженной капли невязкой, несжимаемой жидкости на две и три части сравнимых размеров, исходя из того, что 1) суммарная потенциальная энергия дочерних капель в конечном счете должна быть минимальна в соответствии с принципом минимальности потенциальной энергии конечного состояния замкнутой системы, 2) кинетическую энергию системы до и после распада будем считать равной нулю, 3) полный объем жидкости и заряд при делении капли остаются неизменными.

При решении задачи рассмотрим три предельных случая: 1) поверхностно заряженная капля жидкого диэлектрика, 2) заряженная идеально проводящая капля, 3) объемно заряженная капля жидкого диэлектрика.

### 1. Исследование условий распада заряженной капли на две части сравнимых размеров

а) Поверхностно заряженная капля жидкого диэлектрика. Рассмотрим каплю радиуса  $R$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и зарядом  $Q$  на ней. Будем считать, что заряд равномерно распределен по поверхности капли и заморожен в нее. Иными словами, и предположим, что возможное деление капли на части происходит за время, много меньшее характерного времени перераспределения заряда по поверхности вследствие подвижности в электрическом поле и диффузии. После распада родительской при сильной деформации капли полная потенциальная энергия системы двух сферических дочерних капель (искажением их сферической формы вследствие электростатического



**Рис. 1.** Зависимости величины параметра  $W$  родительской капли от  $n$ . Геометрическое место точек кривой 1, лежащих выше кривой 2, соответствует минимальному изменению свободной энергии;  $a$  — поверхностно заряженная диэлектрическая капля,  $b$  — электропроводная капля,  $c$  — объемно заряженная диэлектрическая капля.

взаимодействия пренебрегаем как малым [12]) равна

$$U = \frac{q_1^2}{2r_1} + \frac{q_2^2}{2r_2} + 4\pi\sigma r_1^2 + 4\pi\sigma r_2^2 + \frac{q_1 q_2}{2r}, \quad (1)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды дочерних капель,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы,  $r$  — расстояние между центрами дочерних капель.

Пусть  $V_1/V = n$  ( $V_1$  — объем первой дочерней капли,  $V$  — объем родительской капли), тогда из условия

постоянства объема получаем

$$V_2 = (1-n)V \Rightarrow r_1 = n^{1/3}R; \quad r_2 = (1-n)^{1/3}R. \quad (2)$$

Согласно вышесказанному, заряд между дочерними каплями распределяется пропорционально площадям их поверхности. Тогда

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{n^{2/3}}{(1-n)^{2/3}} \quad \text{или} \quad q_1 = \frac{n^{2/3}}{(1-n)^{2/3}} q_2.$$

Из условия постоянства заряда получаем

$$q_2 = \frac{(1-n)^{2/3}}{n^{2/3} + (1-n)^{2/3}} Q, \quad q_1 = \frac{n^{2/3}}{n^{2/3} + (1-n)^{2/3}} Q.$$

Таким образом, потенциальная энергия конечного состояния равна

$$U = f(n) = \left( \frac{1}{n^{2/3} + (1-n)^{2/3}} \right)^2 \frac{Q^2}{2R} + 4\pi\sigma R^2 [n^{2/3} + (1-n)^{2/3}] + \frac{n^{2/3}(1-n)^{2/3}}{[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^2} \frac{Q^2}{2r}.$$

Это выражение, согласно формулировке задачи, должно быть минимально по  $n$ , т.е. должны выполняться условия

$$\frac{\partial f(n)}{\partial n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2} > 0. \quad (3)$$

Требую выполнения первого из этих условий, получим критическое для распада деформированной капли на две части значение параметра Рэлея исходной капли  $W = Q^2/(16\pi\sigma R^3)$

$$W = \frac{[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^3}{4 + \frac{4(n-n^2)^{2/3}}{m} - \frac{2(n-n^2)^{-1/3}(1-2n)[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]}{[n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}]m}}, \quad (4)$$

где  $m = r/R$ .

Отметим, что при  $W \geq 1$  сферическая капля распадается по рэлеевскому каналу, разобранным в [1,2]. При построении зависимости  $W(n)$  возникает неопределенность в выборе  $r$ . Для качественного анализа примем минимально возможное расстояние, т.е.  $r = r_1 + r_2$ . Тогда график зависимости  $W(n)$  будет иметь вид, представленный кривой 1 на рис. 1,  $a$ .

Из требования положительности второй производной аналогично получим второе соотношение между  $W$  и  $n$ , определяющее границу существования возможных

каналов деления,

$$W > [n^{-4/3} + (1-n)^{-4/3}] \times \left[ \frac{4n^{-4/3} + 4(1-n)^{-4/3}}{[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^3} \left( 1 + \frac{(n-n^2)^{2/3}}{m} \right) + 24 \frac{[n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}]^2}{[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^4} \left( 1 + \frac{(n-n^2)^{2/3}}{m} \right) - \frac{2(n-n^2)^{-1/3}}{m[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^2} \left( 6 + \frac{(1-2n)^2}{n-n^2} \right) + 8 \frac{(1-2n)[n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}]}{[n^{2/3} + (1-n)^{2/3}]^2} \right]^{-1}.$$

График этой функции приведен на рис. 1, *a* кривой 2. Требованию положительности второй производной удовлетворяет геометрическое место точек выше кривой 2. Из рис. 1, *a*, таким образом, видно, что в зависимости от величины параметра  $W$  капля может делиться произвольным образом, но асимметричное деление наиболее вероятно. Симметричное деление принципиально возможно лишь при  $W = 1$ , если равно нулю значение второй производной в этой точке принимать за положительное. Более подробно о возможности реализации подобного канала деления изложено в [13].

б) З а р я ж е н н а я и д е а л ь н о п р о в о д я щ а я к а п л я. В анализируемой ситуации заряд, как и в предыдущем случае, равномерно распределен по поверхности капли, но принятая идеализация означает, что в данном случае характерное время перераспределения заряда много меньше времени деления капли. Тогда энергия конечного состояния, как и в разделе 1а, определяется выражением (1).

В отличие от ранее рассмотренной модели теперь и объем, и заряд дочерних капель являются свободными параметрами. Тогда из условия сохранения полного объема жидкости и заряда, полагая, как и ранее,  $V_1/V = n$ , для соотношения радиусов получим выражение (2). Полагая далее  $q_1/Q = k$ , из условия постоянства заряда получаем  $q_1 = Qk$ ,  $q_2 = (1-k)Q$ . С учетом введенных обозначений выражение для потенциальной энергии системы в конечном состоянии переписывается в виде

$$U = f(k, n) = \frac{k^2 Q^2}{n^{1/3} 2R} + \frac{(1-k)^2 Q^2}{(1-n)^{1/3} 2R} + 4\pi\sigma R^2 \times [n^{2/3} + (1-n)^{2/3}] + (1-k)k \frac{Q^2}{2r}.$$

Как и в предыдущем случае, эта функция в конечном состоянии должна быть минимальна, т. е. должны выполняться условия

$$\left( \frac{\partial f}{\partial n} \right)_k = 0, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial k} \right)_n = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \quad (5)$$

где  $A = \partial^2 f / \partial k^2$ ,  $C = \partial^2 f / \partial n^2$ ,  $B = \partial^2 f / \partial k \partial n$ .

Находя первые производные от  $f(k, n)$  и обезразмеривая их на  $(8/3)\pi\sigma R^2$ , получим

$$\frac{k}{n^{1/3}} - \frac{(1-k)}{(1-n)^{1/3}} + \frac{1}{2m}(1-2k) = 0, \\ -W \frac{k^2}{n^{4/3}} + W \frac{(1-k)^2}{(1-n)^{4/3}} + n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3} = 0, \quad (6)$$

где  $W$  и  $m$  определяются (4).

Выражая  $k$  через  $n$  из первого уравнения системы (6)

$$k = \frac{(1-n)^{-1/3} + (2m)^{-1}}{n^{-1/3} + (1-n)^{-1/3} - m^{-1}}$$

и подставляя этот результат во второе из уравнений системы (6), найдем искомую критическую зависимость  $W = W(n)$

$$W = (n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}) \left( \frac{k^2}{n^{4/3}} - \frac{(1-k)^2}{(1-n)^{4/3}} \right)^{-1}.$$

График данной функции приведен на рис. 1, *b* кривой 1. Определяя вторые производные функции  $f(k, n)$  из третьего условия экстремальности (5), найдем ограничение на область существования возможных каналов деления

$$W > [n^{-4/3} + (1-n)^{-4/3}] \times (n^{-1/3} + (1-n)^{-1/3} - m^{-1}) \times \left( 2 \frac{k^2}{n^{8/3}} + 2 \frac{(1-k)^2}{(1-n)^{8/3}} - 4m \frac{k^2}{n^{7/3}} - 4m \frac{(1-k)^2}{(1-n)^{7/3}} + 4 \frac{k^2}{n^{7/3}(1-n)^{1/3}} + 4 \frac{(1-k)^2}{(1-n)^{7/3}n^{1/3}} - 4 \frac{(1-k)k}{(1-n)^{4/3}n^{4/3}} \right)^{-1}. \quad (7)$$

График функции  $W(n) = 0$ , соответствующий соотношению (7), приведен на рис. 1, *b* кривой 2. Как и в разделе 1а, получаем, что в зависимости от величины параметра  $W$  капля может делиться произвольным образом, но асимметричное деление наиболее вероятно. Симметричное деление принципиально возможно лишь при  $W = 1$ , если равно нулю значение второй производной в этой точке принимать за положительное (более подробно о возможности реализации подобного канала деления см. [13]).

На рис. 2 приведена зависимость доли заряда дочерней капли от ее объема. Численные расчеты показывают, что при отрыве дочерней капли, составляющей по объему 0.1 от материнской, она уносит 0.275-ю часть заряда материнской, при объеме дочерней капли 0.01 от исходной — 0.123-ю часть заряда, при объеме дочерней капли 0.001 от исходной — 0.054-ю часть заряда, при объеме дочерней капли 0.0001 от исходной — 0.024-ю часть

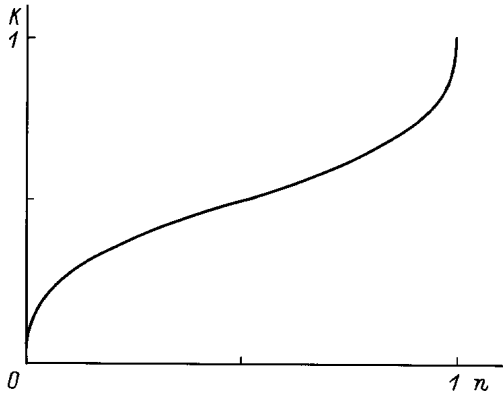


Рис. 2. Зависимость доли заряда  $k$  проводящей дочерней капли от ее безразмерного объема  $n$ .

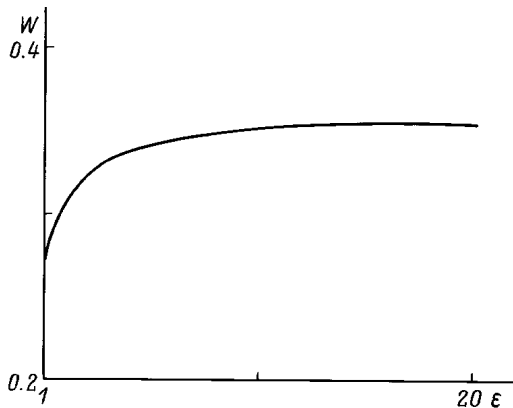


Рис. 3. Зависимость величины параметра  $W$ , необходимого для распада объемно заряженной капли на две равные части, от диэлектрической проницаемости жидкости  $\epsilon$ .

заряда. Как уже говорилось выше, для данного случая наиболее вероятно деление с отрывом дочерней капли, имеющей объем, много меньший объема материнской капли. Отсюда видно, что при отрыве капель, имеющих безразмерный объем  $n \leq 0.001$ , получаемые результаты хорошо согласуются с приведенными в [1,2]. Интересно отметить, что значения параметра  $W$  для дочерних капель критичны по Рэлею и, следовательно, они снова распадутся, как и предсказывалось в [1,2].

в) Объемно заряженная диэлектрическая капля. Будем теперь считать, что заряд равномерно распределен по всему объему (вморожен в вещество) исходной капли с объемной плотностью  $\rho$ . Тогда электростатическая энергия этой капли определяется соотношением

$$E = \int_0^R \frac{8\pi^2 \rho r^4}{9\epsilon} dr + \int_R^\infty \frac{Q^2}{2r} dr = \frac{Q^2}{2R} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right),$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость капли.

После распада исходной капли полная энергия системы из двух дочерних капель равна

$$U = \frac{q_1^2}{2r_1} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + \frac{q_2^2}{2r_2} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + 4\pi\sigma r_1^2 + 4\pi\sigma r_2^2 + \frac{q_1 q_2}{2r}.$$

При равномерном распределении заряда по объему исходной капли заряд делится в том же отношении, что и объем,  $q_1 = nQ$ ,  $q_2 = (1-n)Q$ . Тогда для энергии конечного состояния системы при делении родительской капли на две части получим

$$U = f(n) = \frac{n^2}{n^{1/3}} \frac{Q^2}{2R} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + \frac{(1-n)^2}{(1-n)^{1/3}} \frac{Q^2}{2R} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + 4\pi\sigma R^2 [n^{2/3} + (1-n)^{2/3}] + (1-n)n \frac{Q^2}{2r}.$$

В данном случае условие минимальности потенциальной энергии конечного состояния имеет вид (3). Определяя положение минимума, для первой производной от энергии конечного состояния после обезразмеривания найдем

$$5[n^{2/3} - (1-n)^{2/3}] \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) W + [n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}] + 3W(1-2n) \frac{R}{r} = 0.$$

Вводя, как и в предыдущих случаях,  $m$  и рассчитывая  $W$  для воды ( $\epsilon = 81$ ), получаем график, приведенный на рис. 1, с кривой 1. Из условия (3) для второй производной имеем

$$W > \frac{n^{-4/3} + (1-n)^{-4/3}}{10 \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) [(n)^{-1/3} + (1-n)^{-1/3}] - 18/m}. \quad (8)$$

График функции  $W(n) = 0$ , соответствующей зависимости (8), представлен на рис. 1, с кривой 2. Из рисунка видно, что для рассматриваемой модели деление капли возможно только при  $V_1 \approx V_2$ , как это получено и в [13].

На рис. 3 представлен график зависимости  $W(\epsilon)$  для  $n = 0.5$ . Видно, что для случая распада поверхностно заряженной капли деление может происходить в любом отношении в зависимости от параметра  $W$ . При этом преобладает асимметричное деление. Для объемно заряженной капли деление может происходить только при равных размерах дочерних капель.

## 2. Исследование условий распада заряженной капли на три части сравнимых размеров при сильных виртуальных деформациях.

а) Поверхностно заряженная диэлектрическая капля. Будем считать, что заряд равномерно распределен по поверхности родительской капли и вморожен в нее. После распада при

виртуальной деформации капли потенциальная энергия системы трех дочерних капель, из которых две крайние принимаются в силу симметрии задачи одинаковыми, равна

$$U = \frac{2q_1^2}{2r_1} + \frac{q_2^2}{2r_2} + 8\pi\sigma r_1^2 + 4\pi\sigma r_2^2 + \frac{2q_1q_2}{2r}, \quad (9)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды каждой из малых и больших дочерних капель соответственно,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы,  $r$  — расстояние между центрами большой и малой дочерними каплями.

При записи выражения (9) опущено слагаемое, учитывающее электростатическое взаимодействие между двумя внешними дочерними каплями, корректный учет которого вследствие экранировки такого взаимодействия центральной каплей весьма проблематичен.

Пусть  $V_1/V = n$  ( $V$  — объем исходной капли,  $V_1$  — объем малой дочерней капли), тогда из условия постоянства объема получаем

$$r_1 = Rn^{1/3}, \quad r_2 = R(1 - 2n)^{1/3}. \quad (10)$$

Естественно принять, что заряд исходной капли делится между дочерними пропорционально площадям их поверхностей, тогда аналогично тому, как это было сделано в разделе 1 а, получим

$$q_2 = \frac{(1 - 2n)^{2/3}}{2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}} Q,$$

$$q_1 = \frac{n^{2/3}}{2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}} Q. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим выражение для изменения потенциальной энергии конечного состояния системы при делении капли на три части

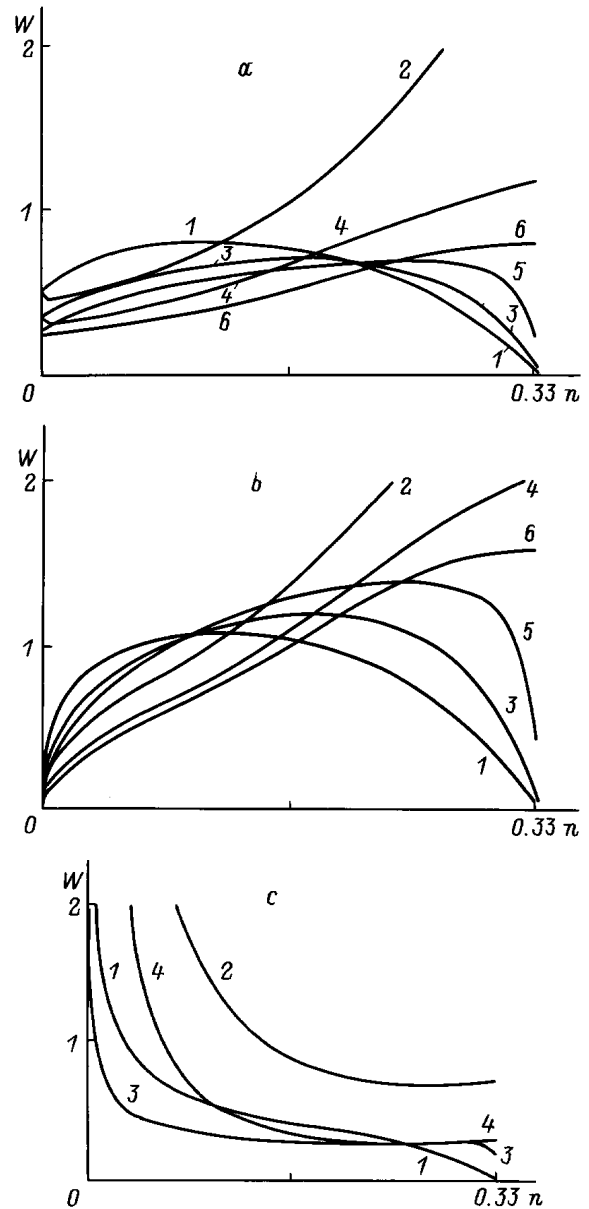
$$U = f(n) = \left[ \frac{1}{2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}} \right]^2 \frac{Q^2}{2R} + 4\pi\sigma R^2 [2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}] + \frac{2(n - 2n^2)^{2/3}}{[2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}]^2} \frac{Q^2}{2r}.$$

Потребуем, как и ранее, выполнения условий (3). Согласно первому из этих условий, найдем

$$W = \frac{[2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}]^3}{4 + \frac{8(n - 2n^2)^{2/3}}{m} - \frac{2(n - 2n^2)^{-1/3}(1 - 4n)[2n^{2/3} + (1 - 2n)^{2/3}]}{[n^{-1/3} - (1 - 2n)^{-1/3}]m}}, \quad (12)$$

где  $W$  и  $m$ , как и ранее, определяются выражением (4).

При построении зависимости  $W(n)$  возникает неопределенность в выборе расстояния между центрами капель  $r$  в момент дробления. Для качественного анализа примем  $r = r_1 + r_2$ . Тогда график зависимости  $W(n)$  будет иметь вид, представленный на рис. 4, а кривой 1.



**Рис. 4.** а — зависимости величины параметра  $W$  поверхностно заряженной диэлектрической капли от  $n$ , соответствующие экстремальному изменению свободной энергии системы, представлены кривыми 1, 3, 5; 1 — минимально возможная деформация капли  $r_*$ , 3 — деформация  $r_* = 10r$ , 5 — деформация  $r_* = 28r$ ; геометрическое место точек  $i$ -кривой, лежащих выше кривой  $(i + 1)$ , соответствует минимальному изменению свободной энергии при соответствующей начальной деформации:  $i = 1 \rightarrow r_* = r$ ;  $i = 2 \rightarrow r_* = 5r$ ;  $i = 3 \rightarrow r_* = 10r$ ; б — те же зависимости, что и на рис. 4, а, но для проводящей жидкости; в — зависимости величины параметра  $W$  капли диэлектрической жидкости с однородно распределенным по объему зарядом от  $n$ , соответствующая экстремальному изменению свободной энергии системы: 1 — минимально возможная деформация  $r_* = r$ , 3 —  $r_* = 28r$ , геометрическое место точек  $i$ -кривой, лежащих выше кривой  $(i + 1)$ , соответствует минимальному изменению свободной энергии при начальной деформации:  $i = 1 \rightarrow r_* = r$ ;  $i = 2 \rightarrow r_* = 28r$ .

Из требования положительности второй производной аналогично получим второе соотношение между  $W$  и  $n$ , определяющее границу существования возможных каналов деления,

$$W > [n^{-4/3} + 2(1-2n)^{-4/3}] \left\{ \left[ \frac{4[n^{-4/3} + 2(1-2n)^{-4/3}]}{[2n^{2/3} + (1-2n)^{2/3}]^3} + 48 \frac{[n^{-1/3} - (1-n)^{-1/3}]^2}{[2n^{2/3} + (1-2n)^{2/3}]^4} \right] \left[ 1 + \frac{2(n-2n^2)^{2/3}}{m} \right] - \frac{(n-2n^2)^{-1/3}}{m[2n^{2/3} + (1-2n)^{2/3}]^2} \left[ 24 + 2 \frac{(1-4n)^2}{(n-2n^2)} + 32 \frac{(1-4n)[n^{-1/3} - 2(1-2n)^{-1/3}]}{[2n^{2/3} + (1-2n)^{2/3}]^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (13)$$

Область значений параметров, выделяемая этим неравенством, расположена на рис. 4, *a* выше кривой 2. Из рис. 4, *a* видно, что в зависимости от величины параметра  $W$  капля может делиться на части в различных пропорциях, причем только асимметрично. Ясно, что наиболее вероятно такое деление, при котором с противоположных вершин родительской капли отрываются две маленькие капельки.

Если в выражениях (12), (13) вдвое увеличить расстояние между дочерними каплями в конечном состоянии процесса деления (вдвое увеличить параметр  $m$ ), то соответствующие графики будут представлены на рис. 4, *a* кривыми 3 и 4. Если расстояние между дочерними каплями увеличить в 10 раз, то результаты расчета по (12) и (13) определятся на рис. 4, *a* кривыми 5 и 6. В итоге нетрудно видеть, что с ростом расстояния между дочерними каплями возрастает тенденция к симметричному делению.

б) З а р я ж е н н а я и д е а л ь н о п р о в о д я щ а я к а п л я. Как и в предыдущем случае, заряд равномерно распределен по поверхности капли, но в отличие от ранее рассмотренного случая теперь характерное время перераспределения заряда много меньше времени деления капли и заряды капель нужно искать из требования постоянства электрического потенциала. Конечное состояние энергии, как и в предыдущем случае, определяется выражением (9).

В отличие от ранее рассмотренной модели теперь размеры и заряды дочерних капель не зависят друг от друга. Из условия сохранения полного объема жидкости, полагая, как и ранее,  $V_1/V = n$ , найдем выражения для  $r_1$  и  $r_2$ , определяющиеся соотношением (10).

Полагая  $q_1/Q = k$ , из условия сохранения заряда получим  $q_1 = Qk$ ,  $q_2 = (1-2k)Q$ . С учетом введенных обозначений выражение для изменения энергии системы

будет зависеть от двух параметров  $k$  и  $n$

$$f(k, n) = \frac{2k^2 Q^2}{n^{1/3} 2R} + \frac{(1-2k)^2 Q^2}{(1-2n)^{1/3} 2R} + 4\pi\sigma R^2 [2n^{2/3} + (1-2n)^{2/3}] + 2(1-2k)k.$$

Как и в разделе 1б, эта функция должна быть минимальна при делении родительской капли, т.е. должны выполняться условия (5), которые дадут систему двух уравнений, определяющих положение экстремума функции  $f(k, n)$ . Откуда получим критическую зависимость для  $W$

$$W = (n^{-1/3} - (1-2n)^{-1/3}) \left( \frac{k^2}{n^{4/3}} - \frac{(1-2k)^2}{(1-2n)^{4/3}} \right)^{-1}, \quad (14)$$

где

$$k = \frac{2(1-2n)^{-1/3} + m^{-1}}{2n^{-1/3} + 2(1-2n)^{-1/3} - 4m^{-1}}.$$

Искомая критическая зависимость  $W = W(n)$ , следующая из системы (14), представлена на рис. 4, *b* кривой 1. Введем обозначения

$$A^* = 4n^{-1/3} + 8(1-2n)^{-1/3} - 8/m,$$

$$B^* = \frac{4}{3} \left( \frac{k}{n^{4/3}} + \frac{2(1-2k)}{(1-2n)^{4/3}} \right),$$

$$C^* = \frac{8}{9} \left( \frac{k^2}{n^{7/3}} + \frac{2(1-2k)^2}{(1-2n)^{7/3}} \right),$$

$$D^* = \frac{1}{9} [n^{-4/3} + (1-n)^{-4/3}].$$

С их помощью ограничение на область существования возможных каналов деления может быть записано в виде

$$W > D^* A^* [A^* C^* - B^{*2}]^{-1}. \quad (15)$$

Область значений параметров  $W$  и  $n$ , в которой деление возможно, лежит выше кривой 2 на рис. 4, *b*.

Увеличивая расстояние между дочерними каплями вдвое, получим кривые 3 и 4 на рис. 4, *b*. Увеличивая расстояние между дочерними каплями в 10 раз, получим кривые 5 и 6 на рис. 4, *b*. Из сравнения рис. 4, *a* и *b* видно, что в обеих рассмотренных идеализациях результаты похожи: с ростом начальной деформации родительской капли (при больших  $m$ ) становится возможным симметричный распад капли. При этом в модели идеально проводящей капли наблюдается рост параметра Рэлея  $W$ , при котором происходит деление. В пределе очень больших деформаций  $W \rightarrow 1.5$ , так что такое деление (деление капли на части сравнимых размеров) становится проблематичным, так как при  $W = 1$  наблюдается неустойчивость Рэлея для исходной сферической капли, при которой заряд родительской капли сбрасывается в виде серии высокодисперсных сильнозаряженных капель [1,2]. И тем не менее оно может реализовываться

при весьма быстрых деформациях капли, когда ее вязкость высока и формирование эмиссионных выступов затруднительно [7]. Из общезначимых соображений также очевидно, что таким образом могут делиться и сильно заряженные капли в весьма вязкой жидкой среде (что и отмечено в экспериментах [11]). В этом случае большая вязкость самой капли или среды демпфирует неустойчивость высококи мод, что препятствует образованию конусов Тейлора и развитию неустойчивости по механизму Рэлея [7].

в) Объемно заряженная диэлектрическая капля. Будем считать, что заряд равномерно распределен по всему объему (вморожен в вещество) исходной капли с объемной плотностью  $\rho$ . Тогда электростатическая энергия этой капли определяется соотношением, приведенным в разделе 1 в.

После распада исходной капли потенциальная энергия системы из трех дочерних капель определится выражением

$$U = \frac{2q_1^2}{2r_1} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + \frac{q_2^2}{2r_2} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + 8\pi\sigma r_1^2 + 4\pi\sigma r_2^2 + \frac{2q_1q_2}{2r}.$$

Примем в соответствии с предположением о вмороженности заряда в вещество, что заряд делится в том же отношении, что и объем  $q_1 = Qn$ ,  $q_2 = (1 - 2n)Q$ . Тогда для энергии конечного состояния системы при делении родительской капли на три части получим

$$5[n^{2/3} - (1 - 2n)^{2/3}] \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) W + [n^{-1/3} - (1 - 2n)^{-1/3}] + 3W(1 - 4n)\frac{R}{r} = 0.$$

Принимая для определенности  $\epsilon = 81$  (как у воды), найдем

$$W = \frac{[n^{-1/3} - (1 - n)^{-1/3}]}{5[n^{2/3} - (1 - 2n)^{2/3}] \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) + \frac{3(1-4n)}{m}}.$$

График этой функции приведен на рис. 4, с кривой 1. Из условия на вторую производную получим

$$W > \frac{n^{-4/3} + 2(1 - 2n)^{-4/3}}{10 \left(1 + \frac{1}{5\epsilon}\right) [n^{-1/3} + 2(1 - 2n)^{-1/3}] - \frac{36}{m}}. \quad (14a)$$

Область, в которой возможно деление, на рис. 4, с расположена выше кривой 2. Из взаиморасположения кривых 1 и 2 на рис. 4, с видно, что при  $r = r_1 + r_2$  капля на три части делиться не будет.

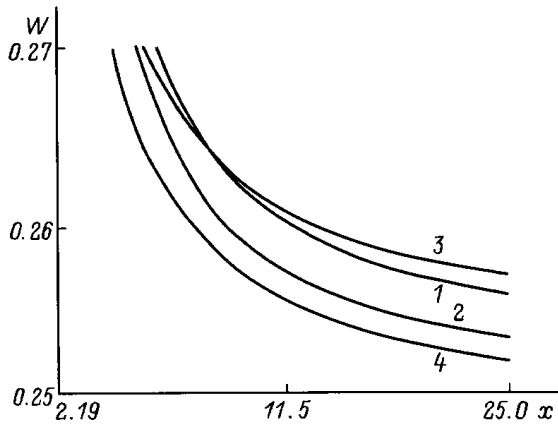
Рассмотрим случай, когда исходная капля сильно деформирована, т.е. когда  $r \gg r_1 + r_2$ . Как показывают расчеты, деление становится возможным только при достаточно больших деформациях, когда  $m$  больше минимально возможного в 28 раз (соответствующие

кривые 3, 4 на рис. 4, с). Несложно видеть, что при делении отношение объемов дочерних капель  $n \approx 0.27$ , т.е. деление имеет существенно симметричный характер ( $V_1 \approx V_2$ ). С дальнейшим увеличением исходной деформации увеличивается и степень симметричности деления.

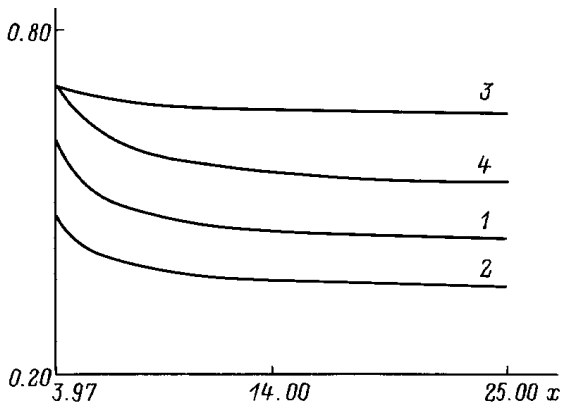
Таким образом, из вышеизложенного ясно, что для случая распада поверхностно заряженной недеформированной или слабо деформированной капли деление может происходить только несимметричным образом. При этом соотношение объемов дочерних капель находится в зависимости от параметра  $W$ . Наиболее вероятно деление, при котором  $V_1 \ll V_2$ , такое деление для слабо деформированной капли становится возможным уже при  $W_{\min} = 0.5$  ( $W_{\min}$  определяется при  $n \gg 0.1$ ). Для сильно деформированных поверхностно заряженных диэлектрических капель с ростом величины деформации повышается вероятность симметричного деления, но при этом все равно преобладает асимметричное деление на три части. Для идеально проводящей капли с ростом деформации вероятность симметричного распада уменьшается. При весьма больших значениях исходной деформации  $m$  деление становится возможным уже при  $W_{\min} = 0.25$ . Для объемно заряженной слабо деформированной диэлектрической капли деление на три части не реализуется совсем. Для больших деформаций капли такая возможность появляется. При этом объемы дочерних капель примерно равны, т.е. для данного случая более вероятно симметричное деление капли.

### 3. Влияние первичной деформации на критические характеристики неустойчивости сильно заряженных капель

На рис. 5 приведены зависимости  $W(x)$  для первой и второй производных при заряде, равномерно распределенном по поверхности диэлектрической капли, где  $x$  — параметр, определяющий величину деформации исходной капли, равный расстоянию между концами капли. Распаду исходной капли на две части соответствуют кривые 1 и 2; распаду на три части соответствуют кривые 3 и 4 (кривые 1 и 3 соответствуют равенству нулю первой производной от энергии конечного состояния системы, кривые 2 и 4 определяют разрешенные каналы деления). При расчетах менялась величина первичной деформации при неизменном  $n$ , т.е. в данном случае равны объемы каждой из малых дочерних капель (под материнской будем понимать каплю, от которой отрываются в первом случае одна капля, во втором — две). Наименьшая деформация исходной капли бралась из расчета, что в конечном состоянии капли после распада на три части касаются друг друга (эта величина, обезразмеренная на радиус исходной капли, соответствует крайней левой точке на оси абсцисс). На рис. 5 приведены кривые для  $n = 0.0001$ , величина наименьшей первичной де-



**Рис. 5.** Зависимость величины параметра  $W$  поверхностно заряженной капли диэлектрической жидкости, соответствующая экстремальному изменению свободной энергии системы от параметра деформации  $x$  при  $n=0.0001$ . Геометрическое место точек  $i$ -кривой, лежащих выше кривой  $(i+1)$ , соответствует минимальному изменению свободной энергии.



**Рис. 6.** То же, что и на рис. 5, но при  $n = 0.175$ .

формации  $x_{\min} = 2.19$ . Из взаимного расположения кривых 1 и 3 видно, что для случая относительно малых деформаций (до  $x \approx 6$ ) более вероятно будет деление капли на три части, а при деформации капли  $x > 6$  будет преобладать деление капли на две части. Далее с ростом  $n$  величина деформации, необходимая для преобладания распада капли на две части, будет быстро уменьшаться. Начиная примерно с  $n = 0.175$  (рис. 6) наблюдается преобладающее деление на две капли во всем диапазоне  $x$ .

В случае объемного распределения заряда в капле, как уже говорилось ранее, для слабо деформированной капли возможен только распад на две части примерно равных объемов, распад же на три части становится возможным только при весьма сильных виртуальных деформациях.

Третий случай идеально проводящей капли похож на первый, но в данном случае уже при  $n > 0.01$  наблюдается только распад на две капли.

Таким образом, при неустойчивости поверхностно заряженной слабо деформированной капли энергетически более выгоден распад на три части с эмиссией двух дочерних капель, много меньших материнской. Распад на две части становится более вероятен при сильных деформациях. При эмиссии дочерних капель с объемом порядка десятых долей объема материнской капли энергетически более выгоден распад на две части.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [2] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Phys. D. 1991. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [3] Adam J.R., Lindblad N.R., Hendrics C.D. // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. N 11. P. 5173–5180.
- [4] Berg T.G.O., Trainor R.J., Jr., Vaughan U. // J. Atm. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [5] Ryce S.A., Patriarche D.A. // Canad. J. Phys. 1965. Vol. 43. P. 2192–2199.
- [6] Григорьев А.И., Григорьева И.Д., Ширяева С.О. // Химия плазмы. № 17. М.: Энергоатомиздат, 1991, С. 218–248.
- [7] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.
- [8] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 11–17.
- [9] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 3. С. 35–39.
- [10] Красницкий В.И., Апасов А.М., Контуш С.М. // ПЖТФ. 1990. Т. 16. № 18. С. 77–80.
- [11] Ryce S.A., Wutman R.R. // Canad. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185–2194.
- [12] Григорьев А.И., Мухина Е.И. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 25–32.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Григорьева И.Д. и др. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 4. С. 25–31.