Журнал технической физики, 1998, том 68, № 7

01;03

Устойчивость заряженных капель сфероидальных форм по отношению к осесимметричным деформациям

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, С.И. Щукин

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 1997 г.)

Исследуется устойчивость сильно заряженной сферической капли по отношению к деформациям ее формы к вытянутому и сплюснутому сфероидам. Показано, что капля может потерять устойчивость и распасться на части при условии, что ее виртуальная форма есть вытянутый сфероид. Деформация капли к сплюснутому сфероиду не приводит к ее распаду.

Введение

Исследование устойчивости сильно заряженных капель по отношению к малым деформациям представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в физике, геофизике, научном приборостроении и технологии [1,2]. Согласно [3,4], наиболее легко возбуждается неустойчивость основной осесимметричной моды капли $\sim \pm P_2(\cos\theta)$, соответствующей деформации исходной сферической капли к вытянутому или сплюснутому сфероидам ($P_2(\cos\theta)$ — полином Лежандра). Это подтверждается и результатами натурных измерений в облаках. Так, в [5] сообщается, что при фотографировании во взаимно перпендикулярных направлениях двумя камерами 1783 капель сферическая форма отмечена в 569 случаях, вытянутая сфероидальная — в 496, сплюснутая сфероидальная — в 331. Согласно численным расчетам [6], форма взвешенной в атмосфере капли зависит от ее размеров и может быть как сферической, так и сфероидальной. В связи с этим представляется целесообразным исследовать вопрос о зависимости изменения потенциальной энергии заряженной капли при виртуальных деформациях к формам вытянутого и сплюснутого сфероидов от амплитуды деформации (от эксцентриситета сфероида) и величины заряда на капле. Следует отметить, что подобная задача решалась и раньше [7]. Однако в [7] анализ проводился лишь для слабо сфероидальных капель, основывался на методе разложения по малому параметру, в качестве которого выбиралась величина характерной деформации, и результаты, полученные в [7], носят частный характер, а основным итогом [7] следует считать постановку проблемы.

1. Пусть первоначально сферическая капля радиуса R с коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющая заряд Q, претерпевает виртуальную деформацию к вытянутому сфероиду с эксцентриситетом e. Потенциальная энергия такой сфероидальной капли U будет состоять из энергии сил поверхностного натяжения и энергии электрического поля собственного заряда [7,8]

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad b = R(1-e^2)^{1/6}, \quad a = R(1-e^2)^{-1/3},$$

$$U = \frac{e\sqrt{1-e^2} + \arcsin(e) + \operatorname{arccos} h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)\sqrt{1-e^2}W}{(1-e^2)^{1/6}e(W+2)}, \tag{1}$$

a и b — бóльшая и меньшая полуоси сфероида, параметр Рэлея $W = Q^2/(4\pi R^3\sigma)$ характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду; капля становится неустойчивой при $W \geqslant 4$ [3]; энергия U обезразмерена на потенциальную энергию исходной сферической капли U_0

$$U_0 = 4\pi R^2\sigma + \frac{Q^2}{2R}. \tag{2}$$

На рис. 1 приведена рассчитанная по (1) зависимость $U = U(W, e)$. Из него видно, что при закритических по Рэлею значениях параметра W (при $W > 4$) потенциальная энергия капли уменьшается с увеличением эксцентриситета, проходит через минимум при $e \approx 0.9$ и затем быстро растет с дальнейшим увеличением e. На рис. 2 кривой *1* представлена зависимость между параметром W и эксцентриситетом e, соответствующая постоянной энергии капли $U = 1$.

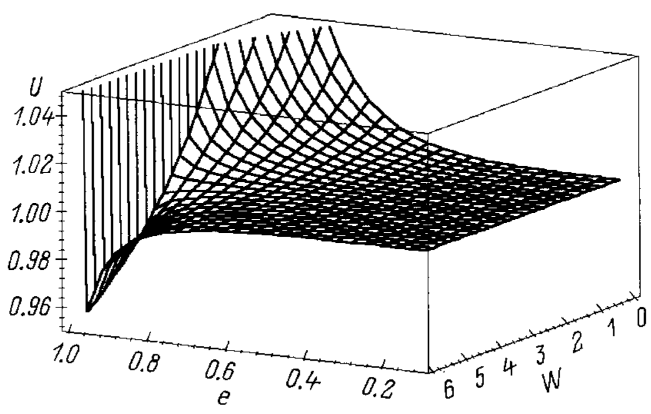

Рис. 1. Зависимость энергии заряженной капли U, имеющей форму вытянутого сфероида, от величины параметра Рэлея W и эксцентриситета капли e.

Кривой *2* на том же рисунке нанесена аналогичная зависимость, полученная из условия $\partial U/\partial e = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = -\frac{1}{3}\Bigg[2e^3 - 4\frac{e^2\arcsin(e)}{\sqrt{1-e^2}} - 3We - \operatorname{arccos}h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)We^2 - 3e + 3\frac{\arcsin(e)}{\sqrt{1-e^2}} + 3\operatorname{arccos}h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)W\Bigg] \times \left[e^2(1-e^2)^{2/3}(W+2)\right]^{-1}. \quad (3)$$

Кривая *2* связывает значения W и e, соответствующие экстремальному изменению потенциальной энергии деформируемой капли в реальном (в соответствии с принципом наименьшего действия) процессе деформации.

Кривая *3* на рис. 2 получена из условия $\partial^2 U/\partial e^2 = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e^2} = -\frac{1}{9}\Bigg[2e^5 - 28\frac{e^4\arcsin(e)}{\sqrt{1-e^2}} - 4W \times \operatorname{arccos}h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)e^4 - 24We^3 - 27e^3 + 18We + 39\frac{e^2\arcsin(e)}{\sqrt{1-e^2}} + 30\operatorname{arccos}h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)We^2 + 18e - 18\frac{\arcsin(e)}{\sqrt{1-e^2}} - 18\operatorname{arccos}h\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)W\Bigg] \times \left[(W+2)e^3(1-e^2)^{5/3}\right]^{-1} \quad (4)$$

и разделяет плоскость (W, e) на две области: значения W и e, соответствующие геометрическому месту точек, расположенных выше кривой *3*, характеризуют неустойчивое состояние вытянутой сфероидальной капли, ниже нее все состояния (W, e) соответствуют устойчивым

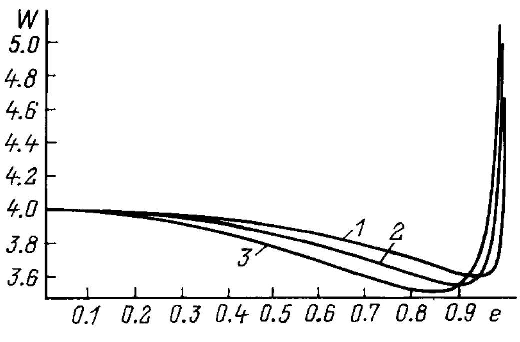

Рис. 2. Зависимости между параметром Рэлея W и эксцентриситетом вытянутой сфероидальной капли e, полученные из условий $U = 1$, $\partial U/\partial e = 0$ и $\partial^2 U/\partial e^2 = 0$ (*1–3* соответственно).

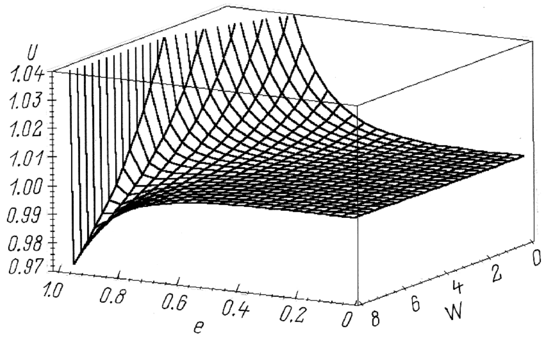

Рис. 3. Зависимости энергии заряженной капли U, имеющей форму сплюснутого сфероида, от величины параметра Рэлея W и эксцентриситета e.

сфероидальным формам, из которых капля обратимо возвращается к исходной сферической форме. Таким образом, заряженная капля при виртуальной деформации к вытянутому сфероиду может распасться лишь в области значений (W, e) на рис. 2, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e^2} \geqslant 0, \quad \frac{\partial U}{\partial e} \geqslant 0. \quad (5)$$

Из рис. 2 видно, что это условие выполняется лишь при весьма значительных деформациях: $e \geqslant 0.9$. Каков же будет распад — на две части сравнимых размеров [9] или с эмиссией большого количества высокодисперсных сильно заряженных капелек [10], в используемой идеализации сказать невозможно, это будет зависеть от вязкости и электропроводности капли и внешней среды [11,12].

2. Повторяя вышеприведенные рассуждения для заряженной капли, имеющей форму сплюснутого сфероида, несложно найти выражение для ее потенциальной энергии [7,8]

$$U = \frac{1}{2}\left[2e + \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)e^2 + 2\sqrt{1-e^2} \times \arccos(\sqrt{1-e^2})W\right]\left[e(1-e^2)^{1/3}(W+2)\right]^{-1},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}, \quad a = \frac{R}{(1-e^2)^{1/6}}, \quad c = R(1-e^2)^{1/3}, \quad (6)$$

где a — бóльшая, c — меньшая полуоси сфероида.

На рис. 3 приведена рассчитанная по (6) зависимость потенциальной энергии сплюснутой сфероидальной капли от параметра Рэлея W и эксцентриситета e. Несложно видеть, что она качественно сходна с аналогичной зависимостью для вытянутого сфероида, приведенной на рис. 1.

На рис. 4 кривой *1* представлена зависимость между W и e, соответствующая постоянной энергии капли $U = 1$. Кривая *2* на том же рисунке — зависимость между параметром Рэлея W и эксцентриситетом e, соответствующая экстремальному изменению потенциальной энергии или реальному процессу деформации капли в силу принципа наименьшего действия, полученная из условия $\partial U/\partial e = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = -\frac{1}{6}\Big\{(6-10e^2+4e^4)W\arccos(\sqrt{1-e^2}) + (-e^4-2e^2+3)\sqrt{1-e^2}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + 6(-1+e^2)\sqrt{1-e^2}e(W+1) - 4\sqrt{1-e^2}e^3\Big\} \times\Big[e^2(W+2)(1-e^2)^{11/6}\Big]^{-1}. \quad (7)$$

Кривой *3* на рис. 4 показана зависимость между W и e, полученная из условия $\partial^2U/\partial e^2 = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e^2} = \frac{1}{9}\Big[(10e^4-33e^2+18)\sqrt{1-e^2}W\arccos(\sqrt{1-e^2}) + (e^6+11e^4-21e^2+9)\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + (-21e^5-18e+39e^3)W - 2e^5+36e^3-18e)\Big] \times\Big[e^3(W+2)(1-e^2)^{1/3}(-1+e^2)^2\Big]^{-1}. \quad (8)$$

Геометрическое место точек (W, e), расположенных ниже кривой *3*, соответствует состояниям сплюснутой сфероидальной капли, из которых она возвращается к исходной сферической форме. Поскольку все точки кривой *2*, вдоль которой изменяются W и e при реальной деформации капли, расположены ниже кривой *3*, то распада заряженной капли при симметричных деформациях к сплюснутому сфероиду не происходит. Это обстоятельство на основе иных исходных посылок отмечалось ранее в [13]. Распад заряженной сплюснутой сфероидальной капли может иметь место только при ее несимметричных деформациях [14].

3. На рис. 5 приведена зависимость потенциальной энергии вытянутой сфероидальной капли (при $e^2 > 0$) и сплюснутой сфероидальной капли (при $e^2 < 0$) от квадрата эксцентриситета e^2 при фиксированных значениях параметра Рэлея $W = \text{const}$. Несложно видеть, что при качественном сходстве поведения зависимости $U = U(e)$ для сплюснутого и вытянутого сфероидов минимум функции $U = U(e)$ для вытянутого сфероида гораздо более глубокий, что и объясняет различие в вероятности наблюдения в натурных измерениях капель сплюснутых и вытянутых сфероидальных форм [5].

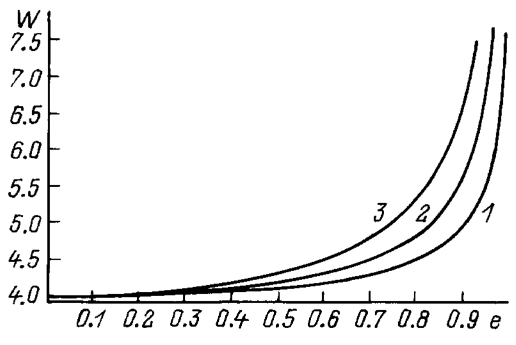

Рис. 4. Зависимости между параметром Рэлея W и эксцентриситетом сплюснутой сфероидальной капли e, полученные из условий: $U = 1$, $\partial U/\partial e = 0$ и $\partial^2U/\partial e^2 = 0$ (*1–3* соответственно).

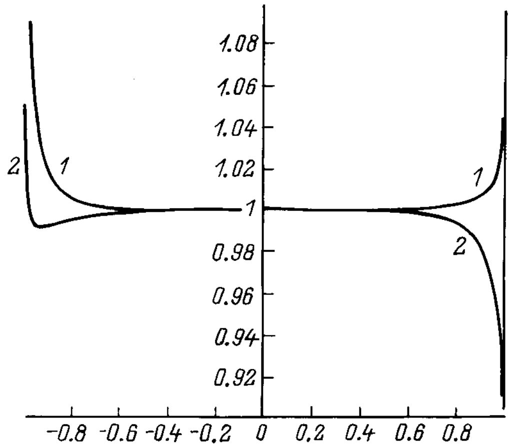

Рис. 5. Зависимость энергии сфероидальных капель U сплюснутой ($e^2 < 0$) и вытянутой форм ($e^2 > 0$) от квадрата эксцентриситета e^2 при $W = 3$ (*1*), 6 (*2*).

Заключение

Анализ на основе принципа минимальности потенциальной энергии изолированной заряженной капли показывает, что сферические сильно заряженные капли, деформирующиеся к форме вытянутого сфероида, могут потерять устойчивость по отношению к распаду на дочерние капли, тогда как капли, деформирующиеся к форме сплюснутого сфероида, устойчивы.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 3. С. 25–43.

[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[3] *Rayleigh* // Phil. Mag. 1982. Vol. 14. P. 184–186.

[4] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.

[5] *Jones D.M.A.* // J. Meteor. 1959. Vol. 16. N 5. P. 504–510.

[6] *Pruppacher H.R., Klett J.D.* Microphysics of Clouds and Precipitation. D. Reidel Publish. Co., 1978. 714 p.

[7] *Ailam G., Gallily I.* // Phys. Fluid. 1962. Vol. 5. N 5. P. 575–582.

[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[9] *Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Григорьев А.И.* // Электрон. обраб. материалов. 1995. № 1. С. 35–39.

[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
[11] *Ширяева С.О.* // ПЖТФ. 1996. Т. 22. № 4. С. 84–88.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* // ПЖТФ. 1996. Т. 22. № 9. С. 64–69.
[13] *Bassaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
[14] *Grigor'ev A.I., Firstov A.A., Shiryaeva S.O.* // Proc. 9th Intern. Conf. on Atmosperic Electricity. St.Petersburg, 1992. P. 450–453.