Журнал технической физики, 1998, том 68, № 4

01;05;10;12

Об образовании релятивистских позитронных систем путем осевого каналирования позитронов в ионных кристаллах

© А.С. Геворкян[1], А.Г. Григорян[1], А.Р. Мкртчян[2], А.Г. Тонеян[2]

[1] Институт высокопроизводительных вычислений и баз данных Госкомитета РФ по науке и технологиям, 194291 Санкт-Петербург, Россия
[2] Институт прикладных проблем физики АН Армении, 375014 Ереван, Армения

(Поступило в Редакцию 26 декабря 1996 г.)

Построено аналитическое выражение для эффективного потенциала взаимодействия быстрой заряженной частицы с ионным кристаллом типа CsCl в зависимости от температуры среды с учетом дальнего порядка. С помощью численного анализа показано, что в кристаллах этой структуры вдоль оси $\langle 100\rangle$ отрицательно заряженных ионов существует реальная возможность осевого сверхканалирования позитронов. Подробно исследованы волновая функция и энергетический спектр локализованного состояния, проанализирована возможность образования метастабильных двумерных релятивистских позитронных систем.

Введение

Явление аномального прохождения ионов вдоль определенных кристаллографических осей и плоскостей было открыто экспериментально в 1960 г. [1]. В 1963 г. оно было подтверждено путем численного моделирования [2] и названо эффектом "каналирования". Теоретическое объяснение этого явления было сделано в 1965 г. Линдхардтом в рамках классической механики [3]. Квантово-механическая теория каналирования электронов и позитронов была развита многими авторами [4–6]. В последующие после появления теории Линдхардта годы особенно бурно развивались теория и эксперимент, касающиеся проблем каналирования легких заряженных частиц — электронов и позитронов.

Следует отметить, что электрон в кристалле может находится как в режиме плоскостного, так и осевого каналирования. Для позитронов же известен только один тип истинного каналирования, а именно когда частица локализовывается между двумя соседними плоскостями [5].

Возможность осевого каналирования положительных частиц до сегодняшнего дня серьезно не обсуждалась в связи с тем, что сами кристаллические оси независимо от сорта и симметрии кристалла заряжены положительно. Тем временем изыскания возможностей осевого каналирования позитронов и тем самым образования метастабильных релятивистских позитронных систем представляются чрезвычайно актуальной проблемой радиационной физики. Достаточно сказать, что до сих пор одним из возможных путей генерации когерентного γ-излучения считается метод стимулирования распада позитрониев $(e^+e^-) \to 2\gamma$, образованных посредством смешения релятивистских электронных и позитронных пучков в вакууме [7,8]. Однако, этот путь имеет чрезвычайно уязвимое место, а именно очень низкую вероятность образования самих пар (e^+e^-) в указанных условиях. В последнее время был предложен другой способ генерации когерентного γ-излучения, основанный на стимулировании аннигиляции каналированных в кристалле позитронов с электронами среды [9]. Последний путь нам кажется более предпочтительным.

В наших предыдущих работах [10–13] с целью выявления новых возможностей для каналирования легких заряженных частиц было обращено внимание на возможности ионных кристаллов типа CsCl. В частности, был подробно изучен эффективный потенциал взаимодействия заряженной частицы с кристаллом в режиме плоскостного каналирования вдоль основных плоскостей $\langle 100\rangle$ ионов Cs^+ и хлора Cl^-.

В настоящей работе построен эффективный потенциал взаимодействия заряженной релятивистской частицы с кристаллом вблизи осевого направления $\langle 100\rangle$. Подробно исследован эффективный потенциал каналирования позитрона вблизи оси $\langle 100\rangle$ ионов Cl^- методом численного моделирования. Решено уравнение Шредингера в двумерном эффективном потенциале, найдена волновая функция и спектр энергий. Проанализирована роль диссипативных процессов в уширении спектральных линий двумерных релятивистских позитронных систем.

Каналирование позитрона вокруг оси $\langle 100\rangle$ ионов Cl^- в кристалле CsCl

Потенциал, создаваемый трехмерным бесконечным кристаллом типа CsCl в приближении Иенсена–Майера–Гослера–Роде с учетом тепловых колебаний в декартовых координатах, начало которого закреплено с ионом Cl^-, имеет вид [10]

$$\varphi(\mathbf{r};T) = 4\pi \int d\mathbf{R}\frac{1}{d^3}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{R})} \times\left\{(-1)^{l+n+m}e^{-\frac{k^2u_{0+}^2}{2}}W^+(\mathbf{R}) + e^{-\frac{k^2u_{0-}^2}{2}}W^-(\mathbf{R})\right\},$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{d}(\hat{x}l + \hat{y}n + \hat{z}m), \quad (1)$$

где d — период прямой решетки; $\mathbf{k}$ — вектор обратной решетки; $(l, n, m) \in (-\infty, \infty)$ целые числа; $u_{0+} \equiv u_{0+}(T)$ и $u_{0-} \equiv u_{0-}(T)$ характеризуют амплитуды тепловых колебаний положительных Cs^+ и отрицательных Cl^- ионов при температуре T; $W^+(\mathbf{R})$ и $W^-(\mathbf{R})$ обозначают плотность зарядов в ионах соответствующих знаков при температуре $T = 0$.

Вне структуры ионов электростатическое поле (1) сильно упрощается и принимает вид

$$\varphi_{nst}(\mathbf{r};T) = \frac{4\pi e^-}{d^3}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{kr}} \times \left[(-1)^{l+n+m}e^{\frac{-k^2u_{0+}^2}{2}} - e^{\frac{-k^2u_{0-}^2}{2}}\right]. \quad (2)$$

Теперь перейдем к изучению структуры эффективного потенциала. Пусть быстрая положительно заряженная частица рассеивается под малым углом $\vartheta \leq \vartheta_L \sim \sqrt{D_0/E}$ (где ϑ_L — угол Линдхардта, E — полная энергия частицы, D_0 — глубина ямы) на оси $\langle 100\rangle$ иона Cl^-. Тогда потенциал (1) можно усреднять по направлению быстрого движения, т. е. по оси $\langle 100\rangle$ ионов Cl^-, что эквивалентно интегрированию потенциала по координате z в пределах одного периода d (рис. 1). При этом если частица пересекает ион Cl^- на расстоянии $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, то участок d разделяется на три части (рис. 1). В первой и третьей частях частица двигается вне иона, а во второй — внутри него. Заметим, что путь, который преодолевает частица внутри иона, имеет длину

$$R(x,y) = 2\mathrm{Re}\sqrt{R_0^2 - \left[\eta^2(x)+\eta^2(y)\right]d^2},$$

$$\eta(x) = \frac{1}{2} + (-1)^P\left(\left\{\frac{x}{d}\right\} - \frac{1}{2}\right),\ P_x = \left[\frac{2x}{d}\right],$$

$$\eta(y) = \frac{1}{2} + (-1)^{P_y}\left(\left\{\frac{y}{d}\right\} - \frac{1}{2}\right),\ P_y = \left[\frac{2y}{d}\right], \quad (3)$$

где скобки [] и {} соответственно обозначают целую и дробную части функций. В случае, когда частица пересекает ион Cs^+, путь определяется формулой

$$R_+(x,y) = 2\mathrm{Re}\sqrt{R_{0+}^2 - \left[\eta^2\left(x-\frac{1}{2}\right) + \eta^2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]d^2}. \quad (4)$$

Напомним, что в формулах (3) и (4) символы R_{0+} и R_{0-} обозначают радиусы соответствующих ионов. Теперь можно написать усредненный по координате z потенциал

$$\varphi_{\mathrm{eff}}(x,y;T) = \int\limits_{-d/2}^{-R_-/2}\varphi_{nst}(\mathbf{r};T)dz + \int\limits_{-R_-/2}^{R_-/2}\varphi(\mathbf{r};T)dz + \int\limits_{-R_-/2}^{d/2}\varphi_{nst}(\mathbf{r};T)dz - \int\limits_{-d/2}^{-R_+/2}\varphi_{nst}(\mathbf{r};T)dz - \int\limits_{-R_+/2}^{R_+/2}\varphi(\mathbf{r};T)dz - \int\limits_{-R_+/2}^{d/2}\varphi_{nst}(\mathbf{r};T)dz. \quad (5)$$

После подстановки (1) и (2) в (5) и элементарного интегрирования находим

$$\varphi_{\mathrm{eff}}(x,y;T) = \frac{8e^-}{\pi^2 d}\sum_{\substack{l,n,m=0\\ l+n+m>0}} a_l a_n a_m \frac{e^{-\lambda^2\mu^2}}{m\mu^2}\cos\left(\frac{2\pi}{d}lx\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{d}ny\right)\left\{(-1)^{l+n}\sin\left[\pi m\bar{R}_+(x,y)\right]W^+(l,n,m) + \sin\left[\pi m\bar{R}_-(x,y)\right]W^-(l,n,m)\right\} + \frac{4|e^-|}{\pi d} \times \sum_{\substack{n,l=0\\ n+l>0}} a_l a_n \frac{e^{-\lambda^2\nu^2}}{\nu^2}\cos\left(\frac{2\pi}{d}lx\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{d}ny\right)\left\{(-1)^{l+n} - 1\right\},$$

$$\bar{R}_+(x,y) = R_+(x,y)/d,\ \bar{R}_-(x,y) = R_-(x,y)/d, \quad (6)$$

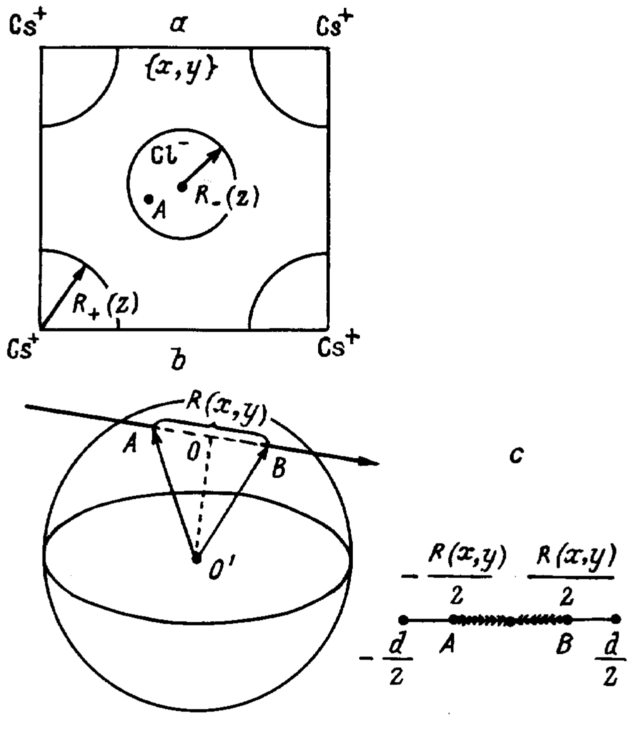

Рис. 1. Двумерное сечение $\{x, y\}$ трехмерной элементарной ячейки кристалла CsCl на глубине z по направлению оси $\langle 100\rangle$: Радиусы сечения ионов шаров определяются соответственно выражениями $R_+(z) = \mathrm{Re}\sqrt{R_{0+}^2 - \left(\frac{d}{2} - z\right)^2}$ и $R_-(z) = \mathrm{Re}\sqrt{R_0^2 - z^2}$; b — пересечение траектории частицы в точках A и B со сферой иона решетки; c — заштрихованная часть показывает участок пути длиной $R(x, y)$, который частица проходит внутри иона.

где

$$\mu^2 = l^2 + n^2 + m^2,\ \nu^2 = l^2 + n^2,\ \lambda \equiv u_{0+}/d = u_{0-}/d,$$

$$a_0 = 1/2,\ a_i = 1\,(i \neq 0),$$

$$W^{\pm}(I, n, m) = \int W^{\pm}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{kR}} d\mathbf{R}. \qquad (6')$$

Отметим, что при получении параметра λ предполагаем, что амплитуды тепловых колебаний равны $u_{0+} = u_{0-}$, что вполне разумно при акустических колебаниях. Для численного анализа выражения (6) необходимо уточнить виды структурных фукнций $W^{+}(l, n, m)$ и $W^{-}(l, n, m)$. Представим плотность заряда внутри иона в виде

$$W^{\pm}(\mathbf{R}) = V^{\pm}(\mathbf{R}) + Z^{\pm}\delta(\mathbf{R}), \qquad (7)$$

где $V^{\pm}(\mathbf{R})$ — расспределение электронов внутри ионов кристалла, $Z^{\pm}$ — число протонов в точечном ядре.

Подставляя (7) в (6′) и предполагая, что расспределение электронного заряда внутри иона обладает сферической симметричностью, для структурного фактора получаем

$$W^{\pm}(l, n, m) = Z^{\pm} + X^{\pm}(l, n, m) \pm 1,$$

$$X^{\pm}(l, n, m) = \frac{4\pi}{k} \int\limits_0^{\infty} V^{\pm}(R) R \sin(kR) dR,\ k = |\mathbf{k}|. \qquad (8)$$

Далее, выбрав в качестве функции $V(R)$ модель Ленца–Иенсена [10,11] с параметрами кристалла CsCl, вычислили выражение (6) для четырех разных значений $\lambda = \{0.001, 0.01, 0.05 \,\text{и}\, 0.1\}$. Как видно из рис. 2, *a–d* вокруг оси $\langle 100 \rangle$ ионов Cl^- для быстрых положительно заряженных частиц существует довольно широкая (шириной $\Delta d \sim 0.25d$) потенциальная яма, глубиной $D_0 = 9.8\,\text{eV}$, которая в широком интервале тепловых колебаний $0.001 \leq \lambda \leq 0.1$, т.е. в широком диапазоне температур, не изменяется. Другими словами, быстрая положительно заряженная частица вокруг оси $\langle 100 \rangle$ ионов Cl^- при соответствующих условиях рассеяния захватывается в режим осевого каналирования. Исходя из симметрии полученного эффективного потенциала (рис. 2, *a–d*) его удобно аппроксимировать фукнцией типа

$$U(\rho) = D_0(e^{-2\alpha\bar{\rho}} - 2e^{-\alpha\bar{\rho}}),$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho},\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (9)$$

где в кристалле CsCl имеем следующие значения для параметров потенциала (9) $D_0 = 9.8\,\text{eV}$, $\alpha = 0.838$ и $\rho_0 = 0.46\,\text{Å}$.

Необходимо отметить, что такая аппроксимация, как показывают сравнения с прямыми численными расчетами, при значениях потенциала $< -4\,\text{eV}$ дает точность не ниже 1%. Заметим также, что при численных расчетах выражения (5) в функциях распределения Ленца–Иенсена использованы параметры ионов Cl^- и Cs^+,

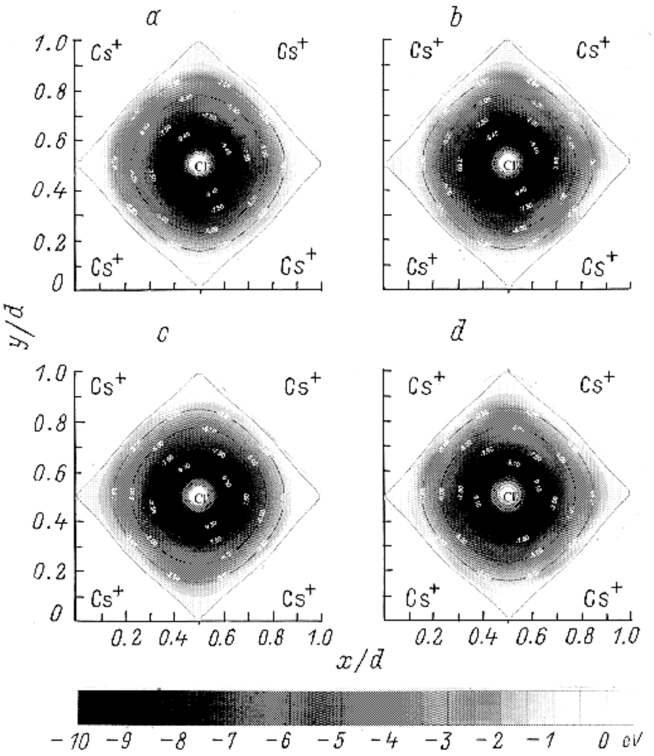

Рис. 2. Профиль эффективного потенциала осевого каналирования позитрона вдоль оси $\langle 100 \rangle$ ионов Cl^- при разных температурах. $\lambda = 0.001$ (a), 0.01 (b), 0.05 (c), 0.1 (d).

близкие по значению параметрам этих ионов в свободном состоянии. В связи с этим следует ожидать, что при применении в расчетах более точных значений для параметров ионов кристалла характеристики поля осевого каналирования позитронов будут улучшаться.

Двумерная релятивистская позитронная система

Волновую функцию позитрона в режиме осевого каналирования можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_z z\right) \Phi(\rho, \varphi),\ \mathbf{r} = (z, \rho, \varphi) \qquad (10)$$

с условием нормировки

$$\int \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(p_z - p'_z)\delta_{nn'}\delta_{mm'},$$

$$\varepsilon < 0 \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (10')$$

где $\delta(P_z - P'_z)$ дельта-функция Дирака, $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера, ε обозначает энергию, $\Phi(\rho, \varphi)$ — волновую функцию связанного состояния.

Подставляя (10) в трехмерное уравнение Шредингера, записанное в цилиндрических координатах (x, ρ, φ),

Таблица 1.

n, m	0	1	2	3
		$E = 5\,\mathrm{MeV}$		
0	$\varepsilon_{00} = -7.986$	$\varepsilon_{01} = -5.893$		
1			$\varepsilon_{12} = -5.611$	
2				
3				

Таблица 2.

n, m	0	1	2	3
		$E = 10\,\mathrm{MeV}$		
0	$\varepsilon_{00} = -8.097$	$\varepsilon_{01} = -7.082$	$\varepsilon_{02} = -4.050$	
1		$\varepsilon_{11} = -9.330$	$\varepsilon_{12} = -5.800$	
2				$\varepsilon_{23} = -8.322$
3				

Таблица 3.

n, m	0	1	2	3
		$E = 20\,\mathrm{MeV}$		
0	$\varepsilon_{00} = -8.368$	$\varepsilon_{01} = -7.873$	$\varepsilon_{02} = -6.388$	$\varepsilon_{03} = -3.918$
1	$\varepsilon_{10} = -8.535$	$\varepsilon_{11} = -7.980$	$\varepsilon_{12} = -6.318$	$\varepsilon_{13} = -3.552$
2				$\varepsilon_{23} = -6.915$
3				

Таблица 4.

n, m	0	1	2	3
		$E = 30\,\mathrm{MeV}$		
0	$\varepsilon_{00} = -8.540$	$\varepsilon_{01} = -8.213$	$\varepsilon_{02} = -7.233$	$\varepsilon_{03} = -5.602$
1	$\varepsilon_{10} = -8.117$	$\varepsilon_{11} = -7.758$	$\varepsilon_{12} = -6.682$	$\varepsilon_{13} = -4.889$
2		$\varepsilon_{21} = -9.789$	$\varepsilon_{22} = -8.616$	$\varepsilon_{23} = -6.662$
3				

Примечание. Значения энергий даны в eV. Те ячейки таблиц, в которых отсутствуют данные, означают, что состояния с такими квантовыми числами не существуют.

находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Phi(\rho,\varphi) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\varepsilon - U(\rho)\right]\Phi(\rho,\varphi) = 0, \qquad (11)$$

где μ — релятивистская масса позитрона.

Теперь, исходя из симметрии потенциала (9), решение (11) представим в виде

$$\Phi(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi\rho}e^{im\varphi}\chi(\rho). \qquad (12)$$

После подстановки (12) в (11) для радиальной волновой функции получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu\rho^2} - U(\rho)\right)\chi = 0. \qquad (13)$$

Дальнейшее исследование уравнения (13) проводится аналогично работе [14]. В связи с тем, что в канале для малых квантовых чисел координата ρ не слишком отличается от ρ_0, центробежный член в (13) удобно разлагать в ряд по степеням параметра $\bar{\rho}$

$$\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu\rho^2} = \frac{m^2}{\gamma_0^2}D_0(c_0 + c_1 e^{-\alpha\bar{\rho}} + c_2 e^{-2\alpha\bar{\rho}}) + O(\bar{\rho}^3), \qquad (14)$$

где введены обозначения

$$c_0 = 1 - \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2}, \quad c_1 = \frac{4}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^2},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2}, \quad \gamma_0^2 = 2\mu\frac{D_0\rho_0^2}{\hbar^2}. \qquad (15)$$

После подстановки (14) в (13) мы приходим к точно решаемой модели квантовой механики [14], для которой радиальная волновая функция имеет вид

$$\chi(\bar{\rho}) = y^s e_1^{-\frac{1}{2}y}F_1(a,c,y),\ y = \frac{2\gamma_0}{\alpha}e^{-\alpha\bar{\rho}},\ s = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad (16)$$

где

$$\beta^2 = \beta_0^2 + m^2 c_0,\ \gamma_1^2 = \gamma_0^2 - \frac{1}{2}mc_1^2,\ \gamma_2^2 = \gamma_0^2 + \frac{1}{2}m^2 c_2,$$

$$\beta_0^2 = -\frac{2\mu\varepsilon\rho_0^2}{\hbar^2} > 0,\ a = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha} + 1\right) - \frac{\gamma_1^2}{\alpha\gamma_2^2}. \qquad (17)$$

Что касается собственных значений, то для них находится выражение [14]

$$\varepsilon_{nm} = \frac{\hbar^2}{2\mu\rho_0^2}\left\{-\gamma_0^2 + \alpha\gamma_0\left(n + \frac{1}{2}\right) - 2^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 - \frac{3(\alpha-1)}{\alpha\gamma_0} \times \left(n + \frac{1}{2}\right)m^2\frac{9(\alpha-1)^2}{4\alpha^4\gamma_0^4}m^4\right\}, \qquad (18)$$

где n — обозначает колебательное квантовое число; m — соответственно квантовое число, характеризующее вращательное движение. В таблицах 1–4 приведены несколько значений энергетического спектра поперечного движения позитрона для полной энергии позитрона E в зависимости от квантовых чисел n (меняется по столбцу) и m (меняется по строке).

Заключение

Как показано выше, положительно заряженные релятивистские частицы в ионных кристаллах типа CsCl вокруг оси $\langle 100 \rangle$ ионов Cl^- могут захватываться в режим осевого каналирования. С помощью численного анализа показано, что потенциал каналирования в этом случае имеет кольцевую симметрию, расположен в областях, далеких от кристаллических осей, и практически не зависит от температуры среды. Последнее может означать, что вклад процессов упругого рассеяния (как когерентного, так и некогерентного) в уширение уровней энергий поперечного движения должен быть незначительным. Другими словами, в этом случае за уширение спектра становятся ответственны другие механизмы, такие как а) неупругие процессы с возбуждением электронов внутри ионов кристалла; б) радиационные переходы между уровнями поперечного движения, в) зонное уширение. Из литературы хорошо известно, что эти механизмы действуют независимо друг от друга.

Следует отметить, что радиационные переходы важны для частиц с очень высокой энергией $E \geq 10\,\mathrm{GeV}$ [15]. Что касается зонного уширения уровней, связанного с периодичностью эффективного потенциала, то оно, как показано в [16], не приводит к непосредственному уменьшению времени жизни частицы на данном уровне и вообще это явление имеет место для уровней с большими значениями квантовых чисел n и m. Из сказанного следует, что в рассматриваемой задаче наиболее важным механизмом уширения спектральных уровней, или наиболее сильным фактором деканалирования, является неупругое рассеяние с возбуждением и ионизацией ионов цепочек.

Таким образом, можно ожидать, что а) позитроны с относительно низкой полной энергией ($E = 5{-}30\,\mathrm{MeV}$) в упомянутых выше условиях будут сверхканалировать, образовав тем самым устойчивые двумерные релятивистские позитронные системы; б) предложенным способом практически из всех позитронов пучка в кристалле можно образовать позитронные системы, что в принципе невозможно осуществить путем перемешивания электронных и позитронных пучков в вакууме [7,8]; в) в условиях рассматриваемой задачи путем внешних воздействий можно сильно изменять параметры позитронной системы, включая создание условий для резонансной анигиляции позитрона с электроном среды; г) перспективным можно считать также исследование осевого каналирования тяжелых положительных ионов.

Авторы благодарят участников теоретического семинара ИППФ НАН Армении за плодотворное обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] *Davies J.A., Friesen J., McIntyre J.D.* // Can. J. Chem. 1960. Vol. 38. P. 1526.
[2] *Robinson M.T., Oen O.S.* // Appl. Phys. Lett. 1963. Vol. 2. R. 30.
[3] *Lindhard J.* // Kgl. Dan. Viden. Sels. Mat. 1965. Vol. 34. N 14.
[4] *Kumakhov M.A.* // Phys. Lett. Ser. A. 1976. Vol. 57. P. 17.
[5] *Beloshitsky V.V., Komarov F.F.* // Phys. Rep. 1982. Vol. 93. P. 117.
[6] *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* // УФН. 1982. Т. 137. С. 605.
[7] *Bertolotti M., Sibilia C.* // Lett. Nuo. Chim. 1978. Vol. 27. N 7. P. 261.
[8] *Bertolotti M., Sibilia C.* // Appl. Phys. 1979. Vol. 19. P. 127.
[9] *Kurizki G., Friedman A.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 18. N 1. P. 512.
[10] *Геворкян А.С.* и др. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 3. С. 54.
[11] *Геворкян А.С.* и др. Препринт Ереванского физического института № ЕрФИ-1051(14)-88. Ереван, 1988. 10 с.
[12] *Геворкян А.С.* и др. // Тез. докл. III Всесоюз. конф. по излучению релятивистских частиц в кристаллах. Нальчик, 1988. С. 2.
[13] *Гамбош П.* Статистическая теория и ее применение. М.: ИЛ, 1951. 398 с.
[14] *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2. М.: Мир, 1974. 341 с.
[15] *Kumakhov M.A., Wedell R.* // Phys. St. Sol. (b). 1979. Vol. 92. P. 65.
[16] *Базылев В.А., Головизин В.В.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. Вып. 4. С. 1204.