

01;04;10;12

К вопросу о выборе адекватной математической модели в задачах с мощным импульсным энерговыделением

© Т.А. Андреева¹, С.Н. Колгатин¹, К.В. Хищенко²

¹Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

²Научно-исследовательский центр теплофизики импульсных воздействий,
111250 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 15 января 1997 г. В окончательной редакции 30 сентября 1997 г.)

Обсуждаются проблемы выбора математической модели, оптимальной для заданного диапазона параметров импульсного воздействия. Предварительный анализ, выполненный методами теории подобия и размерности с привлечением интерполяционных уравнений состояния вещества, позволяет утверждать, что полная система уравнений газовой динамики может быть упрощена за счет отбрасывания отдельных членов несущественных в данном диапазоне параметров. Результаты анализа представлены в виде номограмм, которые дополнительно позволяют более строго, чем на интуитивном уровне, выделить класс быстрых и энергонапряженных газодинамических процессов.

Хорошо известно, что простая математическая модель процесса удобнее для исследования, чем сложная. Такая модель легче поддается изучению, содержит меньше параметров, иногда допускает аналитическое решение и т.п. В предлагаемой работе речь пойдет об импульсных (характерное время τ_0 менее 10 ns) и достаточно мощных (приращение удельной внутренней энергии ε порядка или больше теплоты сублимации λ) процессах вклада энергии в вещество. Подобные процессы имеют место при воздействии пучков заряженных частиц или излучения на твердую стенку, при мощных электрических разрядах в конденсированной среде, в различных по физической природе взрывах. В связи с практической значимостью таких задач представляется актуальным дать некоторые априорные рекомендации по выбору математической модели подобных процессов, например, следует ли учитывать пространственную неоднородность давления, нужно ли принимать во внимание теплопроводность, насколько существенны процессы переноса между фазами на границах раздела. Поставленные вопросы вполне разрешимы при возможности корректного учета особенностей теплофизических свойств реальных сред.

Для исследования процессов рассматриваемого класса в одномерном приближении будем использовать систему уравнений газовой динамики, которая после замены координаты Эйлера x на переменную Лагранжа

$$s = \int_0^x \rho(\xi) d\xi$$

(ρ — плотность) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad (2), (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} + Q(s, t), \quad (4)$$

$$p = f_p(\rho, T), \quad \varepsilon = f_\varepsilon(\rho, T), \quad (5), (6)$$

$$W = -\kappa \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \kappa = \rho \cdot f_\lambda(\rho, T). \quad (7), (8)$$

Здесь t — время, v — скорость; p и ε — давление и удельная внутренняя энергия; W — тепловой поток за счет теплопроводности; Q — удельное энерговыделение; κ и λ — массовый и обычный коэффициенты теплопроводности; f_p , f_ε и $f_\lambda(\rho, T)$ — функциональные зависимости величин p , ε и λ согласно принимаемому уравнению состояния и модели теплопроводности вещества.

Выберем в качестве независимых масштабов обезразмеривания ρ_* , T_* , p_* и x_* . Тогда масштабы остальных переменных будут выглядеть так:

$$s_* = \rho_* \cdot x_*, \quad \varepsilon_* = p_*/\rho_*, \quad v_* = \sqrt{\frac{p_*}{\rho_*}},$$

$$t_* = x_* \sqrt{\frac{\rho_*}{p_*}}, \quad Q_* = \frac{1}{x_*} \left(\frac{p_*}{\rho_*} \right)^{3/2}, \quad \kappa_* = \frac{p_* \rho_* x_*^2}{t_* T_*}.$$

Приведенные выше масштабы описывают характер газодинамического поведения среды. Их следует сравнивать с параметрами конкретной задачи, к которым в первую очередь относятся: τ_0 — длительность импульса (или характерное время вклада энергии); $Q_0 = q_0/\rho_*$ — характерная величина мощности энерговыделения на единицу массы (q_0 — то же на единицу объема); Λ_0 — удельная теплота сублимации вещества из исходного состояния (ее значение близко к теплоте испарения). Так, поделив τ_0 на t_0 , получим критерий мгновенности

$$K_M = \frac{\tau_0}{t_*} = \frac{\tau_0}{x_*} \sqrt{\frac{p_*}{\rho_*}}. \quad (9)$$

Случай $K_M \ll 1$ соответствует достаточно быстрому энерговыделению, когда возможно разделение во времени процесса поглощения энергии и газодинамической разгрузки нагретой области (с характерным размером x_*),

давление в которой к моменту окончания импульса достигает значений порядка $p_{\max} \cong \gamma \rho \varepsilon \approx \gamma \rho Q$, где γ — коэффициент Грюнайзена. В качестве примера аналитического рассмотрения задачи о мгновенном выделении тепла можно указать работу [1].

В противоположном случае $K_M \gg 1$ за время воздействия на среду волны разгрузки успевают многократно пробежать нагреваемую область и энергопоглощение протекает практически при постоянном давлении, без образования разрывных течений типа ударной волны.

Наиболее сложным является случай $K_M \sim 1$, когда процессы вклада энергии и газодинамической релаксации не могут быть разделены: требуется решать уравнение сохранения импульса (3), что в аналитическом виде, как правило, невозможно. Интегрируя численно замкнутую систему уравнений (1)–(8), нетрудно оценить величину критерия мгновенности, например, для заданных характерной длительности процесса t_u , масштаба длины x_0 и объемного энерговклада q_0 . На рис. 1 представлены результаты расчета поверхности $K_M = 1$ для меди, проведенного с использованием широкодиапазонного многофазного уравнения состояния [2]. В области под поверхностью реализуется режим мгновенного энерговклада; при существенном удалении от поверхности вверх можно считать, что соответствующие процессы происходят при постоянном (по координате x) давлении.

Из масштабных единиц можно составить временной параметр, характеризующий теплопроводность

$$\tau_T = \frac{p_* \rho_* x_*^2}{\kappa_* T_*} \quad (10)$$

По сути это отношение квадрата характерной длины к эффективной температуропроводности

$$a_* = \frac{\lambda_*}{\varepsilon_* / T_*},$$

где $\lambda_* = \kappa_* / \rho_*$ — масштаб коэффициента теплопроводности λ .

Сравнивая τ_T с t_* , получим критерий теплопроводности

$$K_T = \frac{t_*}{\tau_T} = \frac{\lambda_* T_* \rho_*^{1/2}}{x_* p_*^{3/2}} \quad (11)$$

Критерий показывает, как соотносятся между собой газодинамическая релаксация и распространение тепла. Его можно также представить в виде

$$K_T = \left(\frac{V_T}{C_*} \right)^3,$$

где $C_* = \sqrt{p_* / \rho_*}$ — характерная скорость звука, с которой происходит релаксация давления,

$$V_T = \sqrt[3]{\frac{\lambda_* T_*}{\rho_* x_*}}$$

— масштаб скорости распространения выравнивающей температуры тепловой волны.

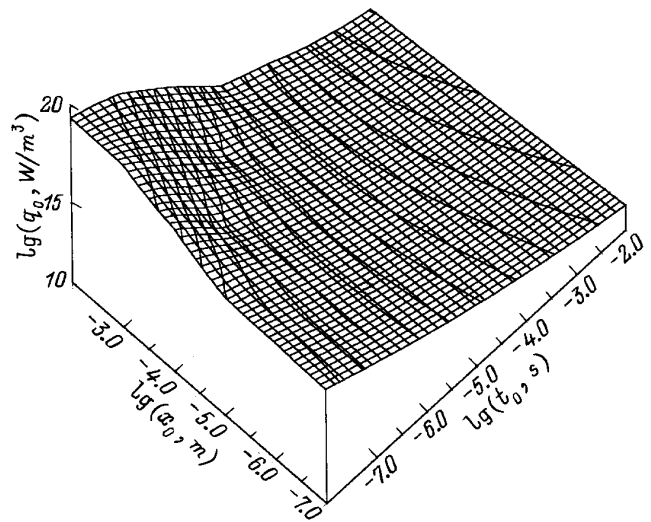


Рис. 1. Критерий мгновенности.

Режим $K_T \ll 1$ можно назвать чисто газодинамическим. В этом случае газодинамические процессы (т.е. прохождение ударных волн и выравнивание давления) протекают гораздо быстрее, чем распространяется тепло за счет теплопроводности. Как следствие, можно пренебречь слагаемым $\partial W / \partial s$ в уравнении (4).

Режим $K_T \gg 1$ соответствует быстрому теплопереносу, когда выравнивание давления и плотности значительно запаздывает по отношению к температуре. Простой численный анализ показывает, что этот случай может реализоваться только для лучистой теплопроводности [3]. Газодинамическая релаксация среды в данном случае протекает изотермически.

Наиболее сложный режим, требующий полного рассмотрения, возникает при $K_T \sim 1$. Процессы газовой динамики и теплопроводности при этом не разделяются, а соответствующие уравнения приходится решать совместно.

Чтобы оценить K_T , необходимо знать составляющую теплопроводности за счет излучения. Для ее учета можно предложить следующий простой метод. Известно [3], что режим лучистой теплопроводности реализуется в случае, когда размер области энерговклада x_* становится существенно больше, чем характерная длина пробега фотонов l_0 . Последняя, в свою очередь, может быть оценена по формулам для водородоподобного атома [3].

Основные потери энергии наблюдаются в сплошном спектре излучения. Необходимо учесть, что поглощению квантов способствует тормозное излучение электрона в кулоновском поле иона. Длина пробега фотона в результате этого процесса составляет [3]

$$l_1 = 4.8 \cdot 10^{24} \frac{T^{1/2}}{Z^2 N_+ N_e} \text{ (cm)}, \quad (12)$$

где T — температура (в К); Z — заряд ионов; N_e, N_+ — концентрация электронов и ионов (cm^{-3}).

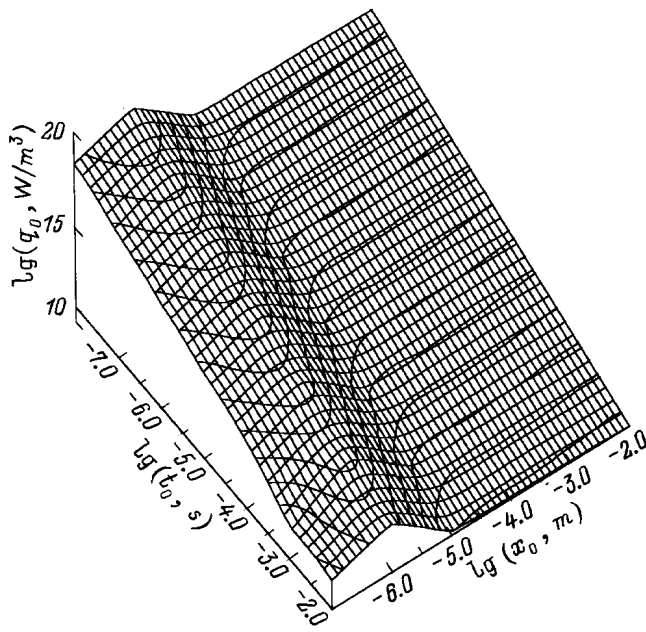


Рис. 2. Критерий теплопроводности.

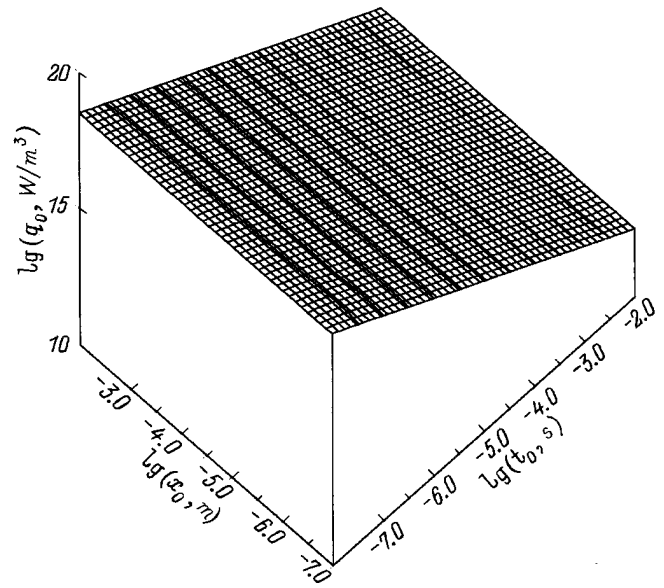


Рис. 3. Критерий режима.

Далее, для оценки пренебрежем менее вероятным процессом свободно-связанного захвата электрона с испусканием кванта в области первой ионизации. Тогда при высоких (выше 50 000 К) температурах и начале многократной ионизации для длины пробега квантов имеет место формула [3]

$$l_2 = 4.4 \cdot 10^{22} \frac{T^{1/2}}{N^2 \bar{m} (\bar{m} + 1)^2} \text{ (cm)}, \quad (13)$$

где \bar{m} — средний заряд водородоподобного иона, $\bar{x}_1 = \bar{I}/(kT)$ — приведенная средняя степень ионизации; при невысоких степенях ионизации l_2 существенно больше, чем l_1 .

Отберем наименьшую из величин (12) и (13) следующим образом:

$$\frac{1}{l_0} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}.$$

Лучистая теплопроводность λ_R определяется через характерную длину пробега кванта l_0 как

$$\lambda_R = \frac{16}{3} \sigma_{St} l_0 T^3, \quad (14)$$

где σ_{St} — постоянная Стефана–Больцмана; при $l_0 > x_*$ можно положить $\lambda_R = 0$.

Для оценки влияния теплопроводности достаточно сложить $\lambda = \lambda_R + \lambda_e$, где λ_e — обычная (электронная) теплопроводность [4]. Соответствующий результат решения системы (1)–(8) показан на рис. 2; выделена поверхность, на которой значение $K_T = 1$. Ниже поверхности можно считать процессы теплопроводности несущественными на характерных временах газодинамики. Выше поверхности температуру в нагреваемой области можно считать примерно постоянной.

Наконец, существенным параметром рассматриваемых задач является характерное время начала разлета вещества

$$\tau_p = \frac{\Lambda}{Q_0}. \quad (15)$$

Поделив на него длительность рассматриваемого физического процесса, получим критерий режима

$$K_P = \frac{\tau_0}{\tau_p} = \frac{\tau_0 Q_0}{\Lambda}. \quad (16)$$

Фактически критерий режима показывает, сколь сложное уравнение состояния необходимо применять в исследовании той или иной задачи. При $K_P \ll 1$ процесс происходит вообще без образования фазовой границы. Подобные задачи решаются в приближении термоупругости, сложная модель термодинамики для них не нужна. Примером такой задачи, решение которой удалось получить аналитически, является воздействие расфокусированного релятивистского электронного пучка на алюминиевую мишень [5]. При $K_P \gg 1$ вещество очень быстро переходит в газовую (или в плазменную) фазу. В большинстве случаев, когда подробности развития этого процесса в начальной стадии неинтересны, фазовые переходы можно не учитывать и использовать упрощенное уравнение состояния. К наиболее сложным относится вариант, когда $K_P \sim 1$. При этом используемое уравнение состояния должно описывать конденсированное и газообразное состояния и переходную область (см. подробнее [3]); существенное значение в таких процессах будет играть межфазный перенос. Поверхность $K_P = 1$, разграничивающая процессы по критерию режима, приведена на рис. 3.

Таким образом, в результате проведенного анализа показано, что на основе предварительных оценок система

газодинамических уравнений для конкретного диапазона исходных параметров может быть существенно упрощена.

Список литературы

- [1] *Калмыков Л.А., Кондратьев В.Н., Немчинов И.В.* // ПМТФ. 1966. № 5. С. 2–23.
- [2] *Бушман А.В., Канель Г.И., Ни А.Л., Фортон В.Е.* Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий. Черногловка: ОИХФ АН СССР, 1988. 200 с.
- [3] *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
- [4] *Беспалов И.М., Полищук А.Я.* Методы расчета транспортных коэффициентов плазмы в широком диапазоне параметров. Препринт ИВТАН. № 1-257. М., 1988.
- [5] *Колгатин С.Н., Степанов А.М., Хачатурьянц А.В.* // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 1982. № 2(10), С. 87–91.