

Критические поля и токи в слабо нелинейной среде вблизи порога протекания

© А.А. Снарский, С.И. Буда

Национальный технический университет,
252056 Киев, Украина

(Поступило в Редакцию 30 июня 1997 г. В окончательной редакции 19 декабря 1997 г.)

При значении поля выше критического разложение проводимости по степеням поля перестает быть справедливым и приближение слабой нелинейности перестает работать. На основе двух критериев — среднего и локального найдено концентрационное поведение критических полей в сильно неоднородных средах вблизи порога протекания. Определены значения параметров среды, при которых происходит кроссовер — смена критического поведения. Аналогичные расчеты проведены для критических токов.

При изучении кинетических свойств сильно неоднородных сред вблизи порога протекания p_c особую роль играют нелинейные явления. Это связано с тем, что вблизи p_c в среде существуют места значительной концентрации плотности тока и падения напряжения, что приводит к необходимости учета отклонения от линейного закона Ома. В первом приближении в законе Ома кроме линейного по полю слагаемого появляется нелинейное кубическое

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \chi(\mathbf{r})|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — плотность тока, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность поля, $\sigma(\mathbf{r})$ — ”обычная” проводимость, $\chi(\mathbf{r})$ — константа, характеризующая кубическую нелинейность.

Как и для линейного случая ($\chi = 0$), для описания эффективных свойств случайно неоднородной среды вводятся эффективные кинетические коэффициенты, связывающие по определению средние по объему поля и плотности токов

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle + \chi_e |\langle \mathbf{E} \rangle|^2 \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (2)$$

где $\langle \dots \rangle = V^{-1} \int \dots dV$ и размер усреднения $\sim V^{1/3}$ предполагается много бóльшим характерного размера самоусреднения — корреляционной длины ξ .

Одним из основных вопросов, на который надо ответить при описании эффективных свойств среды при учете нелинейности, является вопрос о том, до каких значений напряженности поля и плотности тока соотношение (2) остается справедливым. Предполагается [1,2], что соотношение (2) остается справедливым, если

$$\langle j \rangle < \langle j \rangle_c, \quad \langle E \rangle < \langle E \rangle_c, \quad (3)$$

где $\langle E \rangle_c$ и $\langle j \rangle_c$ — так называемые критические напряженность поля и плотность тока, определяемые из условия равенства второго слагаемого в (2) первому

$$\langle E \rangle_c = \sqrt{\sigma_e / \chi_e}, \quad \langle j \rangle_c = \sqrt{\sigma_e^3 / \chi_e}. \quad (4)$$

Вычислению критических напряженностей поля и плотности тока в перколяционных средах посвящено

большое число работ (см., например, [1–7]). Часть из них основана на аналогии между критическим поведением χ_e и относительной спектральной плотностью $1/f$ -шума C_e , впервые установленной в [8,9].

Как правило, рассматриваются два предельных случая. Выше порога протекания, когда концентрация хорошо проводящей фазы $p > p_c$ и в среде имеется бесконечный кластер из фазы с проводимостью σ_1 ($\sigma_1 \gg \sigma_2$), рассматривается N/I (normal metal–insulator) случай. Плохо проводящая фаза считается идеальным изолятором — $\sigma_2 = 0$. Ниже порога протекания, при $p < p_c$ рассматривается S/N (superconductor–normal metal) случай. В этом случае в системе нет бесконечного кластера, ток обязательно проходит по участкам из плохо проводящей фазы. Предполагается, что все напряжение падает на этих участках, т.е. хорошо проводящая фаза — идеальный проводник $\rho_1 = 1/\sigma_1 = 0$.

В работах [3–7] для этих двух случаев было получено

$$\langle E \rangle_c \sim \tau^{-t+\nu(d-1)}, \quad \langle j \rangle_c \sim \tau^{\nu(d-1)}, \quad p > p_c, \quad N/I, \quad (5)$$

$$\langle E \rangle_c \sim |\tau|^\nu, \quad \langle j \rangle_c \sim |\tau|^{-q+\nu}, \quad p < p_c, \quad S/N, \quad (6)$$

где $\tau = (p - p_c)/p_c$ — близость к порогу протекания, t и q — критические индексы эффективной линейной проводимости выше и ниже порога соответственно, ν — критический индекс корреляционной длины $\xi \approx a_0 |\tau|^{-\nu}$, a_0 — минимальный размер в среде, для сеточной задачи длина связи сетки. Установленная в [8,9] аналогия между χ_e и относительной спектральной плотностью $1/f$ -шума C_e и тот факт, что учет конечного отношения $h = \sigma_2/\sigma_1$ может быть принципиальным при описании критического поведения C_e (в отличие от σ_e) [10–12], указывают на необходимость учета $h = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ и при расчете критических полей и токов.

Для определения полей и токов в сильно неоднородной среде можно обратиться к моделям перколяционной структуры выше и ниже p_c [13–15] (рис. 1). Главными элементами этой структуры являются мостик из хорошо проводящей фазы и прослойка из плохо проводящей. Учитывая аналогию между слабой нелинейностью и $1/f$ -шумом (χ_e и C_e), мы ограничиваемся указанными

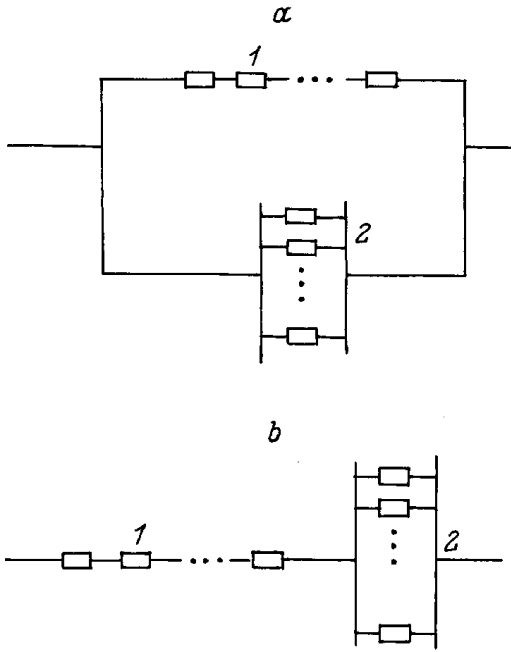


Рис. 1. Иерархическая модель перколяционной структуры при конечном отношении $h = \sigma_2/\sigma_1$. 1 — мостик, набор из N_1 последовательно соединенных сопротивлений хорошо проводящей фазы; 2 — прослойка, набор из N_2 параллельно соединенных сопротивлений плохо проводящей фазы. Согласно [13,14], $N_1 \sim |\tau|^{-t+\nu(d-2)}$, $N_2 \sim |\tau|^{-q-\nu(d-2)}$.

двумя элементами структуры, поскольку именно они дают главные слагаемые в C_e и χ_e при $h \neq 0$ [14]. Приближениям N/I и S/N соответствует учет только одного элемента структуры: выше p_c — только мостика, ниже p_c — только прослойки.

Потребуем теперь, чтобы кроме условия (3) выполнялось аналогичное условие локально, т.е. чтобы в каждой точке каждой фазы локальные напряженности поля и плотности токов были меньше локальных критических

$$E_i(r) < E_{ci}, \quad j_i(r) < j_{ci}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где для каждой из фаз критические локальные напряженности поля и плотности токов определяются из локального закона (1)

$$E_{ci} = \sqrt{\sigma_i/\chi_i}, \quad j_{ci} = \sqrt{\sigma_i^3/\chi_i}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

В отличие от условий (3), которые можно назвать критерием по средним, условия (8) можно назвать локальным критерием. Не вызывает сомнения тот факт, что выполнение (3) не гарантирует выполнения (8). Это означает, что соотношения (5) и (6) в некоторых случаях должны быть заменены на другие.

Как видно из рис. 1, a , напряжение на мостике равно внешнему напряжению. Считая напряженность на мостике критической E_{c1} и выразив внешнее падение напряжения через среднюю напряженность по-

ля, находим величину среднего поля, соответствующую локальному критерию слабой нелинейности (7), $\langle E \rangle_{c1} = (N_1 a_0/\xi) E_{c1}$. Аналогичные рассуждения для прослойки дают $\langle E \rangle_{c2} = (a_0/\xi) E_{c2}$ или

$$\langle E \rangle_{c1} = \sqrt{\sigma_1/\chi_1} \tau^{-t+\nu(d-1)}, \quad \langle E \rangle_{c2} = \sqrt{\sigma_2/\chi_2} \tau^\nu. \quad (9)$$

Критические плотности токов для напряженностей (9) равны

$$\langle j \rangle_{c1} = \sigma_1 \sqrt{\sigma_1/\chi_1} \tau^{\nu(d-1)}, \quad \langle j \rangle_{c2} = \sigma_2 \sqrt{\sigma_2/\chi_2} \tau^{t+\nu}. \quad (10)$$

Средние напряженности поля и плотности токов для $p > p_c$, при которых еще не нарушается (7) и можно пользоваться (2), являются наименьшими из двух возможных

$$\{E\}_c = \min\{\langle E \rangle_{c1}; \langle E \rangle_{c2}\}, \quad \{j\}_c = \min\{\langle j \rangle_{c1}; \langle j \rangle_{c2}\}. \quad (11)$$

Ниже порога протекания весь ток в основном течет через мостик и прослойку (рис. 1, b). При увеличении напряжения локальные критерии слабой нелинейности (7) нарушатся первыми именно здесь. Дальнейшие расчеты удобнее проводить в терминах удельных сопротивлений. Тогда с точностью до кубического слагаемого связь между плотностью тока и напряженностью поля будет иметь вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{r})|\mathbf{j}(\mathbf{r})|^2\mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где с той же точностью $\rho_i = 1/\sigma_i$ и $\mu_i = -\chi_i/\sigma_i^4$.

Локальные плотности критических токов определяются приравнованием между собой слагаемых в (12), т.е. $j_{ci} = \sqrt{\rho_i/\mu_i}$. Зная площадь сечения мостика a_0^{d-1} и прослойки $a_0^{d-1}|\tau|^{-q-\nu(d-2)}$, из условия равенства тока через всю среду $\langle j \rangle \xi^{d-1}$ критическим током для мостика и прослойки ($j_{c1} a_0^{d-1}$, $j_{c2} a_0^{d-1} |\tau|^{-q-\nu(d-2)}$), находим средние критические плотности токов

$$\langle j \rangle_{c1} = \sigma_1 \sqrt{\sigma_1/\chi_1} |\tau|^{\nu(d-1)},$$

$$\langle j \rangle_{c2} = \sigma_2 \sqrt{\sigma_2/\chi_2} |\tau|^{-q+\nu}. \quad (13)$$

Из равенства полного падения напряжения на корреляционном размере сумме напряжений на мостике и прослойке вычисляются критические средние напряженности поля

$$\langle E \rangle_{c1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\chi_1}} |\tau|^{q+\nu(d-1)}, \quad \langle E \rangle_{c2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\chi_2}} |\tau|^\nu. \quad (14)$$

Как выше, так и ниже порога протекания критическая плотность тока и напряженность поля есть минимальное из выражений в (13) и в (14) (см. (11)).

В зависимости от значений параметров τ , $h = \sigma_2/\sigma_1$, $H = \chi_2/\chi_1$ минимальными в (11) могут быть как первые, так и вторые значения напряженностей поля и плотности токов. Приравнивая между собой выражения для напряженностей поля в (9) и плотности токов в (10), для

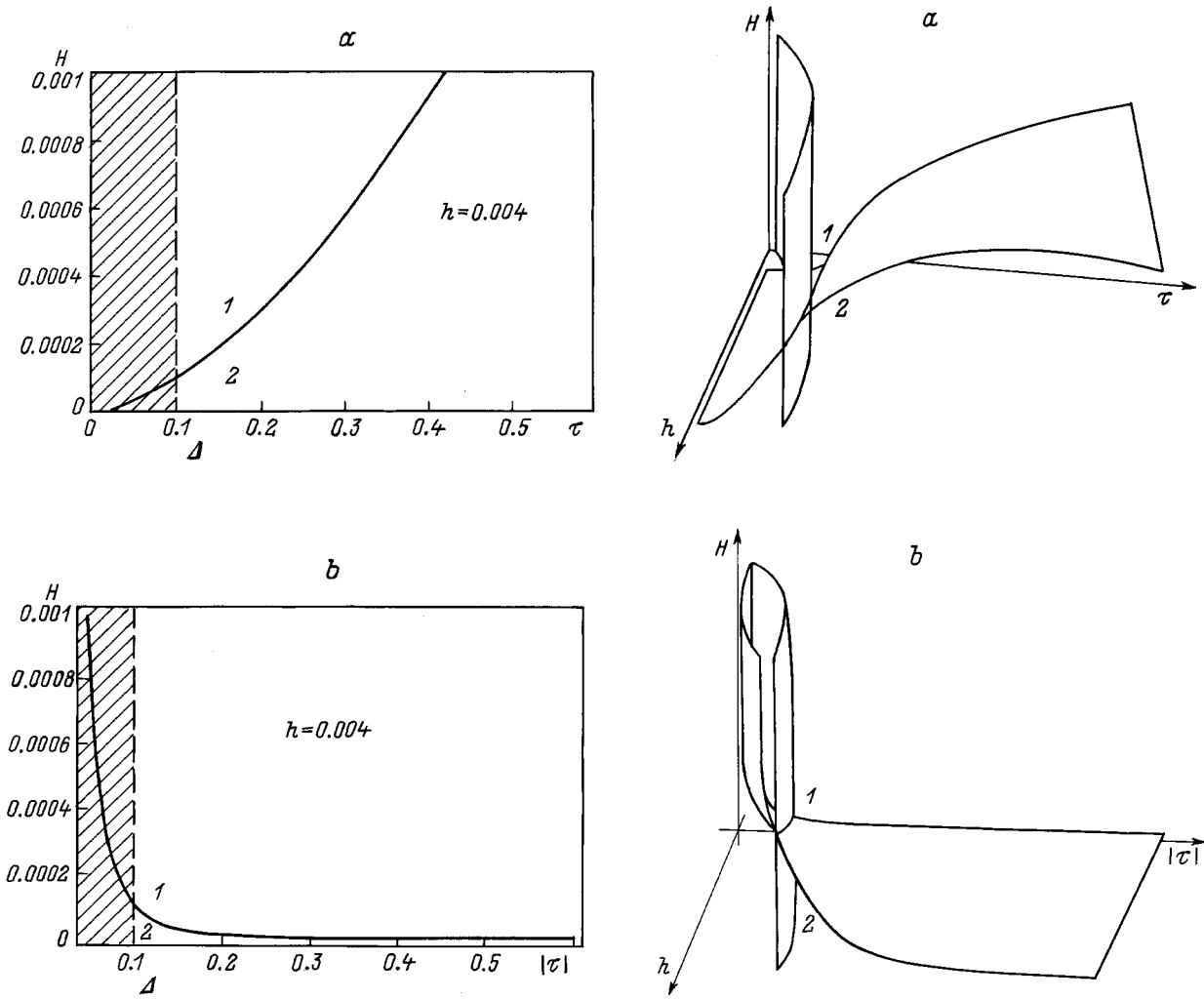


Рис. 2. Поверхности, разграничивающие диапазоны отношений констант слабо нелинейной среды, $h = \sigma_2/\sigma_1$, $H = \chi_2/\chi_1$, для которых справедливы результаты стандартного подхода [3–7] (N/I и S/N случаи (5), (6)) и критические плотности токов и напряженностей поля, полученные на основании локального критерия. Область 2 — стандартный подход, 1 — результаты настоящей работы. Заштрихованная область значений τ соответствует области размазки Δ . Величина Δ определяется исходя из аналогии между эффективными свойствами слабо нелинейной среды и эффективным $1/f$ -шумом [10], $\Delta = h^{1/(t+q)}$.

случая $p > p_c$, получаем $\sqrt{(\sigma_2\chi_1)/(\sigma_1\chi_2)}\tau^{t-\nu(d-2)} = 1$, или, что то же самое,

$$\tau_0 = (H/h)^{1/2(t-\nu(d-2))}, \quad h = \sigma_2/\sigma_1, \quad H = \chi_2/\chi_1. \quad (15)$$

При переходе τ через значение τ_0 происходит кроссовер — смена критического поведения критических напряженностей поля и плотности токов. При $\tau < \tau_0$ критическая плотность тока зависит от τ как $\sim \tau^{t+\nu}$, а при $\tau > \tau_0$ — как $\sim \tau^{\nu(d-1)}$. Кроссовер испытывает и критическая напряженность поля: при $\tau < \tau_0$ она $\sim \tau^\nu$, а при $\tau > \tau_0$ она пропорциональна $\tau^{-t+\nu(d-2)}$.

Отмеченная на рис. 2,а область 1 соответствует случаю, когда $\{E\}_c = \langle E \rangle_{c2}$ — (9), и $\{j\}_c = \langle j \rangle_{c2}$ — (10). Область 2 — ситуации, когда $\{E\}_c = \langle E \rangle_{c1}$, $\{j\}_c = \langle j \rangle_{c1}$, т.е. критические индексы плотности тока и напряженности поля совпадают с (5).

Для $p < p_c$ условие кроссовера критических плотности тока и напряженности поля находится аналогично (15) и имеет вид

$$|\tau_0| = (h^3/H)^{1/2(q+\nu(d-2))}. \quad (16)$$

Поверхность, разграничивающая диапазоны σ_i и χ_i , для которых справедливы результаты критерия по среднему (6), показана на рис. 2,б. Для области 1 справедливы результаты стандартного подхода, т.е. (6). К области 2 относится случай, когда $\{j\}_c = \langle j \rangle_{c1}$ (13) и $\{E\}_c = \langle E \rangle_{c1}$ (14).

Мы выражаем благодарность Э.М. Баскину за обсуждение затронутых вопросов.

Работа частично поддержана РФФИ, № 95-02-04432а, 97-02-16923а.

Список литературы

- [1] *Blumenfeld R., Bergman D.J.* // Phys. Rev. 1991. Vol. B43. P. 13 682.
- [2] *Hui P.M.* // Phys. Rev. 1994. Vol. B49. P. 15 344–15 352.
- [3] *Yu K.W., Hui P.M.* // Phys. Rev. 1994. Vol. B50. P. 13 327–13 335.
- [4] *Hui P.M.* // Phys. Rev. 1994. Vol. B49. P. 15 344–15 347.
- [5] *Chung K.H., Hui P.M.* // J. Phys. Soc. Jap. 1994. Vol. 63. P. 2002–2003.
- [6] *Lin J.J.* // J. Phys. Soc. Jap. 1994. Vol. 61. P. 4125–4132.
- [7] *Zhang G.M.* // J. Phys. 1996. Vol. C8. P. 6933–6943.
- [8] *Stroud D., Hui P.M.* // Phys. Rev. 1988. Vol. B37. P. 8719–8724.
- [9] *Aharony A.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2726–2729.
- [10] *Snarskiĭ A.A., Morozovsky A.E., Kolek A., Kusy A.* // Phys. Rev. 1996. Vol. E53. P. 5596–5605.
- [11] *Морозовский А.Е., Снарский А.А.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 683–692.
- [12] *Морозовский А.Е., Снарский А.А.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1844–1849.
- [13] *Tremblay A.-M.S., Fourcade B., Brenton P.* // Physica. 1989. Vol. A.157. P. 89–100.
- [14] *Kolek A.* // Int. J. Elec. 1992. Vol. 73. P. 1095–1097.
- [15] *Kolek A.* // Phys. Rev. 1992. Vol. B45. P. 205–207.