

## Свойства фазового пространства и бифуркации в комплексной модели Лоренца

© А.Г. Владимиров<sup>1</sup>, В.Ю. Торонов<sup>2</sup>, В.Л. Дербов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет  
Научно-исследовательский институт физики,  
198904 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет,  
410071 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 22 января 1997 г.)

Исследованы геометрическая структура фазового пространства и бифуркации в комплексной модели Лоренца. Показано, что иерархия бифуркаций в одномодовом лазере с отстройкой частоты резонатора от частоты спектральной линии подобна иерархии бифуркаций логистического отображения.

### Введение

Комплексные уравнения Лоренца, или комплексная модель Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= -(1 - i\delta)y + (r - z)x, \\ \dot{z} &= -bz + \frac{1}{2}(x^*y + xy^*), \end{aligned} \quad (1)$$

впервые были введены в работе [1] в качестве обобщения известной модели Лоренца [2,3]. В отличие от последней в комплексной модели Лоренца переменные  $x$  и  $y$  комплексны. Формально эта комплексность возникает благодаря наличию вещественного параметра  $\delta$  и комплексного параметра  $r = r_1 + ir_2$ , отсутствующих в оригинальной модели Лоренца. Важное для нелинейной динамики значение комплексной модели Лоренца состоит в том, что она является универсальной конечномерной аппроксимацией для класса распределенных систем, демонстрирующих так называемую дисперсионную неустойчивость стационарного решения в некоторой точке пространства параметров  $\mu = \mu_c$  [1]. Для таких систем в работе [1] показано, что разложение вектора возмущения стационарного решения по степеням малого параметра  $\varepsilon = (|\mu - \mu_c|)^{1/2}$  в определенном приближении приводит к системе уравнений для коэффициентов разложения, эквивалентной (1). В качестве примера такой системы в [1] была рассмотрена модель бароклинической неустойчивости в атмосфере [4,5].

Будучи амплитудами возмущений относительно пространственно однородного решения исходных дифференциальных уравнений в частных производных, переменные, входящие в (1), в случае бароклинической неустойчивости не имеют наглядной физической интерпретации. Однако существуют системы, для которых переменные комплексной модели Лоренца являются наблюдаемыми величинами. Это — лазеры и мазеры, для которых  $x$  и  $y$  — медленные комплексные амплитуды электрического поля и поляризации среды соответственно, а  $z$  — разность заселенностей уровней энергии рабочего перехода.

В действительности уравнения (1) появились в квантовой электронике задолго до их "открытия" авторами [1] (см., например, [6]). Возможность непосредственного наблюдения переменных делает лазеры наиболее удобным объектом для экспериментальной реализации динамики, ассоциирующийся с комплексной моделью Лоренца. И действительно, результаты экспериментов с одномодовыми лазерами дальнего инфракрасного диапазона оказались в хорошем соответствии с результатами численного интегрирования системы (1) [7]. И хотя уравнения (1) наиболее реалистично описывают лишь этот тип лазеров, они являются простейшей моделью, отражающей такие фундаментальнейшие свойства лазера, как пороговый характер генерации, затягивание частоты и способность генерировать сложные типы колебаний.

Однако, несмотря на многочисленные работы по исследованию комплексной модели Лоренца [1,8–17], она и по сей день остается менее изученной, чем того заслуживает. Исследования этой модели затрагивали в основном анализ частных режимов, чаще всего численными методами. Наиболее глубокие, на наш взгляд, теоретические результаты были получены в работе [10,11], они относятся к анализу устойчивости простейших периодических решений, отвечающих режиму стационарной генерации лазера. Целью данной работы является изучение геометрической структуры комплексной модели Лоренца и некоторых глобальных свойств ее решений, связанных с особенностями этой структуры.

Важным геометрическим свойством комплексной модели Лоренца является ее инвариантность относительно преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} xe^{i\psi} \\ ye^{i\psi} \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\psi$  — произвольная постоянная фаза.

Это преобразование соответствует группе  $U(1)$ , которая действует в подпространстве  $C^2$  полного фазового пространства  $\mathcal{H}$ , относящемся к переменным  $x$  и  $y$ . Чтобы осознать роль  $U(1)$  — симметрии для структуры

предельных множеств в фазовом пространстве комплексной модели Лоренца, достаточно рассмотреть случай  $\delta = r_2 = 0$ . Можно показать [17], что в этом случае любая траектория в  $\mathcal{H}$  притягивается к инвариантной трехмерной гиперповерхности

$$\frac{\operatorname{Re}(x)}{\operatorname{Im}(x)} = \frac{\operatorname{Re}(y)}{\operatorname{Im}(y)} = \operatorname{const}, \quad (3)$$

где постоянная в правой части зависит от начальных условий.

На этой гиперповерхности вещественные и мнимые части  $x$  и  $y$  синхронно меняются во времени, удовлетворяя при этом уравнениям оригинальной модели Лоренца. Однако даже при этих условиях аттракторы оригинальной модели Лоренца и ее комплексного обобщения нетождественны. Действительно, если данная траектория притягивается к данному предельному множеству, лежащему на гиперповерхности, определяемой уравнениями (3), то, согласно свойству симметрии (2), траектория, отличающаяся от данной некоторой общей фазой  $\psi$ , притягивается к множеству, которое является образом данного множества при действии (2) с соответствующей фазой  $\psi$ . Поэтому аттрактор комплексной модели Лоренца в данном случае представляет собой прямую сумму бесконечного числа множеств, изоморфных аттрактору оригинальной модели.

Приведенный пример наглядно демонстрирует более высокую степень сложности структуры фазового пространства комплексной модели Лоренца по сравнению с оригинальной и ту роль, которую в этом усложнении играет симметрия. Однако, как будет показано, симметрия же позволяет упростить задачу. Отметим здесь интересную аналогию между ролью симметрии для физических систем, описываемых комплексной моделью Лоренца, и для квантовых систем, описываемых волновой функцией. Для обоих типов систем общая фаза вектора состояния (для комплексной модели Лоренца имеется в виду вектор с компонентами  $x$  и  $y$ ) не несет информации о физическом состоянии и характеризует лишь результат интерференции данного состояния с некоторым другим. В квантовой механике "лишняя" информация может быть отфильтрована с помощью использования формализма матрицы плотности. При этом если данный вектор состояния в гильбертовом пространстве описывается  $N$  комплексными числами, то соответствующая матрица плотности характеризуется  $2N - 1$  вещественными числами.

Указанная аналогия позволяет применить этот подход к комплексной модели Лоренца. В разделе 1 вводится особое проективное пространство, в котором состояния, различающиеся общей фазой  $\psi$ , рассматриваются как эквивалентные и выводятся уравнения движения для комплексной модели Лоренца в этом пространстве. Там же показано, каким образом вся информация о физическом состоянии системы и эволюции фазы может быть воспроизведена с помощью этих уравнений. В разделе 2 эти уравнения используются для анализа

свойств ограниченности предельных множеств комплексной модели Лоренца в проективном пространстве и показывается, как эти свойства связаны с особенностями фазовой динамики и гомоклинических бифуркаций. В частности, оказывается, что известная для оригинальной модели Лоренца бифуркация рождения гомоклинической "бабочки" в комплексной модели имеет коразмерность, равную двум. На основе этих результатов в разделе 3 для области параметров комплексной модели Лоренца вблизи точки гомоклинической бифуркации строится и анализируется одномерное отображение. Результаты анализа отображения сравниваются с результатами прямого численного исследования бифуркаций.

## 1. Нормальная форма уравнений и проективное пространство

Наряду с переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$  в дальнейшем будет удобно использовать другую систему переменных. Пусть

$$\sigma(r_1 - 1) - \frac{\delta^2}{4} \equiv \eta > 0, \quad b < 2\sigma. \quad (4)$$

Введем замену переменных

$$\begin{aligned} x' &= \eta^{-3/4} ax, & y' &= \eta^{-5/4} \sigma a \left( y - \left( 1 + \frac{i\delta}{2\sigma} \right) x \right), \\ z' &= \eta^{-1} \sigma \left( z - \frac{xx^*}{2} \right), & t' &= t\sqrt{\eta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$a = e^{-i\delta t/2} \sqrt{\frac{2\sigma - b}{2}}.$$

После этой замены, которая подобна предложенной в [18,19] для модели Лоренца, уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= y', & \frac{dy'}{dt'} &= (1 + i\nu)x' - \mu y' - x'z' - \varrho x'|x'|^2, \\ \frac{dz'}{dt'} &= -\beta z' + |x'|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{2r_2\sigma + \delta(\sigma - 1)}{2\eta}, & \mu &= \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\eta}}, \\ \varrho &= \frac{\sqrt{\eta}}{2\sigma - b}, & \beta &= \frac{b}{\sqrt{\eta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Якобиан замены (5) равен  $|a|^4 \sigma^3 / \eta^5$ . Поэтому для  $\eta > 0$  и  $b < 2\sigma$  замена переменных (5) задает взаимнооднозначное и непрерывное отображение (диффеоморфизм) фазового пространства системы (1)  $\mathcal{H}$  на фазовое пространство системы (6)  $\mathcal{H}'$  и векторные поля, задаваемые системами (1) и (6), топологически эквивалентны. Иначе говоря, при выполнении условий, наложенных на значения параметров, динамика системы (6) эквивалентна динамике комплексной модели Лоренца.

Если в (6) пренебречь членом  $-\rho x|x|^2$ , то получим комплексное обобщение уравнений Шимицу–Мориока [19], которые были детально исследованы в [20]. В [21,22] было показано, что в некотором приближении уравнения Шимицу–Мориока также являются нормальной формой уравнений, описывающих хаотическую динамику вблизи бифуркационной точки с тройным нулевым собственным значением, имеющим геометрическую кратность два. Отметим, что в (6) все коэффициенты вещественны, когда  $\nu = 0$ , т.е. когда выполнено условие (30) (см. ниже).

Рассмотрим отображение  $\Pi: \mathcal{H}(x, y, z) \rightarrow \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  — проективное пространство с декартовыми координатами  $u, v, w$  и  $z$

$$u = (|x|^2 - |y|^2)/2, \quad v = \operatorname{Re}(x^*y), \quad w = \operatorname{Im}(x^*y). \quad (8)$$

Идея использовать данное отображение основана на аналогии комплексной модели Лоренца с двухуровневой квантово-механической системой. Если рассматривать переменные  $x$  и  $y$  как компоненты шредингеровского вектора состояния, то соответствующая матрица плотности может быть выражена через линейную комбинацию матриц Паули; при этом  $u, v$  и  $w$  будут коэффициентами этого разложения. Заметим, что

$$|x|^2 = R + u, \quad |y|^2 = R - u, \quad x^*y = v + iw, \quad (9)$$

где

$$R = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = (|x|^2 + |y|^2)/2. \quad (10)$$

Из (9) можно видеть, что переменные  $u, v, w$  и  $z$  содержат всю информацию о состоянии системы в смысле, обсуждавшемся во Введении. Всем точкам  $\mathcal{H}$ , различающимся только общей фазой  $\varphi$   $x$  и  $y$ , отображение  $\Pi$  ставит в соответствие одну и ту же точку в  $\mathcal{P}$ , в то время как образы состояний, различающихся амплитудами и/или разностью фаз  $x$  и  $y$ , различны. Ниже мы будем использовать термин "луч", принятый в геометрии [23] для обозначения множества точек  $\mathcal{H}$ , которым соответствует одна и та же точка  $\mathcal{P}$ , и  $\mathcal{P}$  будем называть "пространством лучей".

Дифференцируя (8) по времени и используя уравнения (1), получим уравнения движения в пространстве лучей

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(\sigma + 1)u + (\sigma - r_1 + z)v - r_2w - (\sigma - 1)R, \\ \dot{v} &= -(\sigma + 1)v - \delta w - (\sigma - r_1 + z)u + (\sigma + r_1 - z)R, \\ \dot{w} &= -(\sigma + 1)w + \delta v + r_2(R + u), \quad \dot{z} = -bz + v. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно образом системы (6) при отображении  $\Pi: \mathcal{H}'(x', y', z') \rightarrow \mathcal{P}'$ , где  $\mathcal{P}'$  — проективное пространство, эквивалентное  $\mathcal{P}$ , является система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= v' + \mu(R' - u') - \nu w' - v'(1 - z' - \rho(R' + u')), \\ \dot{v}' &= -\mu v' + R' - u' + (R' + u')(1 - z' - \rho(R' + u')), \\ \dot{w}' &= -\mu w' + \nu(R' + u'), \quad \dot{z}' = -\beta z' + (R' + u'). \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что множества точек  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}'$ , лежащих на осях  $z$  и  $z'$ , в фазовых пространствах  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$  инвариантны относительно потоков, задаваемых системами уравнений (1) и (6) соответственно. То же относится и к соответствующим множествам точек в пространствах  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$ . Отсюда следует, что множества точек  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{H}'/\mathcal{Z}'$ ,  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{P}'/\mathcal{Z}'$  также инвариантны относительно потоков, задаваемых (1) и (6).

Прежде чем использовать уравнения (11) и (12) вместо (1) и (6), необходимо найти способ получать информацию о движении в  $\mathcal{H}$  из решений уравнений (11). Рассмотрим соотношение между характеристиками динамического состояния системы в  $\mathcal{H}$  и в  $\mathcal{P}$ , такими, как ляпуновские характеристические показатели и фрактальная размерность аттрактора. Для данной траектории  $X_0(t)$  динамической системы  $dX/dt = F(X)$  спектр ляпуновских показателей  $\Lambda_i$  определяется как

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left( \frac{|e_i(t)|}{|e_i(0)|} \right), \quad (13)$$

где  $e_i(t)$  — фундаментальные решения линейной системы уравнений

$$\frac{dY}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X=X_0(t)} Y. \quad (14)$$

Введем локальные координаты  $\xi_i$  в окрестности некоторой  $X_0 \in \mathcal{H}/\mathcal{Z}$

$$\xi_1 = u(x, y), \quad \xi_2 = v(x, y), \quad \xi_3 = w(x, y),$$

$$\xi_4 = z, \quad \xi_5 = \frac{\operatorname{Im}(\langle X_0, X \rangle)}{\langle X_0, X_0 \rangle}. \quad (15)$$

Здесь и далее мы используем бра- и кет-символы для обозначения эрмитовского скалярного произведения, определенного на  $C^2$ . Якобиан преобразования (15) в точке  $X = X_0$  равен  $|x_0|^2 + |y_0|^2 > 0$ , так что (15) есть диффеоморфизм в некоторой окрестности  $X_0$ .

Записывая уравнения (14) для системы (1) в локальных координатах  $\xi(\xi_1, \dots, \xi_5)$ , заданных согласно (15), получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} \left( \hat{A} \right) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi, \quad (16)$$

где  $\hat{A}$  — матрица Якоби для системы уравнений (11), вычисленная в точке  $\Pi(X_0(t))$ .

Из уравнения (16) можно видеть, что матрица  $\hat{A}$  задает эволюцию возмущений, ортогональных к  $\xi_5$  в  $X_0(t)$ , тогда как возмущения вдоль  $\xi_5$  остаются нейтральными. Поскольку (15) — диффеоморфизм, то из (13) и (16) следует, что спектр ляпуновских показателей для траектории в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  отличается от спектра для ее проекции в  $\mathcal{P}$  только наличием одного дополнительного нулевого показателя. В частности, это означает, что если данное множество

в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  есть аттрактор с ляпуновской размерностью  $D_L$ , то его образ в  $\mathcal{P}$  есть аттрактор с ляпуновской размерностью  $D_L - 1$ . Это соотношение справедливо и для фрактальных размерностей предельного множества в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  и его проекции в  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$ . Это следует из того факта, что каждое предельное множество в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  может быть представлено локально (в окрестности данного луча) в виде прямого произведения множества в  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  и луча, т.е. множества  $\mathcal{R}^1$ .

Другая часть физической информации, ассоциирующаяся с траекторией в  $\mathcal{H}$  и, на первый взгляд, отсутствующая в уравнениях (11), — это относительная фаза двух состояний. Правило сравнения фаз двух состояний физической системы, описываемой некоторым комплексным вектором состояния, было введено Панчаратнамом для состояний классического поляризованного света [24], а затем обобщено на случай квантовых систем в [25,26]. Для комплексной модели Лоренца оно может быть сформулировано так: два состояния  $X_1$  и  $X_2$  "синфазны", если норма  $\|X_1 + X_2\|$  максимальна по всем возможным значениям полных фаз  $X_1$  и  $X_2$ . Отметим, что это правило позволяет сравнивать фазы состояний, принадлежащих к различным лучам. Для двух данных лучей значение нормы определяется фазой комплексного числа  $\langle X_1, X_2 \rangle$ . Эта фаза называется фазой Панчаратнама. Основываясь на аналогии между комплексной моделью Лоренца и уравнением Шредингера, в [15] показали, что фаза Панчаратнама естественным образом возникает в задаче о динамике лазера. Обсудим здесь кратко этот вопрос с точки зрения дифференциальной геометрии.

Триплет  $(\mathcal{H}/\mathcal{Z}, \mathcal{P}/\mathcal{Z}, \Pi)$  образует расслоение 2 [23,27], для которого  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  — пространство расслоения,  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  — база, слоем является луч, а структурной группой является группа  $U(1)$ . Отметим, что это расслоение нетривиально, т.е. все пространство  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  не может быть представлено как прямое произведение базы на луч. Уравнение

$$\xi_5 = 0 \quad (17)$$

определяет связность на расслоении. Согласно терминологии, принятой в дифференциальной геометрии, кривая в  $\mathcal{H}$  называется горизонтальной (относительно данной связности), если ее вектор скорости в каждой точке направлен по касательной к поверхности  $\xi_5 = 0$ . Связность, определяемая уравнением (17), обеспечивает единственность горизонтальной кривой в  $\mathcal{H}$ , проецирующейся на данную кривую в  $\mathcal{P}$  и проходящей через заданную точку. В [25,26] для данного типа расслоений и для случая эволюции вектора состояния вдоль горизонтальной траектории (относительно данного типа связности) показано, что фаза Панчаратнама для двух состояний на данной траектории  $X(t)$  может быть выражена в виде

$$\gamma = - \oint_{\Gamma T} A_s ds, \quad (18)$$

где

$$A_s = \text{Im}(\langle X(s)|d/ds|X(s)\rangle) / \langle X(s)|X(s)\rangle, \quad (19)$$

$\Gamma T$  — замкнутый контур в  $\mathcal{H}$ , образованный отрезком  $T$  траектории между двумя состояниями и кривой  $\Gamma$ , проекция которой является геодезической в  $\mathcal{P}$ .

Интеграл в (12) имеет ненулевое значение, если при обходе по замкнутому контуру  $\Gamma T$  в  $\mathcal{P}$  вектор состояния системы в  $\mathcal{H}$  не возвращается в исходную точку. Возможность этого является проявлением нетривиальности расслоения [25,26].

Отметим, что преобразование вида (2), но с зависящим от времени  $\psi$

$$\psi(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau,$$

где  $h(t)$  — некоторая функция времени, переводит (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(\sigma + ih(t))x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -[1 + i(h(t) - \delta)]y + (r - z)x, \\ \dot{z} &= -bz + \frac{1}{2}(x^*y + xy^*), \end{aligned} \quad (20)$$

которая гомеоморфна (1), если  $h(t)$  непрерывно (в лазерном эксперименте  $h(t)$  — отклонение фазы опорного сигнала, используемого в гетеродинных измерениях [7], от монохроматического сигнала с частотой моды пустого резонатора).

Горизонтальная кривая, образом которой является данная траектория в  $\mathcal{P}$ , есть траектория динамической системы (20) с  $h(t) = -\text{Im}(\langle X, F(X)\rangle) / \langle X, X\rangle$ , где  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  — вектор фазовой скорости системы уравнений (1) (см. определение (17)). Из того, что системы (1) и (20) связаны преобразованием (2), следует, что для произвольного  $h(t)$  полный набег общей фазы переменных  $x$  и  $y$  в (20) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_g, \quad (21)$$

где

$$\gamma_d = \int_0^t [h(\tau) + \text{Im}(\langle X, F(X)\rangle) / \langle X, X\rangle] d\tau \quad (22)$$

— динамическая фаза, а геометрическая фаза  $\gamma_g$  определяется формулой (18).

Покажем теперь, что когда  $h(t)$  — заданная функция времени или константа, набег фазы может быть получен из решения системы (11) без обращения к уравнениям (1). Действительно, динамическая фаза определяется интегралом по времени от функции

$$\frac{\text{Im}(\langle X, F(X)\rangle)}{\langle X, X\rangle} = \frac{[\delta(R - u) - (\sigma + r_1 - z)w]}{R},$$

выражающейся через координаты точки в  $\mathcal{P}$ .

Чтобы доказать это для геометрической части, введем в  $\mathcal{P}$  сферические координаты

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta \cos \phi, \quad w = \rho \sin \theta \sin \phi.$$

Отметим, что, согласно (8),  $x = \rho^{1/2} \cos(\theta/2) \times \exp[i(\Theta)]$ ,  $y = \rho^{1/2} \sin(\theta/2) \exp[i(\Theta + \phi)]$ , где  $\Theta$  — общая фаза. Выражая  $A_s$  в (18) через сферические координаты, получим

$$\gamma_g = \oint_{\Gamma} \sin^2(\theta/2) d\phi, \quad (23)$$

где интеграл берется в  $\mathcal{P}$  по контуру, образованному траекторией и геодезической.

Можно видеть, что правая часть (23) есть ни что иное, как половина величины телесного угла, стягиваемого контуром [27].

После этого обсуждения особенностей эволюции фазы становится ясно, что траектория системы в  $\mathcal{H}$ , являющаяся прообразом предельного цикла в  $\mathcal{P}$ , будет замкнутой только в случае специального выбора системы координат (несущего сигнала), определяемого функцией  $h(t)$ . Это согласуется с фактом, следующим из соотношений между размерностями предельных множеств в  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{P}$ , что периодическому аттрактору в  $\mathcal{P}$  должен соответствовать тор в  $\mathcal{H}$ . Проекция тора на предельный цикл — лишь один пример упрощения задачи исследования динамики системы, обеспечиваемого введением проективного пространства  $\mathcal{P}$ . В следующем разделе мы используем представление комплексной модели Лоренца в  $\mathcal{P}$  (11) и в  $\mathcal{P}'$  (12), чтобы выявить некоторые общие свойства ее решений.

## 2. Ограниченность предельных множеств и гомоклиническая бифуркация

Для модели Лоренца известно [2], что все предельные множества траекторий в фазовом пространстве ограничены сферой

$$x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 - K^2(\sigma + r)^2 = 0,$$

где

$$K^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \max(\sigma^{-1}, 1).$$

Покажем, что это свойство сохраняется и для комплексной модели Лоренца, т.е., что предельные множества в  $\mathcal{H}$  ограничены гиперсферой

$$|x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(\sigma + r_1)^2 = 0 \quad (24)$$

с тем же  $K$ , что и для оригинальной модели Лоренца.

Рассмотрим однопараметрическое семейство сфер

$$V_M \equiv |x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - M^2 = 0, \quad (25)$$

где  $M$  — параметр и производные по времени

$$\begin{aligned} \dot{V}_M = & -2\sigma|x|^2 - 2|y|^2 \\ & - 2b \left( z - \frac{\sigma + r_1}{2} \right)^2 + b \frac{(\sigma + r_1)^2}{2}, \end{aligned} \quad (26)$$

поскольку

$$\dot{V}_M|_{V_M=0} = (F, \nabla V_M), \quad (27)$$

где  $F$  — вектор фазовой скорости, траектории на сфере  $V_M = 0$  направлены "внутри" ее или "наружу" соответственно, если правая часть уравнения (26) принимает положительное или отрицательное значения на сфере. Из (26) можно видеть, что эта функция не зависит от параметров  $\delta$  и  $r_2$ . Поэтому можно использовать результат, полученный для модели Лоренца [2] и состоящий в том, что рассматриваемая функция положительна на любой сфере  $V_M = 0$  с радиусом, превосходящим радиус сферы (24).

Уравнение, задающее ограничивающую поверхность для предельных множеств в  $\mathcal{P}$ , соответствующую гиперсфере (24), можно получить, подставляя в (24)  $|x|^2 + |y|^2 = 2R$ , что дает уравнение сфероида

$$S : 2R + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(r_1 + \sigma)^2 = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь гиперповерхность в  $\mathcal{P}$ , заданную уравнением

$$Q(u, v, w, z) \equiv u - \frac{2\sigma}{\delta} w + R = 0. \quad (29)$$

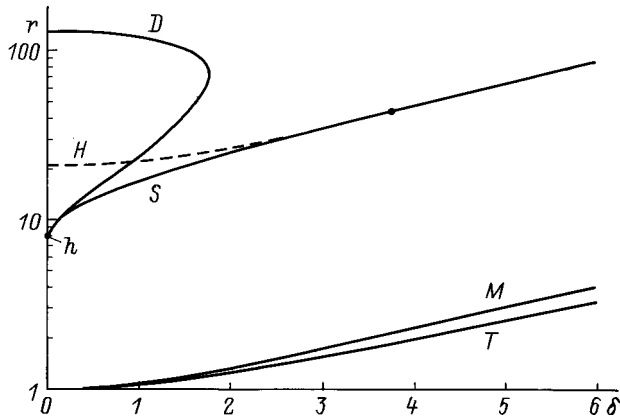
В подпространстве  $\mathcal{R}^3$  переменных  $u, v, w$  уравнение (29) задает двумерный полуконус с вершиной в начале координат, ось симметрии которого направлена вдоль единичного вектора  $(\alpha, 0, \beta)$ , где  $\alpha = (1 + (2\sigma/\delta)^2)^{-1/2}$ ,  $\beta = (2\sigma/\delta)\alpha$ . Косинус угла между осью и образующей конуса равен  $\alpha$ . Для  $\delta > 0$  полуконус находится в полупространстве положительных  $w$ . Для  $\delta = 0$  конус вырождается в плоскость  $w = 0$ . При  $\delta < 0$  поверхность расположена в области отрицательных  $w$ . В пространстве  $\mathcal{P}'$  поверхности  $Q = 0$  соответствует гиперплоскость

$$w' = 0.$$

При этом  $Q > (<) 0$  соответствует  $w' > (<) 0$ . Из (12) видно, что при  $w' = 0$ ,  $\dot{w}' = \nu(R' + u') = \nu|x'|^2$ . Таким образом,  $\dot{w}'$  неотрицательно при  $\nu > 0$  и неположительно при отрицательном  $\nu$ . Поэтому для  $\nu > (<) 0$  траектории на поверхности касательны к ней или направлены в сторону области  $\mathcal{P}$ , где  $Q > (<) 0$  ( $w' > (<) 0$  в  $\mathcal{P}'$ ).

Как следует из (12), поверхность (29) глобально устойчива и инвариантна относительно потока для  $\nu = 0$ . Это условие может быть переписано в виде

$$r_2 = r_{2c} = \delta \frac{1 - \sigma}{2\sigma}. \quad (30)$$



Бифуркационная диаграмма для системы уравнений (11) на плоскости параметров  $(\delta, r)$ ;  $\sigma = 3, r_2 = 0, b = 1/9$ . Значения параметра  $r$  отложены в логарифмическом масштабе;  $T$  — граница устойчивости "тривиального" состояния равновесия,  $H$  — кривая бифуркации Хопфа,  $S$  — кривая седлоузловой бифуркации,  $D$  — кривая бифуркации удвоения периода,  $M$  — кривая  $\sigma(r-1) - \delta^2/4 = 0$ .

Покажем, что для  $r_2 > (<) r_{2c}$  всякая траектория, начинающаяся в области  $Q < (>) 0$  ( $w' < (>) 0$ ), стремится к области, где  $Q \geq (<=) 0$  ( $w' \geq (<=) 0$ ). Пусть  $r_2 > r_{2c}$  ( $\nu > 0$ ). Рассмотрим семейство гиперплоскостей в  $\mathcal{P}$ :  $w' = C < 0$ . Как видно из (12), при  $(\nu > 0)$  на этих поверхностях  $w' > 0$  (так как  $\mu$  всегда положительно). Поэтому всякая траектория, идущая из области  $w' < 0$  ( $Q < 0$ ), последовательно пересекает каждую из этих поверхностей и в конце концов оказывается на поверхности  $w' = 0$  ( $Q = 0$ ) или в области  $w' > 0$  ( $Q > 0$ ). Точнее, существует множество траекторий, имеющее меру нуль, которые стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$  (см. ниже). Все остальные траектории рано или поздно приходят в область  $w' > 0$  ( $Q > 0$ ).

Чтобы показать, что при  $r_2 < r_{2c}$  каждая траектория стремится к множеству точек в  $\mathcal{P}$ , для которых  $Q \leq 0$  ( $w' \leq 0$ ), следует рассмотреть семейство поверхностей  $w' = C > 0$ . Поскольку это легко сделать, следуя тем же путем, что и для  $r_2 > r_{2c}$ , мы опускаем это доказательство.

Рассмотрим теперь некоторые важные следствия существования ограничивающей поверхности  $Q = 0$ . Во-первых, отметим, что для лазера ( $r_2 = 0$ ) все аттракторы расположены в той области  $\mathcal{P}$ , где  $Q \geq 0$  для  $\delta > 0$ , и в симметричной области для  $\delta < 0$  (см. рисунок). Если ограничиться подпространством переменных  $(u, v, w)$ , это — область телесного угла  $\Omega$ , охватываемого полуконусом  $Q = 0$ . Поэтому для траектории, принадлежащей некоторому аттрактору, телесный угол, охваченный контуром ГТ (см. (18)), не превосходит  $\Omega$ . В пределе  $\delta \rightarrow \pm 0$  конус превращается в инвариантную относительно потока плоскость  $w = 0$ , которая при этом глобально устойчива, так что телесный угол, соответствующий ГТ, стремится к предельному

значению  $\pm 2\pi$ . Это объясняет резонансный скачок среднего наклона фазы поля лазера на величину, равную характерной средней частоте пульсаций интенсивности  $\frac{2\pi}{\tau}$  ( $\tau$  — средний период пульсаций интенсивности, совпадающий со средним временем обхода изображающей точки вокруг начала координат на плоскости  $w = 0$ ). Интересно отметить, что этот скачок был впервые найден в численных расчетах [13] и интерпретирован как проявление геометрической фазы в динамике лазера на основе численного анализа поведения траекторий в пространстве лучей [16].

Другим следствием существования ограничивающей поверхности  $Q = 0$  ( $w' = 0$ ) является дополнительное ограничение на значения параметров системы, соответствующие гомоклинической бифуркации. Известно, что очень важной структурой, отвечающей за формирование хаотического множества траекторий в оригинальной модели Лоренца, являются негрубые гомоклинические петли сепаратрис [3]. Поскольку комплексная модель Лоренца включает оригинальную модель Лоренца как частный случай при  $\delta = 0$  и  $r_2 = 0$ , то соответствующие гомоклиники также имеют место и в комплексной модели. Необходимым условием их существования является пересечение устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седла, расположенного в начале координат [28,29].

Локальная структура инвариантных многообразий вблизи седла может быть получена из линейного анализа уравнений (1) или (6) в окрестности решения  $x = y = z = 0$  ( $x' = y' = z' = 0$ ).

"Тривиальное" решение уравнений (6)  $x' = y' = z' = 0$  неустойчиво и является седлом, когда

$$r_1 > 1 + \frac{\delta^2 - r_2\sigma + \delta r_2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)^2}.$$

Его собственные значения суть

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\mu}{2} + \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4} + i\nu}, \\ \lambda_2 &= -\frac{\mu}{2} - \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4} + i\nu}, \\ \lambda_3 &= -\beta, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\mu, \nu$  и  $\beta$  определены в (7).

Им соответствуют собственные векторы

$$V_1 = N_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = N_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $N_{1,2} = \sqrt{1 + |\lambda_{1,2}|^2}$ .

Как следует из (31), для достаточно малых  $\nu$  мы имеем  $\text{Re}\lambda_1 > 0, \text{Re}\lambda_2 < 0$  и  $\lambda_3 < 0$ . Кроме того, для  $\nu > 0$

$$\text{Im}\lambda_1 = -\text{Im}\lambda_2 > 0. \quad (32)$$

Мы рассмотрим только случай, когда  $|\lambda_3| < |\operatorname{Re}\lambda_2|$ , так как он соответствует возможности реализации аттрактора Лоренца.

Координаты точек пространства  $\mathcal{P}'$ , принадлежащие неустойчивому  $E^u = \operatorname{span}\{V_1\}$  и устойчивому  $E^s = \operatorname{span}\{V_2, V_3\}$ , линейным подпространствам, удовлетворяют уравнениям

$$E^u: \quad y' = x'\lambda_1, \quad z' = 0,$$

$$E^s: \quad y' = x'\lambda_2.$$

Неустойчивое (устойчивое) многообразие  $W^u$  ( $W^s$ ) начала координат касательно к  $E^u$  ( $E^s$ ) в  $x' = y' = z' = 0$ . Поскольку ось  $z'$  инвариантна относительно потока и принадлежит  $W^s$ , то точки этих многообразий, лежащие в шаре малого радиуса  $\varepsilon$ , удовлетворяют уравнениям

$$W_{\text{loc}}^u: \quad y' = x'\{\lambda_1 + 0(\varepsilon)\}, \quad z' = 0(\varepsilon^2) \quad (33)$$

и

$$W_{\text{loc}}^s: \quad y' = x'\{\lambda_2 + 0(\varepsilon)\}. \quad (34)$$

Рассмотрим проекции инвариантных многообразий  $W^u$  и  $W^s$  на  $\mathcal{P}'$ . Будучи инвариантными относительно потока, они должны переходить в себя и под действием группы  $U(1)$ . Поэтому  $\Pi$  отображает  $W^s$  и  $W^u$  соответственно на двумерное и одномерное многообразия в  $\mathcal{P}'$ . Из (8) с заменой  $x, y, z, w$  на  $x', y', z', w'$  (33) и (34) получим

$$\begin{aligned} w'|_{\Pi(W_{\text{loc}}^u)} &= |x'|^2 \{\operatorname{Im}\lambda_1 + 0(\varepsilon)\}, \\ w'|_{\Pi(W_{\text{loc}}^s)} &= |x'|^2 \{\operatorname{Im}\lambda_2 + 0(\varepsilon)\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Учитывая (32), приходим к выводу, что для  $\nu > 0$  все точки  $\Pi(W_{\text{loc}}^u)$  лежат в полупространстве  $w' \geq 0$ . Далее, из формального решения третьего уравнения системы (12)

$$w'(t') = w'(0) + \nu e^{-\mu t'} \int_0^{t'} (R'(s) + u'(s)) ds \quad (36)$$

заключаем что вообще все точки  $\Pi(W^u)$  лежат в этом полупространстве. Действительно, так как в (36) под интегралом стоит неотрицательная величина,  $w'(t')$  всегда неотрицательно, если  $w'(0) > 0$ . При этом, как следует из (35), все точки  $\Pi(W_{\text{loc}}^s)$ , за исключением точек оси  $z'$ , лежат в полупространстве  $w' < 0$ . Следовательно,  $\Pi(W^u)$  и  $\Pi(W_{\text{loc}}^s)$  могут пересекаться только на оси  $z'$ . Однако это невозможно, так как эта ось не принадлежит  $W^u$ . Поэтому для  $\nu > 0$  уравнения (1) и (6) не допускают траекторий, двоякоасимптотических к началу координат. Используя свойство инвариантности системы (12) относительно замены

$$\nu \rightarrow -\nu, \quad w' \rightarrow -w' \quad (37)$$

и следуя тем же путем, можно легко показать, что такие траектории не могут существовать и при  $\nu < 0$ . Итак,  $\nu = 0$  или

$$r_2 = \frac{\delta(1 - \sigma)}{2\sigma}$$

есть необходимое условие существования гомоклинической "бабочки" Лоренца.

### 3. Одномерное отображение

Пусть при  $\nu = 0$

$$k = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} < 1,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  определены в (31).

Это неравенство соответствует случаю, когда при  $\delta = r_2 = 0$  после разрушения "бабочки" возникает странное инвариантное множество. В оригинальной модели Лоренца соответствующая бифуркация описывается одномерным отображением [30]

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \operatorname{sign}\xi(-\varepsilon_1 + \operatorname{sign}A|\xi|^k), \\ 0 < |\xi| &\ll 1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \ll 1, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\xi$  — вещественная переменная,  $A$  — сепаратрисная величина,  $\varepsilon_1$  описывает малое отклонение от точки гомоклинической бифуркации в пространстве параметров (в дальнейшем будем полагать, что  $A$  положительно).

Построим подобное отображение для комплексной модели Лоренца. Пусть в (6)  $x', y'$  комплексны и  $\nu = 0$ . Тогда, как было показано выше, предельное множество траекторий системы принадлежит глобально-устойчивой гиперповерхности  $x'^*y' - x'y'^* = w = 0$ . Решение, отвечающее всякой траектории на этой гиперповерхности, имеет вид  $(x'(t')e^{i\psi}, y'(t')e^{i\psi}, z'(t'))$ , где  $(x'(t'), y'(t'), z'(t'))$  — решение системы (6) при вещественных  $x'$  и  $y'$ ;  $\psi$  — постоянная, зависящая от начальных условий. Это позволяет записать отображение для комплексных  $x'$  и  $y'$  (при  $\nu = 0$ )

$$\xi \rightarrow e^{i \arg \xi} (-\varepsilon_1 + |\xi|^k). \quad (39)$$

Здесь в отличие от (38)  $\xi$  комплексно и  $A$  положено равным единице, что возможно благодаря перенормировке  $\xi$ . Замена переменных (8) преобразует гомоклиническую "бабочку" в одну гомоклиническую петлю в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ . Одномерное отображение, описывающее динамику системы в окрестности этой петли в пространстве  $\mathcal{P}$ , можно получить из (39)

$$\Xi \rightarrow (-\varepsilon_1 + \Xi^{k/2})^2, \quad 0 < \Xi \ll 1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \ll 1. \quad (40)$$

Здесь  $\Xi = |\xi|^2$ . Как и (39), отображение (40) справедливо только при  $\nu = 0$ . При  $\nu \neq 0$  имеем

$$\Xi \rightarrow G(\Xi, \varepsilon_1, \nu), \quad 0 < \Xi \ll 1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \ll 1, \quad (41)$$

где  $G(\Xi, \varepsilon_1, 0) = (-\varepsilon_1 + \Xi^{k/2})^2$ .

Предполагая, что для малых  $\Xi$  и  $\varepsilon_1$  существует производная

$$G_{\nu\nu}(\Xi, \varepsilon_1, 0) = \left( \frac{\partial^2 G(\Xi, \varepsilon_1, \nu)}{\partial \nu^2} \right)_{\nu=0},$$

для малых  $\nu$  из (41) получим

$$\Xi \rightarrow G(\Xi, \varepsilon_1, 0) + \frac{\nu^2}{2} G_{\nu\nu}(\Xi, \varepsilon_1, 0) + 0(\nu^4), \quad (42)$$

где  $G(\Xi, \varepsilon_1, 0)$  определено в (40).

Благодаря свойству симметрии (37) системы (12) в (42) отсутствуют линейные и кубические по  $\nu$  члены. Поскольку  $\Xi, \varepsilon_1 \ll 1$ , то можно пренебречь зависимостью  $G_{\nu\nu}(\Xi, \varepsilon_1, 0)$  от  $\Xi$  и  $\varepsilon_1$ . Тогда, опуская малые члены порядка  $0(\nu^4)$  в (42), получаем отображение

$$\begin{aligned} \Xi &\rightarrow (-\varepsilon_1 + \Xi^{k/2})^2 + \varepsilon_2^2, \\ 0 &\ll \Xi \ll 1, \quad 0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\varepsilon_2^2 = (\nu^2/2)G_{\nu\nu}(0, 0, 0)$ .

Так как переменная  $\Xi$  неотрицательна, то  $G(\Xi, \varepsilon_1, \nu) \geq 0$  и  $G(0, 0, 0) = 0$ , и, следовательно, имеем  $G_{\nu\nu}(0, 0, 0) \geq 0$ . Будем полагать, что  $G_{\nu\nu}(0, 0, 0) > 0$ . Заметим, что точка  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  соответствует гомоклинической бифуркации коразмерности 2, а параметр  $\varepsilon_2$  пропорционален малой величине  $\nu$ . Подстановка

$$\begin{aligned} \Xi &= \varepsilon_1^{2/k} \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{k^2} (1 - 2\zeta) \varepsilon_1^{2(1-k)/k} \right\} \\ \text{и} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_1^{1/k} \left\{ 1 + \frac{\lambda(2-\lambda)}{2k^2} \varepsilon_1^{2(1-k)/k} \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

в (43) приводит к логистическому отображению

$$\zeta \rightarrow \lambda\zeta(1-\zeta) + 0(\varepsilon_1^{2(1-k)/k}).$$

Таким образом, бифуркации в отображении (43) подобны бифуркациям логистического отображения. Более того, в малой окрестности точки бифуркации коразмерности 2 ( $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ) можно получить асимптотические выражения для бифуркационных множеств отображения (43), подставляя бифуркационные значения параметра  $\lambda$  логистического отображения в уравнение (44). В частности, первые две бифуркации логистического отображения суть седлоузловая ( $\lambda = 1$ ) и удвоения периода ( $\lambda = 3$ ). Асимптотические выражения для бифуркационных кривых, отвечающих этим бифуркациям на плоскости параметров  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , соответственно

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{1/k} \left\{ 1 + \frac{1}{2k^2} \varepsilon_1^{2(1-k)/k} + 0(\varepsilon_1^{4(1-k)/k}) \right\} \quad (45)$$

и

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{1/k} \left\{ 1 - \frac{3}{2k^2} \varepsilon_1^{2(1-k)/k} + 0(\varepsilon_1^{4(1-k)/k}) \right\}. \quad (46)$$

Чтобы проверить выводы, полученные с помощью одномерного отображения (43), мы численно построили несколько бифуркационных кривых для комплексной модели Лоренца с вещественным  $r$ , что соответствует модели одномодового лазера. Эти кривые на плоскости  $(\delta, r)$  показаны на рисунке. Выше кривой  $M$  ( $\sigma(r_1 - 1) - \delta^2/4 = 0$ ) выполнены неравенство (4), которое позволяет заменить систему (1) системой (6). Кривая  $T$  показывает границу устойчивости "тривиального" стационарного решения  $x' = y' = z' = 0$ , которое

неустойчиво выше этой кривой. Точка  $h$  соответствует гомоклинической бифуркации коразмерности 2. Как следует из идентичности полученного одномерного отображения логистическому, эта точка должна быть предельной для бесконечного числа бифуркационных кривых. И действительно, показанные на рисунке некоторые из этих кривых, идут в точку  $h$ . Кривая  $S$  соответствует седлоузловой бифуркации (45). При пересечении этой кривой параметрическим вектором справа в проективном пространстве  $\mathcal{P}$  возникают два предельных цикла, один из которых устойчив, а второй неустойчив. При дальнейшем уменьшении параметра  $\delta$  устойчивый предельный цикл испытывает серию бифуркаций удвоения периода, завершающуюся переходом к хаосу. Численный анализ показывает, что соответствующие кривые (кривая  $D$  на рисунке соответствует первой бифуркации удвоения) сходятся в точке  $h$ . Этот результат находится в полном соответствии с результатами, основанными на анализе полученного выше отображения (43). Кривая  $H$  на рисунке соответствует бифуркации Хопфа "ненулевого" стационарного решения уравнений движения в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ . Штриховая линия обозначает субкритическую часть кривой, сплошная — суперкритическую. Отметим, что пересечение кривой  $H$  с осью  $r$  соответствует субкритической бифуркации Хопфа, которая, как хорошо известно, имеет место в оригинальной модели Лоренца.

## Заключение

Мы показали, что все динамические свойства системы, включая особенности фазовой динамики, могут быть получены непосредственно из представления комплексной модели Лоренца в пространстве лучей. Отметим, что это представление не содержит сингулярностей для каких-либо значений параметров в отличие от аналогичного, использовавшегося в [10], и дает эффективный и простой метод изучения свойств комплексной модели Лоренца. Установлено соответствие между свойствами предельных множеств в исходном фазовом пространстве и в пространстве лучей, выявлены свойства ограниченности предельных множеств в этих пространствах. Показано, что эти свойства ответственны за сингулярное поведение кривой среднего наклона фазы поля лазера как функции отстройки, наблюдавшееся до этого в численном эксперименте [13]. Доказано, что гомоклиническая бифуркация сепаратрисы седла в комплексной модели Лоренца имеет коразмерность, равную двум. Для значений параметров, близких к точке гомоклинической бифуркации, построено одномерное отображение для точек фазового пространства вблизи сепаратрисы. При  $r_2 \neq r_{2c}$  (см. (30)) построенное отображение (в отличие от отображения Лоренца) является гладким и эквивалентно логистическому. Этот результат свидетельствует в пользу того, что "истинный" аттрактор Лоренца, который содержит только седловые предельные циклы, может



существовать в комплексной модели Лоренца только при  $r_2 = r_{2c}$ . Численно показано соответствие между иерархией бифуркаций в модели одномодового лазера на плоскости параметров накачка–отстройка и последовательностью бифуркаций логистического отображения.

В.Ю. Торонов и В.Л. Дербов были поддержаны грантом Госкомвуза РФ № 94-2.7-1097.

## Список литературы

- [1] *Gibbon J.D., McGuinness M.J.* // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 108–122.
- [2] *Lorenz E.N.* // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130–141.
- [3] *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. New York; Heidelberg; Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 269.
- [4] *Phillips N.A.* // Rev. Geophys. 1963. Vol. 1. P. 123–176.
- [5] *Pedlosky J.* // J. Atmos. Sci. 1979. Vol. 36. P. 1908–1924. Pedlosky J., Frenzen C. // Ibid. 1980. Vol. 37. P. 1177–1196; Pedlosky J. // Ibid. 1981. Vol. 38. P. 717–731. Ibid. 1983. Vol. 40. P. 1863–1876. Klein P., Pedlosky J. // Ibid. 1986. Vol. 43. P. 1243–1262.
- [6] *Ораевский А.Н.* // РГЭ. 1959. Т. 4. С. 718–721.
- [7] *Tang D.Y., Weiss C.O.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 1296–1300. Tang D.Y., Li M.Y., Weiss C.O. // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 7597–7604. Weiss C.O., Abraham N.B., Hubner U. // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 1587–1590.
- [8] *Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J.* // Physica D. 1982. Vol. 4. P. 139–163. Gibbon J.D., McGuinness M.J. // Ibid. 1982. Vol. 5. P. 108–122. Fowler A.C., McGuinness M.J. // SIAM. J. Appl. Math. 1984. Vol. 44. N 4. P. 681–700.
- [9] *Zeglache H., Mandel P.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol. 2. P. 18–22.
- [10] *Ning C., Haken H.* // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 3826–3837.
- [11] *Ning C., Haken H.* // Z. Phys. B. 1990. Vol. 81. P. 457–461.
- [12] *Vilaseca R., Valcarcel G.J. de, Roldan E.* // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 5269–5272.
- [13] *Roldan E. et al.* // Phys. Rev. A. 1993. Vol. 48. P. 591–598.
- [14] *Ning C.Z., Haken H.* // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 2109–2112.
- [15] *Toronov V., Derbov V.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 1392–1399.
- [16] *Toronov V., Derbov V.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50. P. 878–881.
- [17] *Ораевский А.Н., Торонов В.Ю.* // Квантовая электроника. 1989. Т. 16. С. 2063–2069.
- [18] *Юдович В.И.* Деп. в ВИНТИ. Ростов-на-Дону, 1978. № 2611-78. 49 с.
- [19] *Shimizu T., Morioka N.* // Phys. Lett. A. 1980. Vol. 76. P. 201–204.
- [20] *Shil'nikov A.L.* // Selecta Math. Sovietica. 1991. Vol. 10. P. 105–117. Physica D. Vol. 62. P. 332–346.
- [21] *Vladimirov A.G., Volkov D.Yu.* // Opt. Commun. 1993. Vol. 100. P. 351–355.
- [22] *Rucklidge A.M.* // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 323–338.
- [23] *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. New York: Interscience, 1969.
- [24] *Pancharatnam S.* // Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. A. 1956. Vol. 44. P. 247–255.
- [25] *Samuel J., Bhandari R.* // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 2339–2342.
- [26] *Anandan J., Aharonov Y.* // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 1697–1701.
- [27] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Л.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.
- [28] *Шильников Л.П.* // Мат. сборник. 1968. Т. 35. С. 240–264.
- [29] *Шильников Л.П.* // УМН. 1981. Т. 36. С. 240–242.
- [30] *Shil'nikov L.P.* // Diff. Eq. 1981. N 11. P. 180–185.