

01,03

## Релаксация газа из твердых шаров и критерии правильности расчетов

© А.Я. Эндер, И.А. Эндер

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 17 января 1997 г.)

Изотропное уравнение Больцмана решается с использованием сонинской моментной системы уравнений. Основной задачей здесь является построение матрицы, описывающей взаимодействие частиц. Такая матрица для различных сечений взаимодействия была построена аналитически в ряде работ [1-4]. Проведено сравнение расчетов матричных элементов, полученных разными методами, для модели твердых шаров. Найдено несколько общих свойств матрицы, которые могут быть использованы в качестве критериев правильности расчетов. С помощью таких критериев показано, что нелинейные элементы матрицы вычислены неверно в работе [3].

### Введение

В работе рассматривается моментный метод решения нелинейного уравнения Больцмана для задач изотропной релаксации, основанный на разложении функции распределения (ФР) по полиномам Сонина (Лагерра) [1-4]. В работах [1,2] впервые показана возможность численного решения нелинейного уравнения Больцмана моментным методом вплоть до больших скоростей. Чтобы строить ФР при больших скоростях, необходимо привлекать много моментов, т.е. знать нелинейные элементы матрицы, описывающей взаимодействие частиц, при больших значениях индексов. Формула для матричных элементов в [2], выведенная для изотропных по скоростям сечений, содержит шесть вложенных сумм. Это ограничивает возможность увеличения числа членов разложения  $N$  (в [2] расчеты проводились только до  $N = 13$ ). В нашей предыдущей работе [4] с использованием  $\alpha$ -представления [5,6] получены формулы, справедливые для любых степенных потенциалов, и число суммирований уменьшилось до четырех. При этом удалось продвинуться до  $N = 30$ , а погрешность расчетов не превышала соответствующей погрешности в [2] при  $N = 13$ . В работе [3] предложен для частного случая модели твердых шаров более простой алгоритм, что позволило надеяться продвинуться существенно дальше в направлении увеличения  $N$ . К сожалению, в формулах для нелинейных матричных элементов работы [3] имеется ошибка. Вывод матричных элементов является достаточно сложной задачей, и ошибки здесь возможны. В процессе сравнения и анализа матричных элементов, вычисленных различными авторами [2-4,7], были выработаны некоторые критерии правильности вычисления нелинейных матричных элементов.

### 1. Сравнение различных расчетов матричных элементов

В ранних классических работах метод разложения ФР по ортогональным полиномам применялся для расчета первых нескольких линейных моментов, необходимых для задач теории переноса. В дальнейшем появились работы, в которых как аналитически [8], так и численно [2-4] полиномиальный метод применялся к изотропному по скоростям уравнению Больцмана для построения ФР при больших энергиях. В этом методе изотропная ФР разлагается в ряд по полиномам Сонина (Лагерра)

$$f(v, t) = M(v, \tilde{T}_0) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) S_{1/2}^n(v^2/\tilde{T}_0) \quad (1)$$

с весовой функцией

$$M(v, \tilde{T}_0) = (1/\pi\tilde{T}_0)^{3/2} \exp(-v^2/\tilde{T}_0), \quad \tilde{T}_0 = 2kT_0/m_0. \quad (2)$$

Как правило, в качестве  $T_0$  выбирается равновесная температура газа. Уравнение Больцмана сводится к следующей системе моментных уравнений:

$$dC_n/dt = \sum_{k,m=0}^{\infty} K_{k,m}^n C_k C_m. \quad (3)$$

Следует отметить, что метод разложения по полиномам Сонина применим только, если ФР удовлетворяет критерию Греда

$$\int_0^{\infty} f^2 \exp(v^2/\tilde{T}_0) d^3v < \infty. \quad (4)$$

В [9] показано, что если ФР представлена в виде суммы двух максвеллианов с температурами  $T_1$  и  $T_2 (T_1 < T_2)$  и  $T_2/T_0 > 2$ , то этот критерий не выполняется.

Матричные элементы  $K_{k,m}^n$  несимметричны относительно перестановки нижних индексов. В случае взаимодействия частиц одного сорта можно перейти к симметризованным матричным элементам  $\tilde{K}_{k,m}^n = (K_{k,m}^n + K_{m,k}^n)/2$ . Именно такие матричные элементы рассматриваются в работах [1,2]. Мы не будем выписывать приведенную в [2] громоздкую формулу для определения  $\tilde{K}_{k,m}^n$ , состоящую из шести вложенных сумм. Способ ее вывода подробно изложен в [1]. Следует отметить, что эта формула справедлива только для модели степенных потенциалов в предположении, что сечение не зависит от угла рассеяния.

При вычислении на ЭВМ ряд (1) всегда приходится обрезать до некоторого конечного  $N$  и сумма (3) становится конечной. Большим достижением авторов [1,2] является то, что они впервые сумели систематически просчитать нелинейные матричные элементы вплоть до  $N = 13$ , что дало возможность продвинуться в область больших скоростей. Однако громоздкость формулы в [2] ограничила возможность увеличения  $N$ .

В [4] с использованием  $\alpha$ -метода матрицы  $K_{k,m}^n$  построена не только для изотропных по углам сечений и показано, что с гарантированной точностью можно считать до 25–30-моментных уравнений.

Уравнение Больцмана в  $\alpha$ -представлении ( $\alpha = m_0/2kT$ ) имеет вид [5–6]

$$n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0^2 \int_0^\infty A(\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \varphi(\tilde{T}_1, t) \varphi(\tilde{T}_2, t) d\tilde{T}_1 d\tilde{T}_2. \quad (5)$$

Здесь  $n_0$  — числовая плотность частиц, а ФР в  $v$ -пространстве связана с  $\varphi(T, t)$  следующим образом:

$$f(v, t) = \int_0^\infty M(v, \tilde{T}) \varphi(\tilde{T}, t) d\tilde{T}. \quad (6)$$

Ядро  $A(\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$  представляет собой отображение интеграла столкновений от двух максвеллианов  $J^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, v)$  в  $\alpha$ -пространство

$$J^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, v) = n_0^2 \int_0^\infty M(v, \tilde{T}) A(\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) d\tilde{T}. \quad (7)$$

Ортогональной с максвелловским весом системе полиномов Сонина  $S_{1/2}^l$  соответствует биортогональная система функций  $s_L$  и  $s_R$  в  $\alpha$ -пространстве

$$s_R^r(\tilde{T}, \tilde{T}_*) = (\tilde{T}_*)^r \delta^{(r)}(\tilde{T} - \tilde{T}_*)/r!, \quad (8)$$

$$s_L^r = (1 - \tilde{T}/\tilde{T}_*)^r. \quad (9)$$

Здесь  $\delta^{(r)}(\tilde{T} - \tilde{T}_*)$  — производная порядка  $r$  от  $\delta$ -функции. При этом

$$M(v, \tilde{T}_*) S_{1/2}^l(v^2/\tilde{T}_*) = \int_0^\infty M(v, \tilde{T}) s_R^l(\tilde{T}, \tilde{T}_*) d\tilde{T}, \quad (10)$$

$$\int_0^\infty s_L^i s_R^j d\tilde{T} = \delta_{ij}. \quad (11)$$

Функция  $\varphi(T)$  в правой части (5) представляется в виде

$$\varphi(\tilde{T}, t) = \sum_{n=0}^\infty C_n(t) s_R^n(\tilde{T}, \tilde{T}_0), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \int_0^\infty \varphi(\tilde{T}, t) s_L^n(\tilde{T}, t) d\tilde{T} \\ &= \int_0^\infty (1 - \tilde{T}/\tilde{T}_0)^n \varphi(\tilde{T}, t) d\tilde{T}. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы получить систему (3), умножим обе части (5) на  $s_L^n(T, T_0)$  и проинтегрируем по  $T$ . При этом для матрицы  $K_{k,m}^n$  получаем

$$\begin{aligned} K_{k,m}^n &= n_0^2 \tilde{T}_0^{k+m} (-1)^{k+m} \frac{d^{k+m}}{d\tilde{T}_1^k d\tilde{T}_2^m} \left( \frac{\tilde{T}_1^k \tilde{T}_2^m}{k!m!} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty d\tilde{T} (1 - \tilde{T}/\tilde{T}_0)^n A(\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \right) \Big|_{\substack{\tilde{T}_1=\tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_2=\tilde{T}_0}}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае степенной зависимости потенциала  $V$  от расстояния ( $V \sim 1/r^\kappa$ ) имеем

$$g\sigma(g, z) = B_\gamma g^\gamma \chi(z)/4\pi, \quad z = \sin^2 \theta/2. \quad (15)$$

Здесь  $\sigma(g, z)$  — дифференциальное сечение рассеяния,  $\gamma = (\kappa - 4)/\kappa$ ,  $B_\gamma = \text{const}$ ,  $\chi(z)$  — угловая часть сечения. В этом случае ядро  $A(T, T_1, T_2)$  и матрица  $K_{k,m}^n$  имеют вид

$$A(\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = \sum_{l=1}^\infty d_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) s_R^l(\tilde{T}, \tilde{T}_1), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} d_l &= \frac{4\pi!}{\Gamma(-\mu)\Gamma(l+3/2)} \\ &\quad \times \sum_{q=1}^l \frac{(-\Delta)^q \tilde{T}_1^{l-2q} \Gamma(l-q-\mu) \Gamma(q+3/2+\mu)}{q!(l-q)! \lambda^{l-q-\mu}} J_q, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} K_{k,m}^n &= n_0^2 \left( \frac{4kT_0}{m_0} \right)^\mu \frac{4\pi (-1)^{n+k} n! \Gamma(\mu+5/2)}{2^m} \\ &\quad \times \sum_{q=1}^n \frac{(\mu+5/2)_{q-1}}{q!} J_q \sum_{i=\max(0, q-k)}^{\min(m, q)} \binom{q}{i} \frac{2^i}{(m-i)!} \\ &\quad \times \sum_{l=\max(q, n-k+q-i)}^n \frac{(2l-2q-1)! (-1)^l}{\Gamma(l+3/2) (n-l)!} \\ &\quad \times \sum_{j=\max(0, m_2)}^{m_1} \frac{(-1)^j (-\mu)_{j+m_3}}{j! 2^j (m_1-j)! (j-m_2)!}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\mu = \gamma/2$ ,  $\Delta = \tilde{T}_2 - \tilde{T}_1$ ,  $m_1 = k - n + i + l - q$ ,  $m_2 = k - n + i - l + q$ ,  $m_3 = l - q + m - i$ .

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)},$$

$$J_q = B_\gamma / 4\pi \int_0^1 \chi(z) z^q dz.$$

Подробный вывод формул (16)–(18) приведен в работе [4].

Для изотропных сечений (а именно такой случай рассмотрен в работах [1,2])  $\chi(z) = 1$  и  $J_q = B_\gamma / (q+1) / 4\pi$ . Для модели твердых шаров  $\mu = 0.5$ ,  $B_1 = \pi d^2$ , где  $d$  — диаметр частицы, и  $J_q = d^2 / (4(q+1))$ .

Формула (18), как и формулы из [2], пригодна для произвольных значений индексов  $k, m, n$ . В частном случае, когда один из нижних индексов  $k, m$  обращается в нуль, мы получаем выражения для линейных элементов. В этом случае число суммирований существенно уменьшается. Так, в формуле (18) остается только одно суммирование.

Несистематические расчеты нелинейных матричных элементов проводились и в более ранних работах. Так, в [7] приведены формулы для симметризованных матричных элементов  $K_{k,m}^n$  в случае степенных потенциалов, но только до  $N \leq 4$ .

В [3] для модели твердых шаров были проведены расчеты нелинейных матричных элементов вплоть до  $N \leq 64$ . Выражения для матричных элементов в [3] имеют вид

$$K_{k,m}^n = \beta_{k,m}^n - \alpha_{k,m}^n, \quad (19)$$

$$\alpha_{k,m}^n = -\frac{n!}{2^{1/2}\Gamma(n+3/2)} \left( \frac{1}{m} \{ \Lambda_{k,m-1,n}^1 \} + \frac{1}{m(m-1)} \sum_{r=0}^{m-2} \{ \Lambda_{k,r,n}^2 \} \right), \quad m \geq 2, \quad (20)$$

$$\beta_{k,m}^n = \frac{2^{1/2}n!}{\Gamma(n+3/2)} \left( \frac{\{ \Lambda_{k-1,m-1,n}^3 \}}{km} - \frac{\{ \Lambda_{k-2,m-1,n}^3 \}}{(k-1)m} - \frac{\{ \Lambda_{k-1,m-2,n}^3 \}}{k(m-1)} + \frac{\{ \Lambda_{k-2,m-2,n}^3 \}}{(k-1)(m-1)} + \frac{k+1/2}{k} \{ \Lambda_{k-1,m,n}^1 \} + \frac{m+1/2}{m} \times \{ \Lambda_{m-1,k,n}^1 \} - (n+1) \{ \Lambda_{k,m,n+1}^0 \} \right), \quad k, m \geq 2. \quad (21)$$

Здесь  $\{ \Lambda_{k,m,n}^0 \}$ ,  $\{ \Lambda_{k,m,n}^1 \}$ ,  $\{ \Lambda_{k,m,n}^2 \}$  и  $\{ \Lambda_{k,m,n}^3 \}$  представляют собой различные комбинации  $\Gamma$ -функций. Особо отметим, что линейные элементы  $\alpha_{k,0}^n$ ,  $\beta_{k,0}^n$  и  $\beta_{0,m}^n$  вычислялись по отдельным формулам. Эти формулы после проведенных нами простых аналитических преобразований совпала с теми, которые получаются из (18).

Наиболее сложной для расчетов, как отмечено в [3], является тройная сумма  $\{ \Lambda_{k,m,n}^3 \}$ , и для ее вычисления предлагается специальная рекурсивная процедура.

Если расчеты линейных элементов просты и проводились многими авторами, то формулы для нелинейных элементов значительно более громоздки. Следует отметить, что в [3] отсутствует сравнение с работами [2,7], как отсутствует и подробный вывод формул (19)–(21). Поэтому нам пришлось провести дополнительное исследование.

Поскольку наши результаты, как и результаты работ [2,7], справедливы не только для модели твердых шаров, то можно провести более широкое сравнение. Мы сравнили наши расчеты с результатами работы [2]. Значения линеаризованных матричных элементов, приведенных в таблице работы [2] при  $\mu = 0.25$  и рассчитанных по формуле (18), полностью совпадают. Наши формулы, так же как и формулы из [2], в частном случае псевдомаксвелловских молекул переходят в известную очень простую форму. В [4] проведено сравнение погрешностей при расчете по формулам из [2] и по формулам (18) и показано, что для псевдомаксвелловских молекул та погрешность, которая в первом случае достигается при  $N = 13$ , во втором случае достигается только при  $N = 30$ . Дополнительно для сравнения результатов была запрограммирована формула из [2] и проведены расчеты матричных элементов для модели твердых шаров. Оказалось, что до  $N = 5$  результаты совпадают с расчетами по (18) до 13 значащих цифр. Для больших  $N$  в [4] предложен специальный метод определения погрешностей, основанный на вычислениях с различной степенью точности, и показано, что переход от шести сумм в [2] к четырем в формуле (18) уменьшает погрешность при больших  $N$  на несколько порядков. Таким образом, можно сказать, что при обеспечении достаточно высокой точности вычислений формулы из [2] и формулы (18) дают одинаковый результат, т.е. они эквивалентны. Для модели твердых шаров при  $N = 2$  мы провели сравнение с результатами работы [7]. Из 12 вычисленных там симметризованных матричных элементов большинство совпадает с вычисленными нами. Линейный элемент  $K_{3,0}^2$  отличается знаком от подобного элемента в [2–4] и это — явная опечатка. Среди различных нелинейных элементов отличаются  $K_{2,1}^2$  (противоположный знак) и  $K_{4,1}^2$  (в 2 раза больше, чем в [4]). При сравнении с результатами работы [3] следует отметить, что расчет приведенных там задач по нашим формулам привел к качественно другим результатам (см. раздел 3). Чтобы проверить, что в [3] нет опечаток при переходе от приведенных там формул к программе релаксационных расчетов, мы провели расчеты нелинейных элементов матрицы по формулам (19)–(21) до  $N = 16$  и повторили расчеты релаксационных процессов с начальными данными из [3]. Сравнивая результаты расчетов с приведенными в [3] рисунками, мы убедились, что формулы для  $K_{k,m}^n$  в [3] соответствуют конечным результатам.

Таблица 1.

$k/m$	0	1	2	3	4	5
0	.00000	-.13333	.50000	-.14583	-.02188	-.00645
1	.13333	.53333	-.14583	-.02708	-.01100	-.00540
2	-1.03333	.01250	-.01667	-.00872	-.00513	-.00332
3	.27917	.02708	.00039	-.00260	-.00235	-.00186
4	.03854	.01517	.00382	.00007	-.00085	-.00096
5	.01061	.00801	.00377	.00117	.00002	-.00038
6	.00363	.00417	.00288	.00145	.00050	.00001
7	.00138	.00216	.00198	.00134	.00070	.00026

Примечание. Значения  $K_{km}^n$  для  $n = 2$  из [4].

В табл. 1 приведены матричные элементы, вычисленные по формулам (18) для  $n = 2$  и  $0 \leq k \leq 7, 0 \leq m \leq 5$ . При вычислении матричных элементов за единицу измерения времени в уравнении Больцмана выбрана так же как и в [3],  $\tau_0 = (\pi m / 16kT_0)^{1/2} / n_0 \sigma$ , где  $\sigma$  — полное поперечное сечение. Аналогичные вычисления по формулам (19)–(21) показали, что все нелинейные элементы различаются значительно как величиной, так и знаком.

Представляет интерес привести значения  $K_{k,m}^n$ , вычисленные по (18), и в более широком диапазоне  $k, m, n$ . Это сделано в табл. 2 и 3 при  $1 \leq n \leq 12$  для  $k$  и  $m$  из области  $k+m = 4$  и  $k+m = 5$  соответственно. В последнем столбце табл. 2 для сравнения приведены значения  $K_{2,2}^n$ , посчитанные по [3]. Для максвелловских молекул матричные элементы  $K_{k,m}^n$  отличны от нуля, только если  $m+k = n$ . Авторы [2,4] обратили внимание на тот факт, что и для других значений параметра  $\mu$ , в частности для твердых шаров, матричные элементы имеют резкий пик при  $m+k = n$  и быстро убывают с ростом величины  $|m+k-n|$ . В этом можно убедиться при внимательном рассмотрении табл. 1–3. При сравнении элементов  $K_{2,2}^n$  из табл. 2, вычисленных по формулам (18) и (19)–(21), видно, что матричные элементы, посчитанные по формулам из [3], таким свойством не обладают. Это подтвердилось и при других значениях индексов. Отметим, что, несмотря на то что все три вывода матричных элементов в [2], [4] и [7] сделаны совершенно разными путями, они с точностью до небольших опечаток работы [7] совпадают между собой, но не совпадают с результатами работы [3]. Уже на основании всего вышесказанного можно сделать заключение об ошибке в расчете нелинейных матричных элементов в работе [3].

Тем не менее хотелось бы иметь такие критерии, которые бы позволили сразу убедиться в правильности тех или иных формул. В следующем разделе выведем два соотношения, которым должны удовлетворять матричные элементы  $K_{k,m}^n$ .

## 2. Свойства матричных элементов

Выберем в качестве начальной ФР максвелловское распределение с температурой  $T_1$ . Интеграл столкновений от такой ФР равен нулю. Если, как обычно,

разложить эту функцию по полиномам Сонина около той же температуры  $T_1$ , то только один коэффициент  $C_0$  будет отличен от нуля и  $dC_0/dt = 0$ , так как  $K_{0,0}^0 = 0$ . Разложим эту же ФР по полиномам Сонина около некоторой другой температуры  $T_2$ . В  $\alpha$ -пространстве максвеллиан с температурой  $T_1$  изображается как  $\delta(T - T_1)$ . Тогда, используя формулу (13), для коэффициента разложения  $C_n$  получаем

$$C_n = (1 - T_1/T_2)^n. \tag{22}$$

В общем случае интеграл столкновений можно записать в виде

$$J(f, f) = M(v, \tilde{T}_2) \sum_{n=0}^{\infty} S_{1/2}^n(v^2/\tilde{T}_2) \frac{dC_n}{dt}. \tag{23}$$

Очевидно, что переразложение максвеллиана около другой температуры не может привести к отличию интеграла столкновений от нуля, т.е. интеграл столкновений от максвеллиана инвариантен по отношению к выбору базиса.

Из тождества  $J(f, f) = 0$ , используя (23) и свойство полноты и ортогональности полиномов Сонина, получаем

$$\frac{dC_n}{dt} = 0, \quad n = 0, \dots, \infty. \tag{24}$$

Отсюда, подставляя (22) в (3), получаем

$$\sum_{k,m} K_{k,m}^n (1 - T_1/T_2)^{k+m} = 0. \tag{25}$$

Обозначая  $k+m$  через  $m'$  и переходя к новым индексам суммирования, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} (1 - T_1/T_2)^m \sum_{k=0}^m K_{k,m-k}^n = 0. \tag{26}$$

Это выражение представляет собой ряд по степеням  $(1 - T_1/T_2)$ . Поскольку тождество (26) выполняется для произвольных значений  $T_2$ , то из него следует

$$\sum_{k=0}^m K_{k,m-k}^n = 0, \quad n, m = 0, \dots, \infty. \tag{27}$$

Отметим, что это свойство справедливо для произвольных сечений рассеяния и накладывает дополнительные связи на матричные элементы. Выпишем в явном виде соотношения (27) для  $m = 0, 1, 2$

$$K_{0,0}^n = 0, \quad n = 0, \dots, \infty \tag{28}$$

$$K_{0,1}^n + K_{1,0}^n = 0, \quad n = 0, \dots, \infty \tag{29}$$

$$K_{0,2}^n + K_{1,1}^n + K_{2,0}^n = 0, \quad n = 0, \dots, \infty. \tag{30}$$

Для матричных элементов, посчитанных по (18) (а следовательно, и по формулам из [2]), соотношения (27) выполнялись с высокой точностью, определяемой точностью расчета самих матричных элементов. Так, если считать по формулам (18), то при  $k, m, n < 12$

Таблица 2.

$n$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$K_{22}^n$ [3]
	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0$	
1	$-5.2083 \cdot 10^{-3}$	$-1.0417 \cdot 10^{-2}$	.00000	$1.0417 \cdot 10^{-2}$	$5.2083 \cdot 10^{-3}$	$-3.7109 \cdot 10^{-2}$
2	$-2.1875 \cdot 10^{-2}$	$-2.7083 \cdot 10^{-2}$	$-1.6667 \cdot 10^{-2}$	$2.7083 \cdot 10^{-2}$	$3.8542 \cdot 10^{-2}$	$1.7578 \cdot 10^{-2}$
3	-.12891	-.13281	-.12500	$1.8527 \cdot 10^{-2}$	.36819	$4.2480 \cdot 10^{-2}$
4	.37240	.36979	.37500	.41751	-1.5347	$4.0039 \cdot 10^{-2}$
5	-.10579	-.10742	-.10417	$-8.5940 \cdot 10^{-2}$	.40332	$2.7466 \cdot 10^{-2}$
6	$-1.6602 \cdot 10^{-2}$	$-1.7578 \cdot 10^{-2}$	$-1.5625 \cdot 10^{-2}$	$-7.0639 \cdot 10^{-3}$	$5.6869 \cdot 10^{-2}$	$1.5015 \cdot 10^{-2}$
7	$-5.2572 \cdot 10^{-3}$	$-5.8268 \cdot 10^{-3}$	$-4.6875 \cdot 10^{-3}$	$-5.0573 \cdot 10^{-4}$	$1.6277 \cdot 10^{-2}$	$6.1951 \cdot 10^{-3}$
8	$-2.0616 \cdot 10^{-3}$	$-2.3872 \cdot 10^{-3}$	$-1.7361 \cdot 10^{-3}$	$3.4867 \cdot 10^{-4}$	$5.8362 \cdot 10^{-3}$	$1.0986 \cdot 10^{-3}$
9	$-8.9333 \cdot 10^{-4}$	$-1.0764 \cdot 10^{-3}$	$-7.1023 \cdot 10^{-4}$	$3.4141 \cdot 10^{-4}$	$2.3386 \cdot 10^{-3}$	$-1.3046 \cdot 10^{-3}$
10	$-4.0904 \cdot 10^{-4}$	$-5.1076 \cdot 10^{-4}$	$-3.0731 \cdot 10^{-4}$	$2.2699 \cdot 10^{-4}$	$1.0001 \cdot 10^{-3}$	$-2.0981 \cdot 10^{-3}$
11	$-1.9367 \cdot 10^{-4}$	$-2.4962 \cdot 10^{-4}$	$-1.3772 \cdot 10^{-4}$	$1.3496 \cdot 10^{-4}$	$4.4605 \cdot 10^{-4}$	$-2.0771 \cdot 10^{-3}$
12	$-9.3707 \cdot 10^{-5}$	$-1.2422 \cdot 10^{-4}$	$-6.3189 \cdot 10^{-5}$	$7.6367 \cdot 10^{-5}$	$2.0475 \cdot 10^{-4}$	$-1.7281 \cdot 10^{-3}$

Примечание. Значения  $K_{km}^n$  для  $k + m = 4$  [4] и  $K_{22}^n$  [3].

Таблица 3.

$n$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
	$m = 5$	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0$
1	$-1.6276 \cdot 10^{-3}$	$-4.8828 \cdot 10^{-3}$	$-3.2552 \cdot 10^{-3}$	$3.2552 \cdot 10^{-3}$	$4.8828 \cdot 10^{-3}$	$1.6276 \cdot 10^{-3}$
2	$-6.4453 \cdot 10^{-3}$	$-1.1003 \cdot 10^{-2}$	$-8.7240 \cdot 10^{-3}$	$3.9063 \cdot 10^{-4}$	$1.5169 \cdot 10^{-2}$	$1.0612 \cdot 10^{-2}$
3	$-20947 \cdot 10^{-2}$	$-2.5342 \cdot 10^{-2}$	$-2.3145 \cdot 10^{-2}$	$-1.4355 \cdot 10^{-2}$	$2.9806 \cdot 10^{-2}$	$5.3983 \cdot 10^{-2}$
4	-.11637	-.11995	-.11816	-.11100	$2.1839 \cdot 10^{-2}$	.44336
5	.33722	.33457	.33590	.34119	.38352	-1.73240
6	$-9.8572 \cdot 10^{-2}$	-.10040	$-9.9487 \cdot 10^{-2}$	$-9.5825 \cdot 10^{-2}$	$-7.6583 \cdot 10^{-2}$	.47087
7	$-1.6100 \cdot 10^{-2}$	$-1.7311 \cdot 10^{-2}$	$-1.6705 \cdot 10^{-2}$	$-1.4284 \cdot 10^{-2}$	$-4.7772 \cdot 10^{-3}$	$6.9177 \cdot 10^{-2}$
8	$-5.3345 \cdot 10^{-3}$	$-6.1076 \cdot 10^{-3}$	$-5.7210 \cdot 10^{-3}$	$-4.1748 \cdot 10^{-3}$	$6.8368 \cdot 10^{-4}$	$2.0654 \cdot 10^{-2}$
9	$-2.1935 \cdot 10^{-3}$	$-2.6741 \cdot 10^{-3}$	$-2.4338 \cdot 10^{-3}$	$-1.4725 \cdot 10^{-3}$	$1.0513 \cdot 10^{-3}$	$7.7225 \cdot 10^{-3}$
10	$-9.9702 \cdot 10^{-4}$	$-1.2895 \cdot 10^{-3}$	$-1.1433 \cdot 10^{-3}$	$-5.5833 \cdot 10^{-4}$	$7.6385 \cdot 10^{-4}$	$3.2242 \cdot 10^{-3}$
11	$-4.7867 \cdot 10^{-4}$	$-6.5351 \cdot 10^{-4}$	$-5.6609 \cdot 10^{-4}$	$-2.1641 \cdot 10^{-4}$	$4.7938 \cdot 10^{-4}$	$1.4353 \cdot 10^{-3}$
12	$-2.3742 \cdot 10^{-4}$	$-3.4042 \cdot 10^{-4}$	$-2.8892 \cdot 10^{-4}$	$-8.2926 \cdot 10^{-5}$	$2.8405 \cdot 10^{-4}$	$6.6563 \cdot 10^{-4}$

Примечание. Значения  $K_{km}^n$  для  $k + m = 5$  [4].

погрешность не превышала  $10^{-10}$ . Следует отметить, что при больших  $m$  и  $n$  в численном расчете  $K_{k,m}^n$  накапливаются погрешности и отклонения от соотношений (27) могут быть использованы для оценки величины этой вычислительной ошибки.

Что касается работы [7], то соотношения (27) выполняются там при  $m = 0, 1, 2$  и  $4$ . Поскольку выше доказано, что знак линейного элемента  $K_{3,0}^2$  в [7] определен неверно, то равенство (27) при  $m = 3$  подтверждает тот факт, что знак элемента  $K_{2,1}^2$  также определен неверно. Свойства (27) могут оказаться полезными также при выборе способа обрезания при численном решении системы (3). Обычно при обрезании выбирается некоторое число  $N$  и перебираются значения  $k, m, n$  из области

$$k, m, n \leq N. \quad (31)$$

При этом, однако, в случае, когда  $k + m > N$ , используются не все матричные элементы, входящие в тождество (27), т.е. обрезанная матрица  $K_{k,m}^n$  не

удовлетворяет выведенным выше соотношениям. Как следует из предыдущего, при разложении максвеллиана с температурой  $T_1$  около температуры  $T_2$  нарушение условий (27) приводит к отклонению от максвелловского распределения в равновесии. На наш взгляд, значительно естественнее обрезание матрицы проводить так, чтобы после этой процедуры свойства (27) выполнялись, т.е. суммирование по  $k$  и  $m$  проводить так, чтобы

$$k + m \leq N, \quad n \leq N. \quad (32)$$

Невозможно проверить, выполняется ли соотношение (27), если туда подставить выражения для  $K_{k,m}^n$  из [3], так как в работе не приводятся матричные элементы, имеющие хотя бы одни из нижних индексов единицу (в этом случае знаменатели формул для нелинейных элементов стремятся к бесконечности). В каждом из соотношений (27), начиная со второго, встречается хотя бы один такой элемент. Авторы [3] справедливо отмечают, что для рассматриваемых ими нелинейных и линеаризованных задач при разложении ФР около равновесного

Таблица 4.

$\nu$	$\bar{J}^m(33, 35)$ точное	$\bar{J}^m(37)$ [3] $N = 15$	$\bar{J}^m(37)$ [4] $N = 15$	$\bar{J}^m(37)$ [4] $N = 30$
0.2	$-1.7552290 \cdot 10^{-1}$	$-1.7525095 \cdot 10^{-1}$	$-1.7555138 \cdot 10^{-1}$	$-1.7552291 \cdot 10^{-1}$
0.4	$-1.2497906 \cdot 10^{-1}$	$-1.2544142 \cdot 10^{-1}$	$-1.2497804 \cdot 10^{-1}$	$-1.2497906 \cdot 10^{-1}$
0.6	$-6.5744483 \cdot 10^{-2}$	$-6.6418029 \cdot 10^{-2}$	$-6.5736926 \cdot 10^{-2}$	$-6.5744484 \cdot 10^{-2}$
0.8	$-1.8434685 \cdot 10^{-2}$	$-1.8628521 \cdot 10^{-2}$	$-1.8435320 \cdot 10^{-2}$	$-1.8434685 \cdot 10^{-2}$
1.0	$7.7167202 \cdot 10^{-3}$	$8.0490871 \cdot 10^{-3}$	$7.7138033 \cdot 10^{-3}$	$7.7167068 \cdot 10^{-3}$
1.2	$1.5360482 \cdot 10^{-2}$	$1.5683595 \cdot 10^{-2}$	$1.5360751 \cdot 10^{-2}$	$1.5360481 \cdot 10^{-2}$
1.4	$1.2729115 \cdot 10^{-2}$	$1.2637250 \cdot 10^{-2}$	$1.2730204 \cdot 10^{-2}$	$1.2729119 \cdot 10^{-2}$
1.6	$7.2240132 \cdot 10^{-3}$	$6.8289308 \cdot 10^{-3}$	$7.2239580 \cdot 10^{-3}$	$7.2240154 \cdot 10^{-3}$
1.8	$2.7475941 \cdot 10^{-3}$	$2.4073228 \cdot 10^{-3}$	$2.7472289 \cdot 10^{-3}$	$2.7475944 \cdot 10^{-3}$
2.0	$2.5189258 \cdot 10^{-4}$	$1.5935936 \cdot 10^{-4}$	$2.5187636 \cdot 10^{-4}$	$2.5189266 \cdot 10^{-4}$
2.2	$-7.0711916 \cdot 10^{-4}$	$-6.0972001 \cdot 10^{-4}$	$-7.0701226 \cdot 10^{-4}$	$-7.0711916 \cdot 10^{-4}$
2.4	$-8.3763687 \cdot 10^{-4}$	$-6.9330519 \cdot 10^{-4}$	$-8.3761446 \cdot 10^{-4}$	$-8.3763689 \cdot 10^{-4}$
2.6	$-6.5391938 \cdot 10^{-4}$	$-5.5003966 \cdot 10^{-4}$	$-6.5394481 \cdot 10^{-4}$	$-6.5391937 \cdot 10^{-4}$
2.8	$-4.2204328 \cdot 10^{-4}$	$-3.7263742 \cdot 10^{-4}$	$-4.2205553 \cdot 10^{-4}$	$-4.2204328 \cdot 10^{-4}$
3.0	$-2.4043828 \cdot 10^{-4}$	$-2.2664423 \cdot 10^{-4}$	$-2.4043422 \cdot 10^{-4}$	$-2.4043820 \cdot 10^{-4}$

Примечание. Сравнение  $\bar{J}^m(\nu, 0.5, 1.5)$ , вычисленных по разным формулам.

максвеллиана элементы матрицы, имеющие хотя бы один индекс единицу, не нужны. Однако при разложении около максвеллиана с температурой, отличной от равновесной, или при рассмотрении смеси газов знание всех этих элементов необходимо. Тот факт, что формулы (18) удовлетворяют соотношению (27), является достаточно серьезным доводом в пользу их правильности. Однако, поскольку аналогичная проверка формул (19)–(21) невозможна, необходима дополнительная проверка.

Воспользуемся тем обстоятельством, что для модели твердых шаров в [10] приводится аналитическая формула для интеграла столкновений от двух максвеллианов с произвольными температурами

$$\begin{aligned}
 J^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \nu) &= R_+ - R_-, \\
 R_+ &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{n_0^2 \sigma}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \nu} \\
 &\times (e^{-\alpha_2 v^2} \operatorname{erf}(v\sqrt{\alpha_1}) - e^{-\alpha_1 v^2} \operatorname{erf}(v\sqrt{\alpha_2})), \\
 R_- &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{n_0^2 \sigma}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_1 v^2} \left(\frac{e^{-\alpha_2 v^2}}{\pi} \right. \\
 &\left. + \operatorname{erf}(v\sqrt{\alpha_2}) \left(v\sqrt{\alpha_2} + \frac{1}{2v\sqrt{\alpha_2}}\right)\right), \\
 (\alpha_j &= m/(2kT_j), \quad j = 1, 2). \quad (33)
 \end{aligned}$$

В [11] имеется более общая формула для интеграла столкновений, когда рассматриваются два максвеллиана с произвольными температурами и средними скоростями. В частном случае изотропной релаксации эта формула сводится к (33).

Рассмотрим нелинейный случай, когда ФР представляет собой сумму двух максвеллианов

$$f(\nu) = M(\nu, \tilde{T}_1) + M(\nu, \tilde{T}_2). \quad (34)$$

Тогда интеграл столкновений имеет вид

$$\begin{aligned}
 J(f, f) &= J^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \nu) \\
 &+ J^m(\tilde{T}_2, \tilde{T}_1, \nu) = \bar{J}^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \nu). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Разложим ФР (34) по полиномам Сонина около равновесной температуры  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ . Используя формулу (13), для коэффициентов разложения получаем

$$\begin{aligned}
 C_{2n} &= 2 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}\right)^{2n} = 2\tilde{\Delta}^{2n}, \\
 C_{2n+1} &= 0, \quad n = 0, \dots, \infty. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Зная коэффициенты  $C_n$ , можно построить разложение интеграла столкновений по полиномам Сонина. Из (23) с использованием (3) и (36) в рассматриваемом случае получаем

$$\bar{J}^m(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \nu) = M(\nu, \tilde{T}_0) \sum_{n=0}^{\infty} S_{1/2}^n(\nu^2/\tilde{T}_0) D_n(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2), \quad (37)$$

$$D_n(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \tilde{K}_{2k, 2m}^n (2 - \delta_{k,m}) \tilde{\Delta}^{2(k+m)}. \quad (38)$$

Свойства коэффициентов (36) и равенство (28) позволяют в (38) проводить суммирование по  $m$ , начиная с единицы. Таким образом, в разложении функции  $\bar{J}^m(T_1, T_2, \nu)$  по полиномам Сонина не фигурируют матричные элементы, выражения для которых отсутствуют в [3].

Если в (37), (38) подставить правильное значение матричных элементов  $K_{k,m}^n$ , то получим функцию, которая должна совпадать с  $J^m(T_1, T_2, \nu)$  определяемой формулами (33), (35). Это дает еще один критерий правильности расчетов.

Таблица 5.

$l$	$D_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ (38) [3]	$D_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ (38) [4]	$D_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ (39) точное
2	$-5.2590077 \cdot 10^{-1}$	$-5.3333333 \cdot 10^{-1}$	$-5.3333333 \cdot 10^{-1}$
3	$1.8491582 \cdot 10^{-1}$	$1.4285714 \cdot 10^{-1}$	$1.4285714 \cdot 10^{-1}$
4	$-2.6368847 \cdot 10^{-1}$	$-1.8333333 \cdot 10^{-1}$	$-1.8333333 \cdot 10^{-1}$
5	$1.1192430 \cdot 10^{-1}$	$6.3356775 \cdot 10^{-2}$	$6.3356782 \cdot 10^{-2}$
6	$-8.1335949 \cdot 10^{-2}$	$-5.3578599 \cdot 10^{-2}$	$-5.3578582 \cdot 10^{-2}$
7	$4.3118543 \cdot 10^{-2}$	$2.1906036 \cdot 10^{-2}$	$2.1906072 \cdot 10^{-2}$
8	$-2.2503093 \cdot 10^{-2}$	$-1.4720030 \cdot 10^{-2}$	$-1.4719954 \cdot 10^{-2}$
9	$1.4152822 \cdot 10^{-2}$	$6.8945086 \cdot 10^{-3}$	$6.8946644 \cdot 10^{-3}$
10	$-6.1439616 \cdot 10^{-3}$	$-3.9044694 \cdot 10^{-3}$	$-3.9041520 \cdot 10^{-3}$
11	$4.1044116 \cdot 10^{-3}$	$2.0687224 \cdot 10^{-3}$	$2.0693780 \cdot 10^{-3}$
12	$-1.8663395 \cdot 10^{-3}$	$-1.0107704 \cdot 10^{-3}$	$-1.0093606 \cdot 10^{-3}$

Примечание. Сравнение  $D_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ , вычисленных по разным формулам.

Целесообразно также сравнить выражения для коэффициентов разложения интеграла столкновений по полиномам Сонина  $D_n$  (38) с точной формулой, полученной с помощью интегрирования  $\tilde{J}^m(T_1, T_2, v)$  с соответствующим полиномом Сонина,

$$D_n(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \tilde{\Delta}^{n-l} \left( d_l(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^l + (-1)^{n-l} d_l(\tilde{T}_2, \tilde{T}_1) \left( \frac{T_2}{T_0} \right)^l \right). \quad (39)$$

Здесь  $d_l(T_1, T_2)$  определяется по формуле (17). Воспользуемся полученными критериями для проверки правильности формул (19)–(21). Степень отклонения от равновесия характеризуется в (37), (38) одним параметром  $\tilde{\Delta}$ . При малых отклонениях от равновесия ( $\tilde{\Delta} \ll 1$ ) интеграл столкновений определяется в основном линейными членами и разница между расчетами в [3,4] практически не наблюдается. Если  $\tilde{\Delta}$  выбрать достаточно большим, то нарушается критерий Греда и ряд (37) не сходится. В связи с этим для сравнения было выбрано промежуточное значение ( $\tilde{\Delta} = 1/2$ ,  $T_1/T_0 = 0.5$ ,  $T_2/T_0 = 1.5$ ).

В табл. 4 приведены точные значения  $\tilde{J}^m$ , посчитанные по формулам (33), (35), и разложение (37). Расчеты по (37) проводились с использованием матриц из [3,4]. При расчете по формулам из [3] при  $N = 15$  ошибка значительная и в некоторых случаях превышает 10%: например, при  $v = 1.8$  она составляет 12.4%, а при  $v = 2$  достигает 35%. В аналогичном случае ( $N = 15$ ) при использовании матрицы из [4] ошибка не превышает 0.01%. Чтобы показать, что при использовании  $K_{k,m}^n$  из [4] ошибка связана только сходимостью ряда при достаточно сильных отклонениях от равновесия, расчет был проверен при  $N = 30$ . В этом случае значение совпадает с точным до седьмой значащей цифры.

Особенно хорошо видно различие между расчетами по [3,4] в табл. 5, где приведены значения моментов  $D_l(T_1, T_2)$ , посчитанных по (38) как с использованием формул для  $K_{k,m}^n$  из [3,4] при  $N = 15$ , так и по точной формуле (39). В то время как второй, третий и четвертый моменты, вычисленные по (18), совпадают с точными до седьмой цифры после запятой, расчеты по (19)–(21) дают погрешность даже в третьем моменте порядка 30%.

Таким образом, можно утверждать, что формулы для нелинейных матричных элементов из [3] ошибочны.

### 3. Обсуждение результатов расчетов релаксационных процессов

В [3] исследовался вопрос о сходимости лагранжевского ряда (1) на примере двух задач изотропной релаксации: первая с начальными условиями, соответствующими ВКВ-моду,

$$C_n(0) = (0.4)^n (1 - n) \quad (40)$$

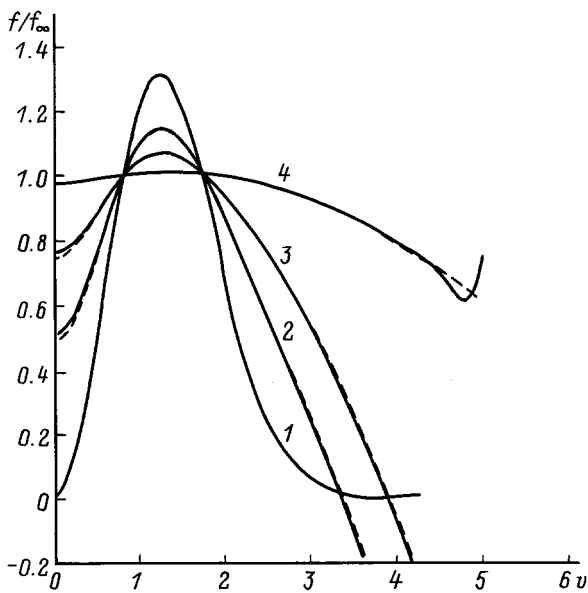
и вторая с начальными условиями

$$C_n(0) = 0.8 \delta_{n,2}, \quad n \geq 2. \quad (41)$$

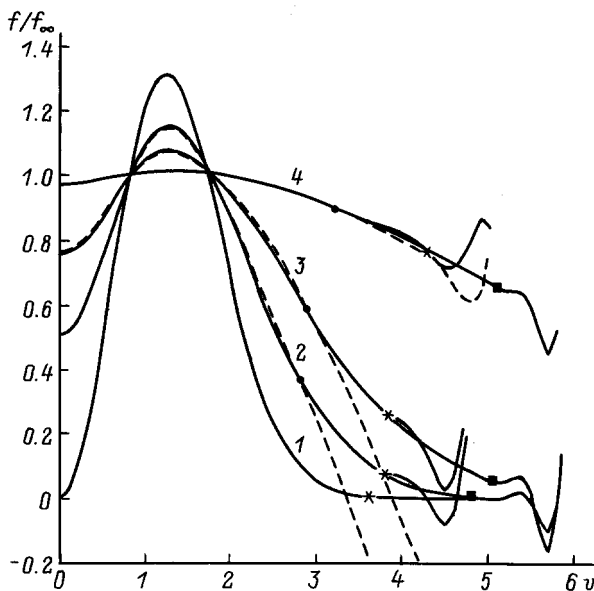
Разлагая начальную ВКВ-моду по полиномам Сонина, Шурер и Кугерл продемонстрировали связь между количеством членов разложения  $N$  и предельной скоростью  $v_{\max}$ , до которой это разложение справедливо. Так при  $N = 8, 16, 32$  и  $64$   $v_{\max}$  принимала значения 2.6, 3.6, 5.1 и 6.6 соответственно. Здесь для нахождения  $v_{\max}$  по известным моментам (40) строился отрезок ряда и сравнивался с аналитически известной ФР. В случае максвелловских молекул такое сравнение можно провести в любой момент времени  $\tau$  ( $\tau = t/\tau_0$ ), причем для каждого  $\tau$  существует предельное значение скорости  $v_{\max}$ , такое что внутри области  $v \leq v_{\max}$  ряд (1) сходится и с приближением к равновесию сходимость ряда (1) улучшается, т.е. значение  $v_{\max}$  увеличивается.

Сравнение расчетов первой задачи приведено на рис. 1, 2. На рис. 1 представлена ФР, построенная по формулам из [3] при  $N = 16$  в те же моменты времени  $\tau/\sqrt{2} = 0, 1, 2, 5$ , что и в [3]. Там же представлены результаты линейных расчетов, т.е. таких, в которых все нелинейные матричные элементы положены равными нулю. Первое, что бросается в глаза, это резкий переход ФР в область отрицательных значений в окрестности скоростей, близких к четырем при  $\tau = \sqrt{2}$  и  $2\sqrt{2}$ . В [3] приведено решение первой задачи при  $N = 64$ . Сравнение показывает, что это решение практически совпадает с решением, представленным на рис. 1, т.е. резкий переход в отрицательную область сохраняется и при  $N = 64$ . Как известно, точное решение нелинейного уравнения Больцмана при положительной начальной ФР не может стать отрицательным.

Второе, что бросается в глаза при рассмотрении рис. 1, — это очень малое различие линейного и нелинейного процессов в хвостах ФР. Тот факт, что линейное решение переходит в отрицательную область, удивления не



**Рис. 1.** Решения линейного (пунктир) и нелинейного (сплошная кривая) уравнения Больцмана при начальных условиях (40). В нелинейных решениях использованы матричные элементы из [3] ( $N = 16$ ), в линейных — матричные элементы при  $N = 30$ ; 1-4 — моменты времени  $\tau/\sqrt{2} = 0, 1, 2, 5$ .



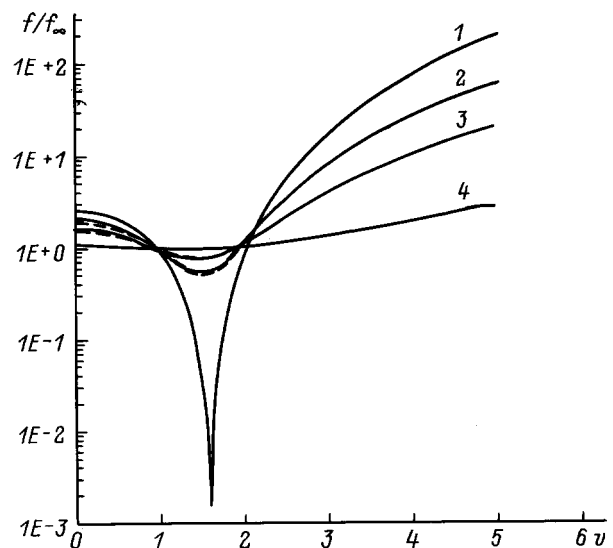
**Рис. 2.** Решения нелинейного уравнения Больцмана при начальных условиях (40), использующих матрицу из [4]. Пунктир — аналогичное решение, но с применением матрицы из [3] ( $N = 16$ ); 1-4 — то же, что и на рис. 1; \* —  $v_{max}$  для  $N = 16$ , ■ — для  $N = 30$ .

вызывает. Отсутствие существенной поправки к линейному решению после включения нелинейных элементов объясняется сильным занижением значений максимальных нелинейных матричных элементов (см. раздел 1), которые в основном определяют нелинейный процесс.

На рис. 2 приведен тот же процесс с начальными условиями (40), но рассчитанный по правильной матрице (18) при  $N = 16$  и 30. Пунктир — это то же решение, рассчитанное по матрице из [3] при  $N = 16$ . На каждой сплошной кривой обозначено соответствующее ей значение максимальной скорости  $v_{max}$ , левее которой ряд (1) сходится. Предел сходимости четко виден как возникновение возмущения на кривой. В отличие от рис. 1, если при  $N = 16$  в интервале времен  $1 \leq \tau/\sqrt{2} \leq 2$  максимальная скорость  $v_{max}$  приближается к четырем, то при  $N = 30$  значение  $v_{max}$  уже больше пяти, т.е., как и в случае максвелловских молекул, подключение новых моментов делает ФР положительной для все больших скоростей. Из рис. 2 видно, что в интервале  $1 \leq \tau/\sqrt{2} \leq 2$  значения максимальной скорости  $v_{max}$  близки к значениям, посчитанным для нулевого момента времени. Следовательно, можно утверждать, что для тех же моментов времени при  $N = 64$  значение  $v_{max}$  будет около 6.5.

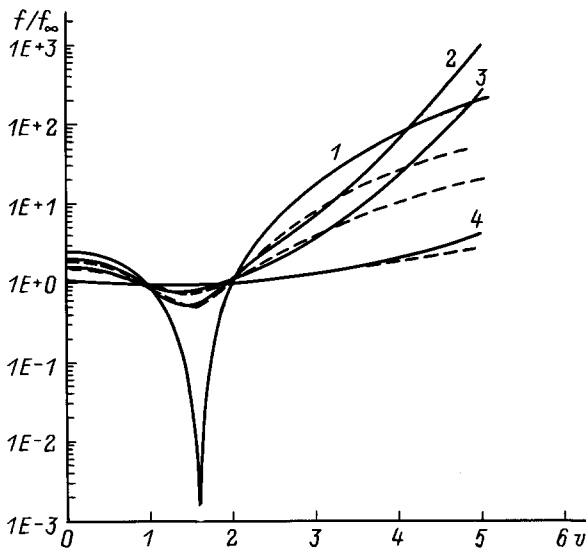
На рис. 2 кружками отмечены точки, где расчеты по формулам из [3] начинают отличаться от расчетов с использованием правильной матрицы (18). Эти значения соответствуют скоростям из области  $2.5 \leq v \leq 3$ , что существенно ниже 6.5. Таким образом, в области  $v > 3$  в [3] возникает большая систематическая ошибка, которая не может быть исправлена за счет увеличения  $N$ .

Авторы [3], понимая парадоксальность полученных результатов и пытаясь объяснить факт возникновения отрицательных решений независимо от значения  $N$ , приходят к неверному выводу о том, что это связано с плохой сходимостью ряда и даже неприменимостью метода разложения по полиномам Лагерра в данном случае.



**Рис. 3.** Решения линейного (пунктир) и нелинейного (сплошная кривая) уравнения Больцмана при начальных условиях (41). В нелинейных решениях использованы матричные элементы из [3] ( $N = 16$ ), в линейных — матричные элементы при  $N = 30$ , 1-4 — то же, что и на рис. 1.





**Рис. 4.** То же, что и на рис. 3. В нелинейных решениях использованы матричные элементы из [4] ( $N = 16$ ), в линейных — матричные элементы при  $N = 30$ .

На рис. 3 и 4 представлена ФР с начальными условиями (41), рассчитанная с помощью формул из [3,4] соответственно. Можно отметить разный характер релаксации хвостов ФР, меняется даже кривизна кривых. Здесь, как и в первой задаче, при расчетах с применением формул из [3] наблюдается практическое совпадение линейных и нелинейных кривых, что также связано с неверным расчетом максимальных нелинейных матричных элементов. На самом деле, как видно из рис. 4, можно наблюдать различные кривизны линейных и нелинейных ФР.

Малое отличие нелинейных и линеаризованных решений, отмеченное в [3], действительно имеет место в области не очень больших скоростей, но в области хвостов отличие значительно более существенно.

## Заключение

В настоящей работе мы сравнили различные способы расчета матрицы взаимодействия в моментом методе решения изотропного уравнения Больцмана. Из-за использования неверных формул для нелинейных матричных элементов авторы [3] пришли к неверным выводам о ходе релаксационного процесса и вообще о возможностях применения моментного метода. Мы пришли к другому выводу: моментным методом можно строить функцию распределения при больших скоростях, но нужно привлекать большое количество моментов.

При анализе результатов расчетов матрицы  $K_{k,m}^n$  было выявлено несколько ее свойств, которые использовались как критерии правильности расчетов. Первое из этих свойств является достаточно общим и справедливо для произвольных сечений взаимодействия. Оно основано на условиях инвариантности интеграла столкновений от

максвелловкой ФР по отношению к выбору базисных функций. Если развивать эту идею, то можно строить нелинейные матричные элементы для неізотропного уравнения Больцмана, что особенно существенно для различных физико-химических процессов и изучения процессов переноса при кулоновском взаимодействии частиц.

Работа выполнена частично при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-02-18080) и частично при поддержке Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки" (контракт № 326.53).

## Список литературы

- [1] *Barnsley M., Turchetti G.* // Lett. Nuovo Cimento. 1982. Vol. 33. P. 347–351.
- [2] *Turchetti G., Paolilli M.* // Phys. Lett. 1982. Vol. 90 A. N 3. P. 123–126.
- [3] *Schürerer F., Kugerl G.* // Phys. Fluids. 1990. Vol. A 2. P. 609–621.
- [4] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 10. С. 38–53.
- [5] *Эндер И.А., Эндер А.Я.* // ДАН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 61–64.
- [6] *Кольшикин И.Н., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖВМиМФ. 1988. Т. 28. № 6. С. 901–916.
- [7] *Word C.A., Mintzer D.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. P. 499–512.
- [8] *Ernst M.H.* // Phys. Rep. 1981. Vol. 78. P. 1–21.
- [9] *Эндер И.А., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 9. С. 1671–1680.
- [10] *Кольшикин И.Н., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 132–141.
- [11] *Deshpande E.M., Narasimha R.* // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. P. 3–13.