01;09

Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции на толстом вибраторе

© А.В. Сочилин, С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
173003 Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 18 октября 1996 г.)

Строгое электродинамическое решение задачи дифракции электромагнитных волн на поверхности вибратора описывается системой интегродифференциальных уравнений. С помощью метода собственных функций сингулярных операторов исходная система сведена к бесконечной алгебраической системе Фредгольма второго рода. На конкретных примерах показана высокая эффективность предлагаемого подхода.

Введение

Решение задач дифракции электромагнитных волн на толстом вибраторе и других произвольных незамкнутых поверхностях сводится к решению систем интегродифференциальных уравнений относительно двух касательных составляющих плотности поверхностных токов. В такой общей постановке решение задач дифракции представляется весьма трудоемкой задачей. К настоящему времени построены численные методы, для которых нет теорем сходимости.

Среди всех произвольных поверхностей можно выделить поверхности, образованные вращением кусочно-гладкой линии — незамкнутые поверхности вращения. Наиболее распространенными в теории антенн являются цилиндрические, сферические, конические поверхности вращения.

Для указанного класса антенн, как будет показано ниже, удается свести задачу к системе двух одномерных интегродифференциальных уравнений. Последняя допускает математически строгое решение. Целью настоящей работы и является анализ систем интегродифференциальных уравнений [1,2].

Для лаконичности изложение будет проведено для цилиндрической поверхности, хотя результаты могут быть обобщены на случай произвольной поверхности вращения.

1. О сингулярных интегральных и интегродифференциальных операторах

Введем в рассмотрение следующие четыре сингулярных оператора

$$(Lu)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1}{|\tau - t|}dt, \tag{1}$$

$$(SLu)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1}{|\tau - t|}dt, \tag{2}$$

$$(SAu)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u(t)\sqrt{1-t^2}\frac{\partial}{\partial t} \ln\frac{1}{|\tau - t|}dt, \tag{3}$$

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} u(t)\sqrt{1-t^2}\frac{\partial}{\partial t} \ln\frac{1}{|\tau - t|}dt. \tag{4}$$

Операторы L и A изучались в [1,3]. Для дальнейшего нам необходимо выбрать пространства, в которых будут действовать все четыре оператора. Введем гильбертово весовое пространство $L_{2,\rho_1}[-1,1]$ с весовой функцией $\rho_1(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2}$ и следующим ортонормированным базисом:

$$\varphi_n(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, & n = 1, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos[(n-1)\arccos(\tau)], & n = 2, 3, \ldots . \end{cases} \tag{5}$$

Оператор L действует в $L_{2,\rho_1}[-1,1]$, при этом справедливо

$$(L_{\varphi_n})(\tau) = \lambda_n\varphi_n(\tau), \quad \lambda_1 = \ln 2,$$
$$\lambda_n = \frac{1}{n-1}, \quad n = 2, 3 \ldots . \tag{6}$$

Наряду с $L_{2,\rho_1}[-1,1]$ введем также весовое пространство $L_{2,\rho_2}[-1,1]$ с весовой функцией $\rho_2(\tau) = (1-\tau^2)^{1/2}$ и следующим ортонормированным базисом:

$$\psi_n(\tau) = \frac{1}{\rho_2(\tau)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin[n\arccos(\tau)], \ n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Оператор A действует в $L_{2,\rho_2}[-1,1]$ и, как показано в [1],

$$(A\psi_n)(\tau) = n\psi_n(\tau), \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Далее рассмотрим оператор SL: $L_{2,\rho_1} \to L_{2,\rho_2}$. Из определения этого оператора и соотношения (6) имеем

$$(SL\varphi_1)(\tau) = 0, \quad (SL\varphi_n)(\tau) = \psi_{n-1}(\tau),$$
$$n = 2, 3, \ldots . \tag{9}$$

Аналогично для оператора SA: $L_{2,\rho_2} \to L_{2,\rho_1}$ вначале интегрированием по частям, а затем, применяя (6), получим

$$(SA\psi_n)(\tau) = \varphi_{n+1}(\tau), \quad \tau = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Таким образом, полностью описаны собственные функции введенных операторов. Попутно заметим, что оператор L является вполне непрерывным, операторы SL, SA являются ограниченными и, наконец, оператор A оказывается симметричным, положительно определенным и имеет плотную область определения. Оператор L возникает в задаче дифракции электромагнитных волн E-поляризации на идеально проводящей ленте. Электрические токи, наводимые волной на обеих сторонах ленты, текут параллельно краю ленты и обращаются в бесконечность при приближении к краю. Функция $\rho_1(\tau)$ описывает это поведение.

В задаче дифракции H-поляризации появляется оператор A. В этом случае токи текут перпендикулярно ребру и обращаются в нуль, так же как и функция $\rho_2(\tau)$. В задаче дифракции на цилиндрическом трубчатом вибраторе токи текут как параллельно ребру, так и перпендикулярно. И как будет видно далее, возникают все четыре сингулярных оператора.

2. Сведение системы двумерных интегродифференциальных уравнений к одномерным системам

Под действием первичного поля $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ на поверхности трубчатого вибратора наводятся токи с плотностью $\mathbf{j}(z,\varphi) = \mathbf{t}_z j_z(z,\varphi) + \mathbf{t}_\varphi j_\varphi(z,\varphi)$, где $\mathbf{t}_z$ и $\mathbf{t}_\varphi$ — единичные орты осей z и φ.

Эти токи создают вторичное поле. Тангенциальная составляющая полного электрического поля должна обращаться в нуль на идеально проводящей поверхности вибратора. Из этого условия выводится система интегродифференциальных уравнений

$$\int\limits_S \left[j_z \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} - k^2 G \right) + j_\varphi \frac{\partial^2 G}{a \partial z \partial \varphi'} \right] dS' = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^0,$$

$$\int\limits_S \left[j_z \left(\frac{\partial^2 G}{a \partial z' \partial \varphi} \right) + j_\varphi \left(\frac{\partial^2 G}{a^2 \partial \varphi \partial \varphi'} - k^2 \cos(\varphi - \varphi') \right) G \right] dS' = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_\varphi^0, \tag{11}$$

где

$$G = \frac{\exp(-ikR)}{4\pi kR} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im(\varphi - \varphi')) S_m(z, z'),$$

$$S_m = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} \cos\left[kx(z - z')\right] I_m\left(\sqrt{x^2 - 1}ka\right) k_m\left(\sqrt{x^2 - 1}ka\right) dx,$$

I_m, K_m — известные модифицированные функции Бесселя.

А теперь разложим функции j_z, j_φ, E_z^0, E_φ^0 в ряды типа Фурье

$$j_z = \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_z^m(z) \exp(-im\varphi),$$

$$\int\limits_0^{2\pi} j_z \exp(im\varphi') a d\varphi' = I_z^m(z'), \tag{12}$$

$$j_\varphi = \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_\varphi^m(z) \exp(-im\varphi),$$

$$\int\limits_0^{2\pi} j_\varphi \exp(im\varphi') a d\varphi' = I_\varphi^m(z'), \tag{13}$$

$$E_z^0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_z^m(z) \exp(-im\varphi),$$

$$E_\varphi^0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_\varphi^m(z) \exp(-im\varphi). \tag{14}$$

Кроме того, учтем соотношения

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{\exp(-i(\varphi - \varphi')) + \exp(i(\varphi - \varphi'))}{2}, \tag{15}$$

$$\cos(\varphi - \varphi') \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m \exp(-im(\varphi - \varphi')) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (S_{m-1} + S_{m+1}) \exp(-im(\varphi - \varphi')). \tag{16}$$

Используя разложения в ряды Фурье, сведем систему двумерных интегродифференциальных уравнений (11) к одномерным системам. Одновременно перейдем к безразмерным переменным. И для простоты записи будем полагать, что l обозначает электрическую длину плеча kl, a обозначает электрический радиус ka. В результате получим систему

$$\int\limits_{-1}^{1} \left[I_z^m \left(\frac{1}{l} \frac{\partial^2 S_m}{\partial \tau \partial t} - l S_m \right) + I_\varphi^m \frac{im}{a} \frac{\partial S_m}{\partial \tau} \right] dt = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^m,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \left[I_z^m \frac{-im}{a} \frac{\partial S_m}{\partial t} + I_\varphi^m \left(\frac{m^2 l}{a^2} S_m - l \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} \right) \right] dt = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_\varphi^m. \tag{17}$$

Систему одномерных интегродифференциальных уравнений (17) нужно решать для тех значений m, при которых отлична от нуля хотя бы одна из функций E_z^m, E_φ^m.

$ka = \pi/2$, $2l = \lambda/2$

	$I_z^{1+}(\tau)$, A		$I_\varphi^{1-}(\tau)$, A	
N	$\mathrm{Re}I_z^{1+}$ $(\tau = 0)$	$\mathrm{Im}I_z^{1+}$ $(\tau = 0)$	$\mathrm{Re}I_\varphi^{1-}$ $(\tau = 0.5)$	$\mathrm{Im}I_\varphi^{1-}$ $(\tau = 0.5)$
1	$-0.566748e-02$	$0.175142e-01$	$0.522298e-02$	$-0.602222e-02$
2	$-0.535253e-02$	$0.184216e-01$	$0.579558e-02$	$-0.722241e-02$
3	$-0.535591e-02$	$0.184216e-01$	$0.578001e-02$	$-0.722189e-02$
4	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578012e-02$	$-0.722199e-02$
5	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578013e-02$	$-0.722204e-02$
6	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578011e-02$	$-0.722196e-02$
7	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578011e-02$	$-0.722198e-02$
8	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578012e-02$	$-0.722200e-02$
9	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578012e-02$	$-0.722200e-02$
10	$-0.535609e-02$	$0.184550e-01$	$0.578012e-02$	$-0.722200e-02$

$ka = \pi/20$, $2l = \lambda/2$

	$I_z^{1+}(\tau)$, A		$I_\varphi^{1-}(\tau)$, A	
N	$\mathrm{Re}I_z^{1+}$ $(\tau = 0)$	$\mathrm{Im}I_z^{1+}$ $(\tau = 0)$	$\mathrm{Re}I_\varphi^{1-}$ $(\tau = 0.5)$	$\mathrm{Im}I_\varphi^{1-}$ $(\tau = 0.5)$
1	$0.144909e-02$	$0.268091e-04$	$0.766654e-04$	$-0.824154e-06$
2	$0.118926e-02$	$0.256874e-04$	$-0.267393e-04$	$-0.613851e-06$
3	$0.126772e-02$	$0.265931e-04$	$0.472215e-05$	$-0.234514e-06$
4	$0.124767e-02$	$0.263769e-04$	$0.839380e-05$	$-0.193556e-06$
5	$0.125030e-02$	$0.264077e-04$	$0.575925e-05$	$-0.224640e-06$
6	$0.125100e-02$	$0.264145e-04$	$0.501021e-05$	$-0.232928e-06$
7	$0.125043e-02$	$0.264086e-04$	$0.514708e-05$	$-0.231323e-06$
8	$0.125061e-02$	$0.264105e-04$	$0.535972e-05$	$-0.228936e-06$
9	$0.125059e-02$	$0.264103e-04$	$0.531475e-05$	$-0.229437e-06$
10	$0.125058e-02$	$0.264102e-04$	$0.530634e-05$	$-0.229540e-06$
11	$0.125059e-02$	$0.264103e-04$	$0.530094e-05$	$-0.229606e-06$

3. Разбиение задачи на четную и нечетную. Выделение сингулярных операторов

В представлении функции S_m интегралом Фурье

$$S_m(\tau, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} \cos[lx(\tau - t)] \times I_m(\sqrt{x^2-1}a)K_m(\sqrt{x^2-1}a)dx \qquad (18)$$

спектральная плотность $I_m K_m$ является четной функцией по x. Используя это, а также вид системы (17), разобьем последнюю на две системы. Представим функции E_z^m, E_φ^m в виде

$$E_z^m(z) = E_z^{m+}(z) + E_z^{m-}(z), \quad E_z^{m\pm}(\pm z) = \pm E_z^{m\pm}(z),$$

$$E_\varphi^m(z) = E_\varphi^{m+}(z) + E_\varphi^{m-}(z), \quad E_\varphi^{m\pm}(\pm z) = \pm E_\varphi^{m\pm}(z).$$

На основе этого представления разобьем столбец правых частей системы (17) на два столбца

$$\begin{pmatrix} E_z^m \\ E_\varphi^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{m+} \\ E_\varphi^{m-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_z^{m-} \\ E_\varphi^{m+} \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Используя представление (19), а также свойство четности ядер, систему (17) сведем к двум независимым системам. В первой ее будем называть четной задачей, функция I_z^m является четной, а функция I_φ^m — нечетная. Во второй системе — наоборот. Далее будем рассматривать четную задачу. Нечетная задача исследуется аналогично.

Используя асимптотику модифицированных функций Бесселя

$$I_m(x)K_m(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{16x^3} + \ldots, \quad x \to +\infty \qquad (20)$$

выделим логарифмическую особенность у функции S_m

$$S_m(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2 a} \ln\frac{1}{|\tau - t|} + N_m(\tau, t). \qquad (21)$$

Свойства функции $N_m(\tau, t)$ следуют из представления (20). Первые частные производные $\partial N_m/\partial\tau$, $\partial N_m/\partial t$ являются непрерывными функциями. Вторая частная производная $\partial^2 N_m/\partial\tau\partial t$ имеет логарифмическую особенность. Кроме того, в разложении (20) присутствуют только слагаемые с нечетными степенями $(1/x)$. Перейдем от функций I_z^{m+} и I_φ^{m-} к новым функциям

$$I_z^{m+}(\tau) = \rho_2(\tau)u^+(\tau), \quad I_\varphi^{m-}(\tau) = \rho_1(\tau)\nu^-(\tau). \qquad (22)$$

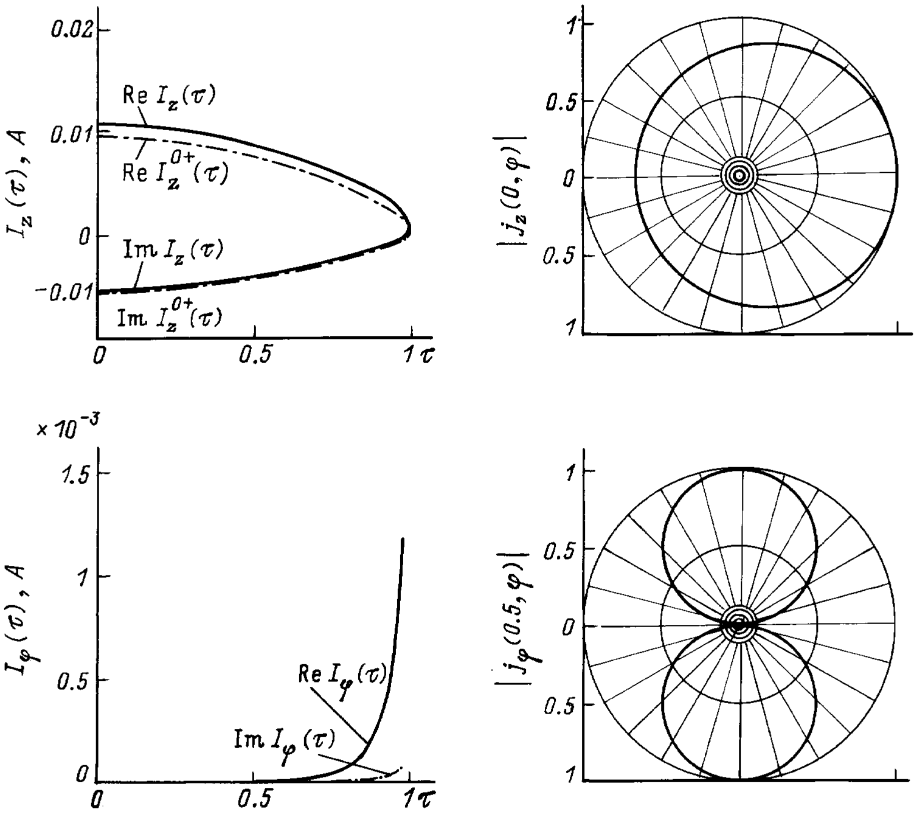

Рис. 1. $Ka = \pi/20$, $2l = \lambda/2$.

Индекс m далее опустим, так как будем изучать систему для фиксированного m. Функции $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$ описывают поведение токов вблизи ребра согласно условиям Мейкснера. С другой стороны, эти функции обеспечивают ортогональность, как показано в разделе 1.

Таким образом, прослеживается глубокая связь между условиями Мейкснера не ребре и собственными функциями сингулярных операторов задач дифракции на тонких экранах. А теперь на основе представления (21) выделим сингулярные операторы простой формы у всех четырех сингулярных интегродифференциальных операторов, описывающих систему (17). И запишем систему в операторном виде

$$\frac{1}{l}Au^+ + N^{11}u^+ + \frac{im}{a}SL\nu^- + N^{12}\nu^- = e^+,$$

$$\frac{-im}{a}SAu^+ + N^{21}u^+ + \left(\frac{m^2 l}{a^2} - l\right)L\nu^- + N^{22}\nu^- = h^-. \quad (23)$$

Операторы A, SL, SA, L определены в разделе 1. Операторы $N^{pq}(p, q = 1, 2)$ являются интегральными операторами вида

$$(N^{p1}u^+)(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} u^+(t)\rho_2(t)N^{p1}(\tau, t)dt, \quad p = 1, 2, \quad (24)$$

$$(N^{p2}\nu^-)(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} \nu^-(t)\rho_1(t)N^{p2}(\tau, t)dt, \quad p = 1, 2. \quad (25)$$

Свойства функции $N^{pq}(\tau, t)$ определяются свойствами функции $N_m(\tau, t)$. Так, функция $N^{11}(\tau, t)$ имеет логарифмическую особенность, $N^{12}(\tau, t)$ и $N^{21}(\tau, t)$ являются непрерывными, а их частные производные имеют логарифмическую особенность. Свойства функции $N^{22}(\tau, t)$ такие же, как и функции $N_m(\tau, t)$.

Систему (23) будем рассматривать в пространстве $L_{2,\rho_2} \oplus L_{2,\rho_1}$, которая является прямой суммой гильбертовых пространств L_{2,ρ_2} и L_{2,ρ_1}.

Таким образом, получена система одномерных интегродифференциальных уравнений и изучена в отдельности структура каждого сингулярного оператора.

4. Сведение к матричной системе Фредгольма второго рода

Для изучения структуры системы (23) перейдем от операторной системы к эквивалентной матричной системе. Разложим неизвестные функции $u^+(\tau)$ и $\nu^-(\tau)$ по базисным функциям

$$u^+(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\psi_{2n-1}(\tau), \quad (26)$$

$$\nu^-(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sqrt{2n-1}\varphi_{2n}(\tau). \quad (27)$$

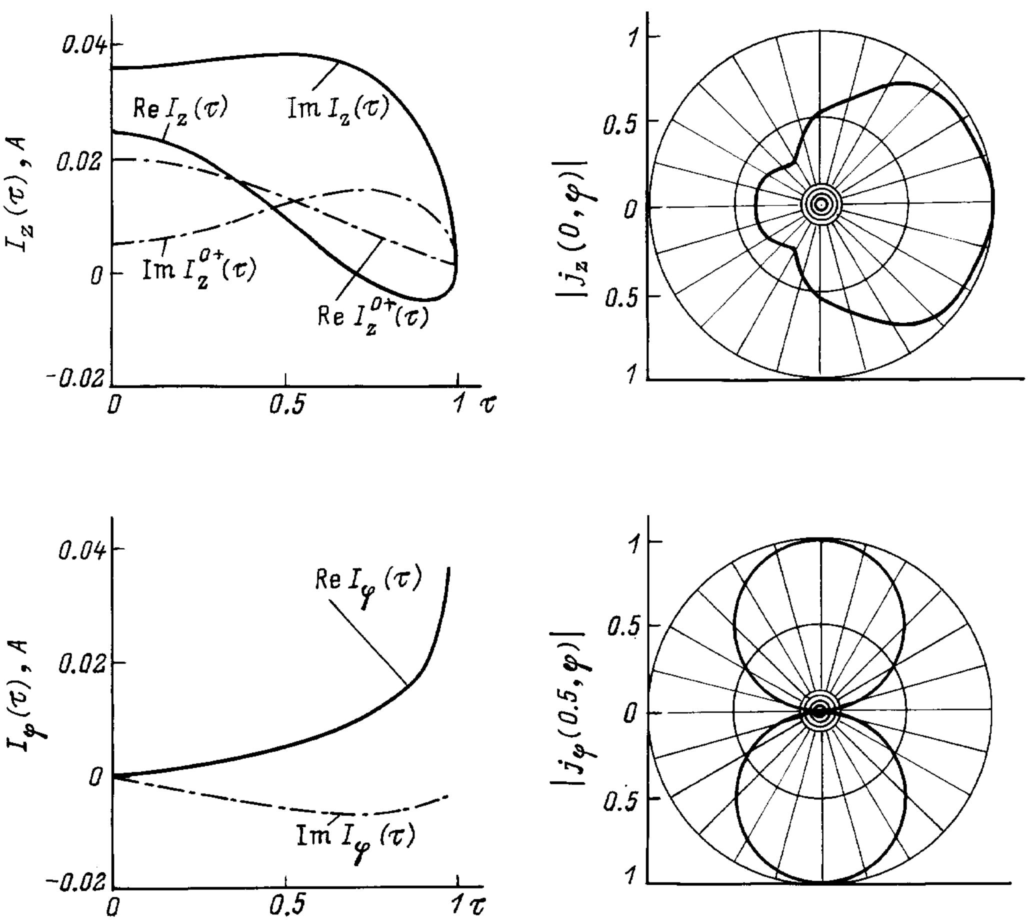

Рис. 2. $Ka = \pi/2, 2l = \lambda$.

После подстановки (26) и (27) в (23) умножим первое уравнение системы на функции $\psi_{2n-1}(\tau)/\sqrt{2n-1}$ в пространстве L_{2,ρ_2}, а второе уравнение умножим на функции $\sqrt{2n-1}\varphi_{2n}(\tau)$ в пространстве L_{2,ρ_1}. В результате получим матричную систему, которую будем рассматривать в пространстве $l_2 \oplus l_2$ (l_2 — гильбертово пространство последовательностей)

$$a^{11}c_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m N_{mn}^{11} + a^{12}d_n + \sum_{m=1}^{+\infty} d_m N_{mn}^{12} = e_n,$$

$$a^{21}c_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m N_{mn}^{21} + a^{22}d_n + \sum_{m=1}^{+\infty} d_m N_{mn}^{22} = h_n,$$

$$1 \leqslant n < +\infty, \tag{28}$$

где

$$a^{11} = \frac{1}{l}, \quad a^{12} = \frac{im}{a}, \quad a^{21} = -\frac{im}{a}, \quad a^{22} = \frac{m^2 l}{a^2} - l.$$

Базисные функции подобраны таким образом, чтобы a^{ij} не зависели от n. Числа $N^{pq}(p, q = 1, 2)$ являются матричными элементами операторов N^{pq} в соответствующих гильбертовых пространствах, а числа e_n, h_n представляют коэффициенты разложения правых частей по базисным функциям.

Заметим, что при $m = 0$, что соответствует осесимметричному возбуждению вибратора, система (28) разбивается на два независимых матричных уравнения. А для остальных m преобразуем систему (28). С этой целью разрешим систему относительно c_n и d_n и сведем к каноническому виду

$$c_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \hat{N}_{mn}^{11} + \sum_{m=1}^{+\infty} d_m \hat{N}_{mn}^{12} = \hat{e}_n,$$

$$d_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \hat{N}_{mn}^{21} + \sum_{m=1}^{+\infty} d_m \hat{N}_{mn}^{22} = \hat{h}_n. \tag{29}$$

Легко заметить, что матричные элементы $\hat{N}_{mn}^{pq}$ образованы линейными комбинациями матричных элементов N_{mn}^{pq} и сохраняют свойства этих элементов. Доказана следующая теорема: система двух матричных уравнений (29) является системой Фредгольма второго рода.

В заключении этого раздела отметим, что развитый здесь подход применим к задачам дифракции на произвольной незамкнутой поверхности вращения.

5. Результаты численных расчетов

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны на вибраторе. Источником первичного поля является нить электрического тока единичной амплитуды, которая расположена параллельно оси вибратора и на большом по сравнению с длиной волны расстоянии от вибратора.

Эффективность предлагаемого в работе метода показана в таблице, где приведены результаты расчета токов первой гармоники ($m = 1$). Анализ результатов показывает, что для $ka = \pi/2$ и $2l = \lambda/2$ (λ — длина волны) значение $I_z^{1+}(\tau)$ сходится с точностью трех знаков при $N = 2$ и шесть знаков при $N = 4$ (N — число базисных функций). Значение $I_\varphi^{1-}(\tau)$ сходится медленнее: 3 и 8 базисных функций для трех и шести значащих цифр. Исследование сходимости токов других гармоник так же показало высокую скорость сходимости метода усечения.

Далее, как показали расчеты, на поверхности тонких вибраторов наводятся только аксиальные токи и определяются они нулевой гармоникой. Даже для вибратора с радиусом $a = \lambda/40$ азимутальные токи слабо возбуждаются всюду, за исключением концов вибратора, ребер, где токи обращаются в бесконечность согласно условиям Мейкснера (рис. 1). Дальнейшее увеличение радиуса вибратора приводит к следующим закономерностям (рис. 2).

На рисунках приняты следующие обозначения:

$$I_z(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_z^{m+}(\tau), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m > 0, \end{cases}$$

$$I_\varphi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} 2 I_\varphi^{m-}(\tau).$$

Для определения аксиальных токов уже недостаточно нулевой гармоники. Аксиальные токи более интенсивно возбуждаются со стороны падения первичной волны. Одновременно растет функция азимутальных токов. Вибратор начинает излучать вдоль своей оси, и в этом принципиальное отличие неосесимметричного возбуждения электрически толстого вибратора от осесимметричного возбуждения.

Список литературы

[1] *Плотников В.Н., Радциг Ю.Ю., Эминов С.И.* // ЖВММФ. 1994. Т. 34. № 1. С. 68–77.

[2] *Sochilin A.V., Eminov S.I.* // "Mathematikal Methods in Electromagnetic Theory (MMET-94)" Kharkov, 1994. P. 426–429.

[3] *Радциг Ю.Ю., Сочилин А.В., Эминов С.И.* // Деп. в ВИНИТИ. № 2640-В93. М., 1993. 18 с.