01;05;12

Влияние эффекта Барнетта–Лондона на движение сверхпроводящего ротора в неоднородном магнитном поле

© Ю.М. Урман

(Поступило в Редакцию 14 апреля 1997 г.)

В ряде приборов, использующих неконтактный подвес, ротор вращается в магнитном поле подвеса с большой скоростью. Проектирование таких приборов возможно только на основе знания свойств тел, вращающихся в магнитных полях. Это особенно важно для сверхпроводящих тел, если учесть, что вращение сверхпроводника в поле вызывает ряд эффектов, которые могут существенно ухудшить характеристики прибора. В связи с этим большое значение приобретает оценка нежелательных эффектов, возникающих при вращении сверхпроводника в магнитных полях. Одним из них является появление магнитного поля в объеме вращающегося сверхпроводника, не связанного с наличием внешнего поля, линейно зависящего от угловой скорости тела.

Возникновение магнитного поля в сверхпроводнике при его вращении (аналог "эффекта Барнетта" [1]) было предсказано в работе [2] и теоретически обосновано Ф. Лондоном в 1960 г. Магнитное поле во вращающемся сверхпроводнике получило название "момент Лондона". Первый успешный эксперимент по его измерению был выполнен в работе [3] и повторен в ряде работ [4–6]. В 1940 г. И. Кикоин и С. Губарь провели эксперимент со сверхпроводниками, аналогичный широко известному опыту Эйнштейна де Гааза, и показали, что сверхпроводящий ток является электронным, а намагничивание сверхпроводника — следствием экранирующего тока.

Моменту Лондона посвящен ряд теоретических работ, базирующихся на классической электродинамике [7], общей теории относительности [8] и квантовой механике [9].

В приборах, использующих подвес тела в магнитном поле, намагниченность, вызванная вращением тела, взаимодействуя с полем подвеса, порождает момент сил. Изучение движения тела под действием этого момента имеет принципиальное значение, особенно при установлении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес. Дело в том, что даже при уничтожении всех причин, вызывающих уход гироскопа, избавиться от момента, обусловленного эффектом Барнетта–Лондона, практически невозможно. Кроме того, момент Лондона, направленный строго по оси вращения симметричного ротора, может быть использован в качестве датчика угла, например, в криогенном гироскопе с электростатическим подвесом.

Влияние эффекта Барнетта–Лондона на угловые движения твердого тела в общетеоретическом аспекте рассматривалось в работах [10–13] и применительно к сверхпроводящему гироскопу в работах [14,15]. Во всех этих работах (за исключением [14]) основное внимание было направлено на изучение влияния эффекта Барнетта–Лондона на угловые движения сверхпроводящего тела в однородном магнитном поле. Однако поведение тела в неоднородном поле представляет большой интерес, так как в таком поле наряду с механическим моментом появляется механическая сила, в результате чего возникает взаимосвязь поступательных и вращательных движений, которая вызывает ряд эффектов, влияющих на работу криогенного гироскопа, аналогично несбалансированному ротору в неконтактном подвесе [16].

1. Момент сил, действующих на вращающийся сверхпроводящий шар в неоднородном магнитном поле

Магнитный момент сверхпроводящего шара, вращающегося с угловой скоростью Ω, определяется выражением [15]

$$\mathbf{G} = \varkappa a^3 \Omega, \quad \varkappa = \frac{m_e C}{|e|}, \tag{1.1}$$

где m_e — масса электрона, C — скорость света в пустоте, $|e|$ — величина заряда электрона, a — радиус шара.

Найдем поверхностный ток, соответствующий магнитному моменту Лондона.

Векторный потенциал в произвольной точке $\mathbf{r}$ выражается через магнитный момент единицы объема по формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{v} \mathbf{G} x \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \tag{1.2}$$

Используя тождество $\mathrm{rot}\,(\varphi \mathbf{G}) = [\nabla\varphi \times \mathbf{G}] + \varphi \mathrm{rot}\,\mathbf{G}$, преобразуем (1.2) к виду

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{v} \frac{\mathrm{rot}'\mathbf{G}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int\limits_{v'} \mathrm{rot} \left(\frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \tag{1.3}$$

Штрих означает интегрирование по точкам внутри тела. Так как внутри шара $\mathbf{G} = \mathrm{const}$, то $\mathrm{rot}\,\mathbf{G}$ везде равен нулю, поэтому первый интеграл в формуле (1.3) исчезает, а второй можно преобразовать в поверхностный. Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_{s'} \frac{[\mathbf{G} \times \mathbf{n}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds',$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности шара.

Величину $c[\mathbf{G}\times\mathbf{n}]$ можно рассматривать как поверхностную плотность тока. В нашем случае она равна

$$\mathbf{j}_L=\frac{3C}{4\pi}\varkappa[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{n}],\qquad(1.4)$$

значок L у вектора $\mathbf{j}$ будет в дальнейшем означать ток Лондона.

Рассмотрим сверхпроводящий шаровой ротор, вращающийся в магнитном подвесе, образованном N сверхпроводящими катушками. Векторный потенциал такой системы равен

$$\mathbf{A}=\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{v_k}\frac{\boldsymbol{\delta}_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}dV_k+\frac{1}{C}\int\limits_{s'}\frac{\mathbf{j}_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds'+\frac{3}{4\pi}\varkappa\int\limits_{s'}\frac{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds'.\qquad(1.5)$$

Здесь первый член описывает векторный потенциал заданных источников тока $\boldsymbol{\delta}_k$, второй — потенциал сверхтока $\mathbf{j}_s$, наведенного внешним полем источников, и, наконец, третий член — потенциал токов Лондона. Вычисляя потенциал токов Лондона, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\varkappa\frac{a^3}{r^3}[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}].\qquad(1.6)$$

Используя векторный потенциал (1.5), найдем потокосцепление с k-й катушкой

$$\psi_k=C\sum_{j=1}^{N}I_jL_{jk}+\frac{W_k}{S_k}\varkappa a^3\mathbf{\Omega}\int\limits_{v_k}\frac{[\mathbf{r}\times\mathbf{t}_k]}{r_k^3}dV_k,\qquad(1.7)$$

где L_{jk} — коэффициент взаимоиндукции k-й и j-й катушек, I_j — полный ток j-й катушки, W_k и S_k — соответственно число ампер-витков и площадь сечения провода k-катушки, и магнитную энергию

$$U=\frac{1}{2}\sum_{kj}I_kI_jI_{kj}+\frac{1}{C}\varkappa a^3\mathbf{\Omega}\sum_{k}\frac{W_k}{S_k}\int\limits_{v_k}\frac{[\mathbf{r}\times\mathbf{t}_k]}{r_k^3}dV_k+\frac{3}{8}\varkappa^2a^{-1}\int\limits_{s}[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}]^2ds.\qquad(1.8)$$

Первый член в формуле (1.8) описывает магнитную энергию взаимодействия поля подвеса с невращающимся шаром, второй — взаимодействие токов Лондона с полем подвеса, третий — собственную энергию токов Лондона. Если учесть, что

$$\frac{1}{C}\sum_{k}I_k\frac{W_k}{S_k}\int\limits_{v_k}\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{t}_k]}{r_k^3}dV_k=-\mathbf{H}\qquad 1.9$$

представляет магнитное поле, создаваемое катушками в точке пространства, занимаемого центром шара, то магнитную энергию взаимодействия токов Лондона с внешним полем подвеса можно представить в виде

$$U_L=-\varkappa a^3(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{H}).\qquad(1.10)$$

Применим выражение (1.10) для расчета моментов, действующих на вращающийся сверхпроводящий шар, в катушечных подвесах различной конфигурации.

1) В р а щ а ю щ и й с я с в е р х п р о в о д я щ и й ш а р в м а г н и т н о м п о л е о д н о й к а т у ш к и с к р у г о в ы м т о к о м.

а) $I=\mathrm{const}$.

Магнитная энергия после вычисления интеграла (1.8) имеет вид

$$U=\frac{1}{2}I^2L_{11}+\frac{2\pi IW}{C}\varkappa a^3\frac{\sin^2\vartheta}{r}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{e}_z),\qquad(1.11)$$

где r — радиус сферы, на которой находится контур кругового тока; ϑ — половина угла, под которым виден контур тока из центра шара; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси катушки; L_{11} — индуктивность.

Момент, действующий на вращающийся сверхпроводящий шар, будет определяться формулой

$$\mathbf{M}=\frac{2\pi IW}{Cr}\varkappa a^3\sin^2\vartheta[\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{e}_z].\qquad(1.12)$$

Из этой формулы следует, что момент перпендикулярен плоскости, образованной векторами $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{e}_z$, и зависит от величины угловой скорости, размера шара, положения катушки, числа ампер-витков W. Максимальное значение момента достигается тогда, когда контур с током лежит в плоскости экватора $\vartheta=\pi/2_+$ и $\mathbf{\Omega}^{\perp}\mathbf{e}_z$.

б) $\psi=\mathrm{const}$.

Используя формулу (1.7), найдем потокосцепление с контуром тока

$$\psi_0=IL_{11}+\frac{2\pi W}{Cr}\varkappa a^3\sin^2\vartheta(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{e}_z),$$

откуда

$$I=(\psi_0-\psi_L)L_{11}^{-1}.\qquad(1.13)$$

Подставляя (1.13) в формулу (1.12), будем иметь

$$\mathbf{M}=\frac{2\pi W}{CrL_{11}}(\psi_0-\psi_L)\varkappa a^3\sin^2\vartheta[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{e}_z].\qquad(1.14)$$

Момент при сохранении потока через катушку в общем случае отличается от момента при постоянном токе в катушке, так как ток в катушке зависит от положения $\mathbf{\Omega}$ относительно оси катушки.

2) В р а щ а ю щ и й с я с в е р х п р о в о д я щ и й ш а р в п о л е д в у х с о о с н ы х к а т у ш е к с в к л ю ч е н н ы м и н а в с т р е ч у к р у г о в ы м и т о к а м и. Магнитная энергия взаимодействия вращающегося шара с полем двух катушек с током имеет вид

$$U=\frac{1}{2}I_1^2L_{11}+\frac{1}{2}I_2^2L_{22}+I_1I_2L_{12}+\frac{1}{C}\varkappa a^3\mathbf{\Omega}\sum_{k=1}^{2}I_kW_k\int\frac{[\mathbf{e}_rd\mathbf{l}]}{r_k^2}.\qquad(1.15)$$

Если центр шара совпадает с центром симметрии двух соосных катушек, имеющих равные геометрические размеры и равные токи, включенные навстречу друг другу, то момент из-за токов Лондона не возникает, так как в формуле (1.15) последний член исчезает. Поэтому сразу предположим, что центр шара не совпадает с центром симметрии подвеса, а расположен в некоторой точке O_1, определяемой радиус-вектором $\mathbf{b}$, проведенным из центра симметрии подвеса O, которую мы примем за начало системы координат. Ось $0Z$ этой системы совпадает с осью симметрии подвеса, а оси $0X$ и $0Y$ лежат в плоскости, перпендикулярной $0Z$.

Вычисляя энергию с точностью до первого порядка по смещению центра масс ротора, будем иметь

$$U=\frac{1}{2}I^2(L_{11}+L_{22}-2L_{12})+\frac{2\pi IW}{Cr^2}\varkappa a^3 3\sin^2\vartheta\cos\vartheta \times\left[2z(\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{e}_3)-x(\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{e}_1)-y(\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{e}_2)\right], \tag{1.16}$$

где x, y, z — компоненты вектора смещения $\mathbf{b}$; $\hat{e}_i$ $(i=1,2,3)$ — единичные орты.

Момент сил будет иметь вид

$$\mathbf{M}=\frac{2\pi IW}{Cr^2}\varkappa a^3 3\sin^2\vartheta\cos\theta\big\{2z[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_3] - x[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_1]-y[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_2]. \tag{1.17}$$

Легко увидеть, что на вращающийся шар кроме момента сил будет действовать и сила, имеющая вид

$$\mathbf{F}=\frac{2\pi IW}{Cr}\varkappa a^3 3\sin^2\theta\cos\vartheta\big\{2\Omega_3\hat{e}_3 - \Omega_1\hat{e}_1-\Omega_2\hat{e}_2\big\}. \tag{1.18}$$

Из формулы (1.18) следует, что сила не совпадает по направлению с вектором угловой скорости и не зависит от смещения ротора.

Общий анализ показывает, что момент сил, вызванный эффектом Барнетта–Лондона, возникает тогда, когда в разложении потенциала поля подвеса присутствует первая гармоника (есть однородная составляющая поля). Поэтому, на первый взгляд, чтобы избавиться от уходов, вызванных токами Лондона, надо создать такую конфигурацию магнитного поля подвеса, чтобы в ней в окрестности устойчивого состояния равновесия тела отсутствовала однородная составляющая. Например, поместить тело в центр системы, образованной соосными катушками, в которых одинаковые по величине токи включены навстречу. Формулы (1.17) и (1.18) говорят, что это не так. Действительно, если бы вращение шара в отсутствие гравитационных сил не приводило к изменению положения равновесия, то момент сил, действующий на вращающийся ротор, был бы равен нулю. Однако вращение шара вызывает силу (1.18) (в общем случае ее можно представить в виде $F_i=\varkappa a^3\Omega_j(\partial H_i/\partial X_j)$), которая сместит ротор в новое положение равновесия, определяемое равенством сил со стороны поля подвеса и силой, вызванной эффектом Лондона. Это смещение вызовет момент (1.17). При этом, если ротор нутирует, может возникнуть взаимосвязь поступательных и вращательных движений, которая в неконтактном регулируемом подвесе вызвовет ряд эффектов, влияющих на работу прибора аналогично дисбалансу ротора в неконтактном подвесе.

2. Влияние эффекта Барнетта–Лондона на движение сверхпроводящего ротора в неоднородном магнитном поле неконтактного регулируемого криогенного подвеса

Запишем в безразмерном виде, выделив малый параметр ε, уравнения движения ротора в форме уравнений количества движений и момента количества движения

$$D^2\mathbf{r}+\hat{\omega}(D)\mathbf{r}=(\Omega\nabla)\mathbf{h},\quad D\mathbf{k}=\varepsilon\big\{\boldsymbol{\Omega},(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{h}]. \tag{2.1}$$

Здесь r, k, Ω, h — безразмерные вектор смещения центра масс относительно центра подвеса, вектор кинетического момента, угловой скорости, вектор магнитного поля; $\omega(D)$ — тензорный оператор динамической жесткости, D — оператор дифференцирования по безразмерному времени, в качестве масштаба которого выбрано "нутационное" время движения ротора $T_0=I_1K_0^{-1}$ (I_1 — экваториальный момент инерции, K_0 — характерная величина кинетического момента); $\varepsilon=R_0^2MT^{-2}\sim 10^{-8}$–$10^{-3}$ (R_0 — характерный масштаб смещения центра масс, M — масса ротора).

Так как $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, то тензор $\partial H_i/\partial x_j$ — симметричный с нулевым следом, следовательно, он может быть записан в форме неприводимого тензора второго ранга

$$\mathfrak{L}_{2\mu}\left\{\mathfrak{L}_{20}=\partial H_3/\partial x_3,\ \mathfrak{L}_{22}=\mathfrak{L}_{2-2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}-\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\right)\right\}.$$

Если поле осесимметрично, то тензор $\mathfrak{L}_{2\mu}$ имеет только одну компоненту $\mathfrak{L}_{20}$. Представим силу Лондона через неприводимый тензор первого ранга [17]

$$F_1=-\sqrt{\frac{5}{2}}\varkappa\big\{\mathfrak{L}_2\oplus\Omega_1\big\}_1. \tag{2.2}$$

Для дальнейших вычислений запишем второе уравнение (2.1) в форме неприводимого тензора

$$k_1=i\sqrt{5}\varepsilon\big\{\Omega_1\oplus\{\mathfrak{L}_2\oplus r_1\}_1\big\}_1=M_1. \tag{2.3}$$

Из первого уравнения (2.1) найдем $\mathbf{r}$, считая, что собственные решения задачи затухают

$$r_1=-\sqrt{\frac{5}{2}}\big\{\mathfrak{L}_2\oplus E\Omega_1\big\}_1+\frac{5}{2}\big\{T_2\oplus\{\mathfrak{L}_2\oplus\Omega_1\}\big\}_1, \tag{2.4}$$

где

$$E=\frac{1}{3}Sp\hat{\omega}(D),\quad T_{20}=\hat{\omega}_3-E,$$

$$T_{22}=T_{2-2}=\sqrt{\frac{1}{6}}(\hat{\omega}_1-\hat{\omega}_2).$$

Подставляя уравнение (2.4) в правую часть (2.3), получим

$$M_{1\nu}=-i\frac{5}{\sqrt{2}}\sum_{\lambda npSq'\mu}\mathfrak{L}_{2q'}\mathfrak{L}_{2q}\Omega_{1\lambda}E(D)\Omega_{1S}C^{1\nu}_{1\lambda 1n}C^{1n}_{2q'1\mu}C^{1\mu}_{2p1S}$$
$$+i\frac{5\sqrt{5}}{2}\sum_{\lambda npSqq'\mu}\mathfrak{L}_{2q'}\mathfrak{L}_{2q}\Omega_{1\lambda}T_{2p}\Omega_{1t}C^{1\mu}_{2p1S}C^{1\nu}_{2q'1\mu}C^{1S}_{2q1t}. \tag{2.5}$$

Здесь $C^{1\nu}_{1\lambda 1n}$ — коэффициент Клебша–Гордана [17].

В дальнейшем рассмотрим осесимметричный случай, т.е. будем считать, что $\mathfrak{L}_{20}=0$, $\mathfrak{L}_{22}=\mathfrak{L}_{2-2}=0$; $T_{20}=0$, $T_{22}=T_{2-2}=0$. Тогда (2.5) значительно упростится и будет иметь вид

$$M_{1\nu}=\frac{i}{2\sqrt{2}}\sum_{\lambda n}(3n^2-2)\Omega_{1\lambda}$$
$$\times\Big[E(D)-\frac{1}{2}(3n^2-2)T_{20}(D)\Big]\Omega_{1n}C^{1\nu}_{1\lambda 1n}. \tag{2.6}$$

Осредним (2.6) по свободному движению Эйлера–Пуасо и представим момент в форме

$$\mathbf{M}=[\hat{e}\nabla]V_1+\nabla_\Omega V_2+\hat{e}V_3, \tag{2.7}$$

где

$$V_1=\frac{\varepsilon}{8}\mathfrak{L}^2_{20}\Big(1-\frac{\chi}{1+\chi}\cos^2\beta\Big)^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{h})^2\big[4\hat{\omega}_3(0)-\hat{\omega}_1(0)\big]$$
$$+\frac{\varepsilon}{16}\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{h})^2\mathrm{Re}\big[\hat{\omega}_1(ik)$$
$$-4\hat{\omega}_3(ik)\big],$$

$$V_2=\frac{\varepsilon}{16}\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{h})^2\mathrm{Im}\big[\hat{\omega}_1(ik)$$
$$-4\hat{\omega}_3(ik)\big],$$

$$V_3=\frac{\varepsilon}{4}k^2\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta\Big\{2[\mathbf{k}\times\mathbf{h}]\mathrm{Im}\,\hat{\omega}_3(ik)$$
$$+\frac{1}{2}\big(1+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{h})^2\big)\mathrm{Im}\,\hat{\omega}_1(ik)\Big\}.$$

Здесь $\mathbf{e}$ — единичный вектор кинетического момента, ∇_Ω — поперечная часть градиента, $\chi=(I_3-I_1)/I_1$, β — угол нутации (угол между вектором $\mathbf{k}$ и осью динамической симметрии ротора). Определяя еще момент в проекции на ось симметрии тела и проводя его осреднение, запишем уравнения эволюционных движений вектора кинетического момента и угла нутации.

$$\dot{k}=\frac{\varepsilon}{4}k^2\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta\Big[2\sin^2\rho\,\mathrm{Im}\,\hat{\omega}_3(ik)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos^2\rho)\,\mathrm{Im}\,\hat{\omega}_1(ik)\Big],$$

$$\dot{\rho}=-\frac{\varepsilon}{8}k\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta\sin\rho\cos\rho\,\mathrm{Im}\Big[\hat{\omega}_1(ik)$$
$$-4\omega_3(ik)\Big],$$

$$\sin\rho\dot{\sigma}=-\frac{\varepsilon}{4}\mathfrak{L}^2_{20}k\Big(1-\frac{\chi}{1+\chi}\cos^2\beta\Big)\sin\rho\cos\rho\big[4\omega_3(0)$$
$$-\omega_1(0)\big]-\frac{\varepsilon}{8}k\mathfrak{L}^2_{20}\Big(\frac{\chi}{1+\chi}\Big)^2\sin^2\beta\cos^2\beta\sin\rho$$
$$\times\cos\rho\,\mathrm{Re}\,[\omega_1(ik)-4\omega_3(ik)],$$

$$\dot{\beta}=-\frac{\varepsilon}{4}k\mathfrak{L}^2_{20}\frac{\chi}{1+\chi}\Big(1-\frac{\chi}{1+\chi}\cos^2\beta\Big)$$
$$\times\sin\beta\cos\beta\Big[2\sin^2\rho\,\mathrm{Im}\,\hat{\omega}_3(ik)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos^2\rho)\,\mathrm{Im}\,\omega_1(ik)\Big]. \tag{2.8}$$

Здесь σ — угол прецессии вектора кинетического момента вокруг оси поля, ρ — угол между вектором кинетического момента и осью поля. Используя первое и последнее уравнения системы (2.8), найдем первый интеграл

$$k^2\Big(1-\frac{\chi}{1+\chi}\cos^2\beta\Big)=\mathrm{const}, \tag{2.9}$$

который по физическому смыслу отвечает сохранению кинетической энергии. Если подвес изотропный ($\omega_3=\omega_1$), то существует еще один интеграл

$$k\cos\rho\sqrt[3]{Ctg^2\rho}=\mathrm{const}. \tag{2.10}$$

Из последнего уравнения системы (2.8) следует достаточное условие асимптотической устойчивости нутационных колебаний тела

$$\chi\Big[2\sin^2\rho\,\mathrm{Im}\,\omega_3(ik)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos^2\rho)\,\mathrm{Im}\,\omega_1(ik)\Big]>0. \tag{2.11}$$

Для изотропного подвеса условие (2.11) переходит в неравенство

$$\chi\,\mathrm{Im}\,\omega(ik)>0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим случай, когда на сверхпроводник в магнитном подвесе действуют "упругая" сила, пропорциональная смещению геометрического центра шара $q_0\mathbf{r}$, и сила "вязкого трения", пропорциональная $\lambda\mathbf{r}$. Выражение для передаточной функции примет вид

$$\omega(0) = q_0(1 + \tau D),$$

тогда

$$\omega(ik) = \frac{1}{(q_0 - k^2) + iq_0\tau k} = \frac{(q_0 - k^2)^2 - i\tau q_0 k}{(q_0 - k^2)^2 + q_0^2\tau^2 k^2},$$

откуда

$$\operatorname{Im}\omega(ik) = -\frac{\tau q_0 k}{(q_0 - k^2)^2 + q_0^2\tau^2 k^2} < 0.$$

Для выполнения неравенства (2.12) необходимо, чтобы $\chi = (I_3 - I_1)/I_1 < 0$, т.е. $I_3 < I_1$. Таким образом, в рассмотренном случае у "вытянутого" тела нутации затухают, а у "сплюснутого" — растут.

Наличие интегралов позволяет провести анализ движения вектора кинетического момента. Стационарный режим движения — прецессия вектора кинетического момента вокруг оси подвеса со скоростью прецессии

$$\dot{\sigma} = -\frac{\varepsilon}{4}k\mathfrak{L}_{20}^2\frac{\cos\rho_0}{(1+\chi)^2}\big[4\omega_3(0) - \omega_1(0)\big]. \qquad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что даже в равножестком подвесе из-за токов Лондона может появиться уход гироскопа.

Исследуем движение тела в изотропном подвесе на основе первых интегралов (2.9) и (2.10). Пусть исходный стационарный режим соответствует следующим значениям переменных: $\beta = 0$, $k = k_0$, $\rho = \rho_0$, $\dot{\sigma} = -(3/4)\varepsilon k_0\mathfrak{L}_{20}^2(1+\chi)^{-2}\cos\rho_0\omega(0)$. Предположим, что возникли нутации. Из наличия интегралов следует, что после затухания нутаций возникает новый стационарный режим, характеризуемый переменными $\beta = 0$, $k_H = \sqrt{I_3/I_1}k_0$, $\rho = \rho_H$. Так как $I_3 < I_1$, то в новом стационарном режиме $k_H < k_0$, т.е. ротор затормозится и угол между осью поля и кинетическим моментом уменьшится. Таким образом, изменится не только скорость прецессии, но и раствор конуса прецессии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-01-00612).

Список литературы

[1] *Barnett S.I.* // Rev. Modern Phys. 1935. Vol. 7. P. 129–137.
[2] *Becker R., Sauter F., Holler G.* // Z. Phys. 1935. Bd 85. S. 77–81.
[3] *Hildebrandt A.F.* // Phys. Rev. Lett. 1964. Vol. 12. N 8. P. 190–197.
[4] *Bol M., Fairbank W.M.* // Low Temp. Phys. 1964. Vol. 9. P. 471–474.
[5] *Brinkman N.F.* // Phis. Rev. 1969. Vol. 184. N 2. P. 460–465.
[6] *Hendrichs I.B., King C.A., Roschah H.E.* // J. Low Temp. Phys. 1971. Vol. 4. N 2. P. 202–229.
[7] *Борисов В.В.* // ЖТФ. 1975. Т. 55. № 11. С. 2257–2266.
[8] *Parini G.* // Nuovo Cimento. 1966. Vol. 14. N 1. P. 66–68.
[9] *Веркин Б.И., Кулик Н.О.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 6. С. 2057–2082.
[10] *Буров А.А., Субханкуров Г.И.* // ПММ. 1986. Т. 50. № 6. С. 960–966.
[11] *Егармин Н.Е.* // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: Изд-во МОТИ, 1983. С. 95–96.
[12] *Козлов В.В.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 95–96.
[13] *Самсонов В.А.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
[14] *Урман Ю.М.* // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 6. С. 1402–1404.
[15] *Урман Ю.М.* ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 11. С. 2081–2086.
[16] *Мартыненко Ю.Т.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 386 с.
[17] *Урман Ю.М.* // Респ. межведомственный сб. Киев: Наукова думка, 1983. Вып. 15. С. 75–87.