

01;09

Решение дисперсионных уравнений для планарных волноводов в случае комплексных корней

© А.А. Романенко, А.Б. Сотский

Институт прикладной оптики АН Белоруссии,
212793 Могилев, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 30 апреля 1996 г.)

Изложен метод расчета комплексных корней нелинейного уравнения, сводящий решение задачи к вычислению квадратур. Рассмотрены приложения метода к исследованию дисперсионных зависимостей для различных открытых волноведущих структур с комплексной диэлектрической проницаемостью. Проанализированы возможности призмного возбуждения мод, которым соответствуют корни дисперсионных уравнений, расположенные на различных римановых листах. Получено решение обратных задач по восстановлению комплексных постоянных распространения мод и определению параметров пленок, направляющих волноводные и вытекающие моды. Решение основано на обработке угловой зависимости коэффициента отражения в схеме призмного возбуждения.

Введение

Строгое нахождение комплексных корней дисперсионных уравнений имеет принципиальное значение в электродинамической теории открытых волноводов. Несмотря на давнюю историю этой проблемы, она не получила еще удовлетворительного разрешения. Этим объясняется наличие ряда альтернативных вычислительных подходов. Сюда относятся различные интерационные [1–4] и градиентные [5,6] методы. Их общими недостатками является необходимость задания достаточно точного нулевого приближения для корня и вычисления производных от дисперсионных уравнений, что представляет собой в ряде случаев достаточно сложную задачу. Кроме того, существенной для сходимости оказывается гладкость входящих в уравнения функций, которые тем не менее могут претерпевать разрывы на линиях разрывов. Принципиально также требование невырожденности корней.

В настоящей работе предложен свободный от этих ограничений метод строгого вычисления комплексных корней дисперсионных уравнений для планарных волноводов с произвольным распределением комплексной диэлектрической проницаемости. Метод представляет собой развитие результатов работы [7]. Он основан на технике контурного интегрирования и позволяет найти все корни нелинейного уравнения $f(u) = 0$ в области аналитичности функции $f(u)$.

1. Метод расчета комплексных корней нелинейных уравнений

Предположим, что требуется найти корни уравнения $f(u) = 0$ в односвязной замкнутой области G комплексной переменной u , ограниченной контуром C . Предположим также, что в данной области функция $f(u)$ является аналитической. Полное число корней m (с учетом их кратности) может быть найдено на основании принципа

аргумента [8], согласно которому m равно полному изменению аргумента величины $W = f(u)$ при обходе контура C , деленному на 2π . Допустим вначале, что все корни не кратные. Если $m = 1$, то, рассчитав численно интегралы $I_c^{(0)}$ и $I_c^{(1)}$, где

$$I_c^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u^k du}{f(u)},$$

и воспользовавшись теоремой о вычетах, найдем значение корня $u_1 = I_c^{(1)}/I_c^{(0)}$. Если $m > 1$, то, последовательно сужая область и подсчитывая на каждом шаге изменения аргумента W , придем к области G_1 , ограниченной контуром C_1 , в которой располагается $m - 1$ корень. Для выпавшего корня получаем

$$u_1 = \left[I_{c_1}^{(1)} - I_c^{(1)} \right] / \left[I_{c_1}^{(0)} - I_c^{(0)} \right].$$

Повторяя процесс, последовательно находим все корни. Заметим, что расчет изменения аргумента величины W сводится к подсчету числа пересечений границ координатных четвертей. Он может быть выполнен параллельно с накоплением интегральных сумм, что способствует вычислительной эффективности метода.

Получим обобщение расчетной схемы на случай присутствия двукратного корня u_0 . Эту ситуацию мы рассмотрим как предельную при $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_0$, где u_1 и u_2 — однократные корни. Допустим, что в области G оказалось два корня. Введем в дополнение к интегралам $I_c^{(0)}$ и $I_c^{(1)}$ интегралы $I_c^{(2)}$ и $I_c^{(3)}$. Воспользовавшись теоремой о вычетах, приходим к системе четырех уравнений

$$I_c^{(k)} = u_1^k [f'(u_1)]^{-1} + u_2^k [f'(u_2)]^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

с четырьмя неизвестными u_1 , u_2 , $f'(u_1)$, $f'(u_2)$. Ее решение имеет вид

$$u_{1,2} = a/2 \pm \sqrt{(a/2)^2 - b}, \quad (2)$$

$$a = \frac{I_c^{(1)} I_c^{(2)} - I_c^{(0)} I_c^{(3)}}{[I_c^{(1)}]^2 - I_c^{(0)} I_c^{(2)}}, \quad (3)$$

$$b = \frac{[I_c^{(2)}]^2 - I_c^{(3)} I_c^{(1)}}{[I_c^{(1)}]^2 - I_c^{(0)} I_c^{(2)}}. \quad (4)$$

Воспользовавшись разложениями Тейлора функции $f(u)$ и ее производных, получаем

$$f'(u_1) = -\frac{1}{2} f''(u_1) \Delta u - \frac{1}{6} f'''(u_1) (\Delta u)^2 + 0 [(\Delta u)^3], \quad (5)$$

$$f'(u_2) = \frac{1}{2} f''(u_1) \Delta u + \frac{1}{6} f'''(u_1) (\Delta u)^2 + 0 [(\Delta u)^3], \quad (6)$$

$$f''(u_2) = f''(u_1) + f'''(u_1) \Delta u + 0 [(\Delta u)^2], \quad (7)$$

где $\Delta u = u_2 - u_1$. При учете (5)–(7) выражения (1) приводятся к виду

$$I_c^{(0)} = -\frac{2}{3} \frac{f'''(u_1)}{f''(u_1)} + 0(\Delta u),$$

$$I_c^{(1)} = \frac{2}{f''(u_1)} + u_1 I_c^{(0)} + 0(\Delta u),$$

$$I_c^{(2)} = \frac{4u_1}{f''(u_1)} + u_1^2 I_c^{(0)} + 0(\Delta u),$$

$$I_c^{(3)} = \frac{6u_1^2}{f''(u_1)} + u_1^3 I_c^{(0)} + 0(\Delta u).$$

Отсюда следует, что $a^2/4 \rightarrow b$, и $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_0 = a/2$ при $\Delta u \rightarrow 0$. В случае $m > 2$ необходимо вновь обратиться к сужению области. Если в области G_1 окажется $m - 2$ корня, то значения двух выпавших корней могут быть рассчитаны по формулам (2)–(4) после замен $I_c^{(k)} \rightarrow I_c^{(k)} - I_{c_1}^{(k)}$. При этом для двукратного корня вновь получаем $u_0 = a/2$.

Сочетанием описанных расчетных схем могут быть найдены все, не более чем двукратно вырожденные корни уравнения $f(u) = 0$. Аналогично можно рассмотреть случай l -кратного вырождения ($l > 2$), вычисляя интегралы $I_c^{(k)}$, где $k = 0, 1, \dots; 2l - 1$. Соответствующие выражения достаточно громоздки и здесь не приводятся. Основанием для этого служит то, что корни дисперсионных уравнений для планарных волноводов, как правило, не вырождены и лишь в редких ситуациях, встречающихся при рассмотрении анизотропных волноводов и систем связанных волноводов, двукратно вырождены.

2. Решение дисперсионных уравнений

Рассмотрим волновод, представляющий собой слоистую среду с комплексной диэлектрической проницаемостью, заключенную в области $-d \leq y \leq 0$ и окруженную однородными средами с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_g ($y > 0$) и ε_s ($y < -d$). Дисперсионное уравнение для мод, поля которых зависят от

времени и координаты z как $\exp(i\omega t - ihz)$, имеет вид [7,9]

$$F_\nu = i\psi(0)\nu + \psi'(+0) = 0, \quad (8)$$

где $\psi(y)$ имеет смысл компоненты E_x для TE - и H_x для TM -мод, $\nu = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_g - h^2}$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число вакуума.

При получении (8) выбрана зависимость $\psi(y) = \psi(0) \exp(-i\nu y)$, $y \geq 0$. Для задания входящих в (8) величин воспользуемся методом стратификации, представив волновод совокупностью n однородных слоев [10]. В этом случае величины $\psi'(+0)$, $\psi(0)$ могут быть рассчитаны из рекуррентных соотношений [7]

$$\psi_{j+1} = \psi_j K + \psi'_j S, \quad (9)$$

$$\psi'_{j+1} = (\varepsilon_{j+1}/\varepsilon_j)^T (\psi'_j K - \psi_j \nu_j^2 S), \quad (10)$$

$$\psi_1 = 1, \quad (11)$$

$$\psi'_1 = i\nu_1 (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^T, \quad (12)$$

где $S = \sin(\nu_j \Delta y_j)/\nu_j$; $K = \cos(\nu_j \Delta y_j)$; $\nu_j = \sqrt{k^2 \varepsilon_j - h^2}$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_s$, $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_g$; $\psi_{n+2} = \psi(0)$; $\psi'_{n+2} = \psi'(+0)$; ε_j и Δy_j — диэлектрическая проницаемость и толщина j -го слоя; $T = 0$ для TE - и $T = 1$ для TM -мод, причем в области $y < -d$ использовано представление поля $\psi(y) = \exp[i\nu_i(y + d)]$.

В частном случае однородного пленочного волновода ($n = 1$) уравнение (8) с учетом (9)–(12) приводится к виду

$$F_\nu = \left[\nu_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_s} \right)^T + \nu \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_g} \right)^T \right] \cos(\nu_2 d) + i \left[\nu_2 + \frac{\nu_1 \nu}{\nu_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_s \varepsilon_g} \right)^T \right] \sin(\nu_2 d) = 0. \quad (13)$$

В качестве неизвестной уравнений (8), (13) удобно выбрать величину $u = \nu_1$. Тогда $\nu_j = \sqrt{k_0^2 (\varepsilon_j - \varepsilon_s) + u^2}$ ($j = 2, \dots; n + 2$; $\nu_{n+2} = \nu$). В соответствии с выражениями (8)–(13) функция $F_\nu(u)$ ограничена (в конечной части комплексной плоскости) и инвариантна относительно выбора знаков величин ν_j ($j < n + 2$), при этом неаналитичность данной функции связана только с наличием точек ветвления и разрезов функции $\nu(u)$. Неаналитичность устраняется, если перейти к рассмотрению произведения

$$f(u) = F_\nu(u) F_{-\nu}(u), \quad (14)$$

являющегося целой функцией переменной u [9]. Корни уравнения (14) совпадают с корнями уравнений (8), (13), соответствующих двум ветвям функции $\nu(u)$ (например, ветвям $\text{Im } \nu \leq 0$ и $\text{Im } \nu \geq 0$). Заметим, что при $\nu \neq 0$ уравнение (14) и уравнения $F_{\pm\nu}(u) = 0$ имеют корни одинаковой кратности. Действительно, кратность корней возрастает, если выполняется система $F_\nu(u) = 0$,

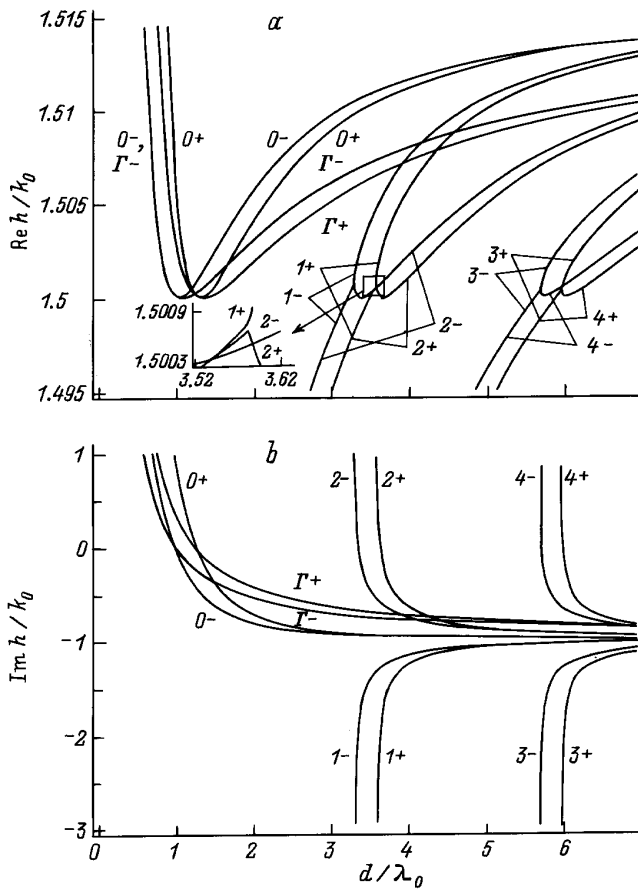


Рис. 1. Дисперсионные зависимости для мод однородного и неоднородного волновода. *a* — $\text{Re } h/k_0$, *b* — $\text{Im } h/k_0$.

$F_{-\nu}(u) = 0$, из которой в соответствии с (8) следует $\psi(0) = 0, \psi'(+0) = 0$ ($\nu \neq 0$). При этом решение задачи Коши для дифференциального уравнения, описывающего поле моды, дает $\psi(y) \equiv 0, \psi'(y) \equiv 0$, что противоречит условиям (11), (12). Случай же $\nu \neq 0$ допускает отдельное аналитическое рассмотрение. Заметим также, что из выражение (8)–(12) следует, что если $d \neq 0$, то величина $|W|$ экспоненциально возрастает при $|u| \rightarrow \infty$. В этом случае число корней уравнения (14) $m = 0(r)$ при $r \rightarrow \infty$, где r — радиус окружности C [9], т.е. при рассмотрении в качестве G всей комплексной плоскости число m неограниченно велико. Если же $d = 0$, то из (13) получаем, что $m = 2$ при $T = 1, m = 0$ при $T = 0$ и $\varepsilon_g \neq \varepsilon_s, m = 1$ при $T = 0$ и $\varepsilon_g = \varepsilon_s$.

С использованием метода, изложенного в первом разделе, нами получены решения уравнения (14) для ряда волноведущих структур. На рис. 1, *a, b* представлены типичные зависимости $h = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - \nu^2}$ ($\text{Re } h \geq 0$) от d/λ_0 . Они получены для мод TE -поляризации однородного волновода с $\varepsilon_s = 2.25 - i3 \cdot 10^{-6}, \varepsilon_2 = 2.295225 - i3.03 \cdot 10^{-6}, \varepsilon_g = 1$. Значки ”+” и ”-” на рисунках относятся к зависимостям, для которых $\text{Im } \nu \geq 0$ и $\text{Im } \nu \leq 0$ соответственно. Для кривых $1\pm, 3\pm,$

$\text{Im } \nu_1 > 0, \text{Re } \nu_1 > 0$. При этом зависимости $1+, 3+$, для которых $\text{Re } \nu > 0$, соответствует волнам, вытекающим из волновода в обе открытые области $y > 0$ и $y < -d$, а $1-, 3-$ ($\text{Re } \nu < 0$) — волнам, вытекающим только в области $y < -d$. Для кривых $0\pm, 2\pm, 4\pm$ выполняется неравенство $\text{Re } \nu_1 < 0$. Данные кривые на рис. 1, *a* имеют точки касания с линией $\text{Re } h/k_0 = 1.5$. Этим точкам соответствуют критические толщины, $d = d_k$ (k — символ кривой). При $d > d_k$ имеем $\text{Re } \nu < 0, \text{Im } \nu_1 < 0$ ($k = 0-, 2-, 4-$) или $\text{Re } \nu > 0, \text{Im } \nu_1 < 0$ ($k = 0+, 2+, 4+$). В этом случае кривые $0-, 2-, 4-$ описывают обычные дисперсионные зависимости для волноводных мод, а кривые $0+, 2+, 4+$ соответствуют волнам, вытекающим из волновода в область $y > 0$. При $d < d_k$ имеем $\text{Re } \nu > 0, \text{Im } \nu_1 > 0$ ($k = 0-, 2-, 4-$) или $\text{Re } \nu < 0, \text{Im } \nu_1 > 0$ ($k = 0+, 2+, 4+$). В этом случае кривые $0-, 2-, 4-$ соответствуют волнам, приходящим к волноводу из области $y < -d$ (они возрастают при $y \rightarrow -\infty$), а затем уходящим от волновода в область $y > 0$ и спадающим при $y \rightarrow \infty$, а кривые $0+, 2+, 4+$ соответствуют волнам, приходящим к волноводу из обеих открытых областей и возрастающим при $|y| \rightarrow \infty$. Особенностью всех этих волн является рост поля при $z \rightarrow \infty$ ($\text{Im } h > 0$, рис. 1, *b*). Из представленного обсуждения следует, что наборы зависимостей $(1\pm, 2\pm)$ и $(3\pm, 4\pm)$ соответствуют модам, имеющим подобные свойства. Решение уравнения (14) показало, что увеличение d приводит к появлению новых наборов $(5\pm, 6\pm), (7\pm, 8\pm), \dots$, аналогичных данным. Указанные особенности поведения дисперсионных зависимостей и полей мод сохраняются также и для мод TM -поляризации. Подобны они и при рассмотрении неоднородных волноводов. Последнее иллюстрируется кривыми $\Gamma+$ и $\Gamma-$ на рис. 1, *a, b*, рассчитанными для TE -мод волновода профиля $\varepsilon(y) = 2.25 - i3 \cdot 10^{-6} + (0.045225 - i2.73 \cdot 10^{-5}) \exp[-(y/d)^2], y \leq 0, \varepsilon(y) = \varepsilon_g = 1, y > 0$. Эти кривые аналогичны рассмотренным выше кривыми $0+$ и $0-$. Отметим, однако, что полученные результаты характерны для волноводов, имеющих повышенную по сравнению с окружающими средами диэлектрическую проницаемость. Дисперсионные зависимости для волноведущих сред с пониженной проницаемостью (например, металлических пленок на диэлектрических подложках и низкопреломляющих пленок на высокопреломляющих подложках) имеют определенные отличия. Их мы коснемся ниже. Заметим также, что обсуждавшиеся неравенства $\text{Im } \nu_1 > 0, \text{Im } \nu > 0$ отвечают модам с экспоненциально возрастающими при удалении от волновода полями. Такие моды не входят в полные наборы мод [9], поэтому необходимо выяснить возможности их возбуждения и практического использования.

Рассмотрим возбуждение мод с помощью призмного устройства связи [11,12]. Схема этого устройства представлена на рис. 2. Призма p (для простоты рассмотрения неограниченная) отделена от волновода буферным слоем толщины g . Призма и буферный слой имеют

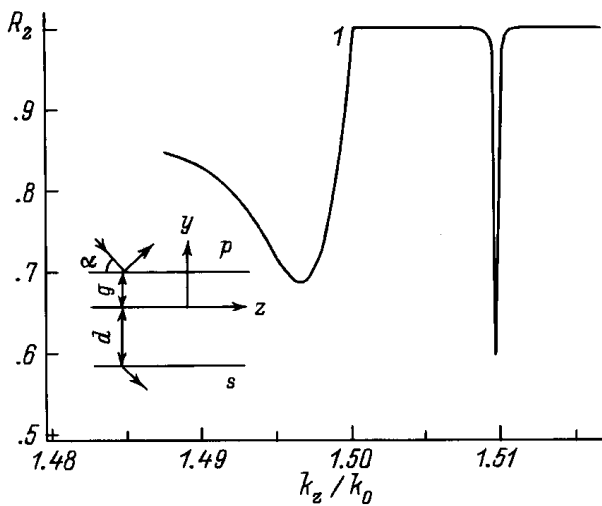


Рис. 2. Схема призмного устройства возбуждения и зависимость коэффициента отражения возбуждающей волны от z -составляющей ее волнового вектора при $\epsilon_p = 3.811$.

вещественные диэлектрические проницаемости ϵ_p и ϵ_g , причем $\epsilon_g < \epsilon_p$. Структура возбуждается плоской волной, волновой вектор которой составляет угол α с основанием призмы. Рассматривая рекуррентные соотношения (9), (10) в буферном слое, получаем для коэффициента отражения возбуждающей волны выражение

$$R = \frac{(1 - \delta)F_\nu - \exp(-2i\nu g)(1 + \delta)F_{-\nu}}{(1 + \delta)F_\nu - \exp(-2i\nu g)(1 - \delta)F_{-\nu}},$$

$$\delta = (\nu/\nu_p)(\epsilon_p/\epsilon_g)^T, \quad \nu = \sqrt{k_0^2 \epsilon_g - k_z^2}, \quad \text{Im } \nu \leq 0,$$

$$\nu_p = \sqrt{k_0^2 \epsilon_p - k_z^2}, \quad \text{Re } \nu_p \geq 0, \quad k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_p} \cos \alpha. \quad (15)$$

Величины $F_\nu, F_{-\nu}$ могут быть рассчитаны из (8)–(13), где $\nu_j = \sqrt{k_0^2 \epsilon_j - k_z^2}$ и в соответствии с условием излучения $\text{Re } \nu_1 \geq 0$.

Известно, что эффективное возбуждение волноводных мод, характеризующееся появлением резонансных провалов в зависимости $R_2(k_z)$ ($R_2 = |R|^2$), имеет место при условиях слабой связи призмы с волноводом [11,12]

$$k_z^2 > k_0^2 \epsilon_g, \quad (16)$$

$$\exp(-i\nu g) \ll 1. \quad (17)$$

В соответствии с выражениями (8)–(13), (15)–(17) величина R_2 может заметно отличаться от 1, если только $F_\nu = 0[\exp(-2i\nu g)]$. Учитывая, что переменная k_z в (15) принадлежит вещественной оси риманова листа $\text{Re } \nu_1 > 0$, заключаем, что данное условие может быть выполнено, если существует область H , определяемая неравенством $|k_z - h| < \rho$ (h — постоянная распространения возбуждаемой моды, $\rho = 0[\exp(-2i\nu g)]$) и содержащая в себе отрезок вещественной оси листа

$\text{Re } \nu_1 > 0$, в которой функция $F_\nu(k_z)$ аналитична. Представленные соображения согласуются с тем очевидным фактом, что резонансное возбуждение допускают только моды, имеющие спадающие при удалении от волновода в буферный слой поля, постоянные распространения которых удовлетворяют уравнению $F_\nu(h) = 0$.

О свойствах аналитичности функции $F_\nu(k_z)$ в окрестности корней позволяют судить рис. 3, а, б. Сплошными кривыми на них представлены зависимости $\text{Im } k_z(\text{Re } k_z)$ (эквивалентные $\text{Im } h(\text{Re } h)$) для корней уравнения $F_\nu(k_z) = 0$. Штриховыми линиями обозначены разрезы для функции $\nu_1(k_z)$, определяемые условиями $\text{Im } k_z = k_0^2 \text{Im } \epsilon_s / (2 \text{Re } k_z)$, $k_0^2 \text{Re } \epsilon_s - (\text{Re } k_z)^2 + (\text{Im } k_z)^2 < 0$. Разрезы проходят ниже вещественных осей $\text{Im } k_z = 0$. Кривые 0–4 соответствуют одноименным кривым рис. 1, а, б. Из рис. 3, а следует, что оказаться в области H могут только отрезки кривых 1–, 3–, расположенные левее точки

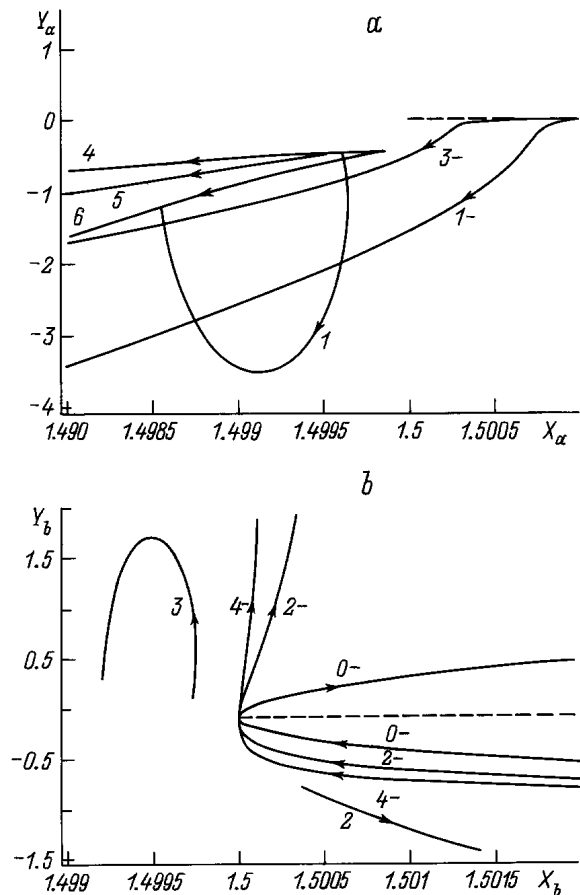


Рис. 3. Расположение корней уравнения $F_\nu(k_z) = 0$ на римановых листах $\text{Re } \nu_1 > 0$ (а) и $\text{Re } \nu_1 < 0$ (б). $X_{a,b} = A_{a,b} + B_{a,b} \text{Re } k_z/k_0$, $Y_{a,b} = C_{a,b} + D_{a,b} \text{Im } k_z/k_0$; $A_{a,b} = 0$, $B_{a,b} = 1$, $C_{a,b} = 0$, $D_a = 10^3$, $D_b = 10^5$ для кривых 0–4–; 1– $A_a = 1.494$, $B_a = 5.45 \cdot 10^{-3}$, $C_a = -0.44$, $D_a = 30$; 2– $A_b = 1.498$, $B_b = 1.47 \cdot 10^{-3}$, $C_b = -0.72$, $D_b = 19.7$; 3– $A_b = 1.497$, $B_b = 2.65 \cdot 10^{-3}$, $C_b = 9.77 \cdot 10^{-2}$, $D_b = 14.8$; 4–6– $A_a = 4.35 \cdot 10^{-2}$, $B_a = 1$, $C_a = 0$, $D_a = 4 \cdot 10^4$. Стрелками указаны направления убывания d .

ветвления функции $\nu_1(k_z)$. Аналогичная ситуация имеет место для отрезков кривых 0–, 2–, 4–, расположенных ниже разреза. В этом случае область H принадлежит двулистной римановой поверхности, склеенной по берегам разреза. Обратившись теперь к рис. 1, a, b заключаем, что эффективное возбуждение волноводных мод, возможно только при толщинах волноводной пленки, превышающих критические ($d > d_k$). Вместе с тем при $d < d_k$ могут наблюдаться резонансные провалы, соответствующие возбуждению вытекающих мод, относящихся к зависимостям 1–, 3– и их аналогам 5–, 7–, ... Эти выводы иллюстрируются на рис. 2 кривой 1, рассчитанной на основании выражений (9)–(12), (15) при $d/\lambda_0 = 3$, $g/\lambda_0 = 0.16$. Ее правый минимум соответствует волноводной (0–), а левый — вытекающей (1–) моде.

Рассмотрим теперь вопрос о призмном возбуждении мод пленок, имеющих пониженную по сравнению с окружающими средами вещественную часть диэлектрической проницаемости. Кривыми 1–3 на рис. 3, a, b представлены решения уравнения $F_\nu(k_z) = 0$ для TM -мод оптического диапазона, направляемых серебряной пленкой ($\varepsilon_2 = -18 - i0.47$), окруженной диэлектрическими средами ($\varepsilon_g = 1$, $\varepsilon_s = 2.25 - i3 \cdot 10^{-6}$). На кривой 1 имеем $\text{Re } \nu_1 > 0$, $\text{Im } \nu_1 > 0$, т.е. она относится к волнам, вытекающим в область $y < -d$. Начало кривой ($d \rightarrow \infty$) соответствует плазмонной моде границы раздела $y = 0$, а конец ($d \rightarrow 0$) — поверхностной волне границы раздела двух диэлектриков. Кривая 2, вдоль которой $\text{Re } \nu_1 < 0$, $\text{Im } \nu_1 < 0$, начинается в точке, соответствующей плазмонной моде границы раздела $y = -d$ и уходит в бесконечность ($\text{Re}(k_z/k_0) \rightarrow \infty$, $\text{Im}(k_z/k_0) \rightarrow -\infty$) при $d \rightarrow 0$. На кривой 3 имеем $\text{Re } \nu_1 < 0$, $\text{Im } \nu_1 > 0$. Она относится к волнам, приходящим к волноводу из области $y < -d$ и имеющим возрастающие поля при $y \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow \infty$. В соответствии с вышеизложенным резонансное возбуждение допускают моды, соответствующие кривым 1 и 2. Дополнительным ограничением для такого возбуждения служит условие (16), исключаящее, в частности, возможность возбуждения поверхностной волны границы раздела двух диэлектриков. Зависимостями 4–6 на рис. 3, a представлены решения уравнения $F_\nu(k_z) = 0$ для трех низших TE -мод оптического диапазона, направляемых пленкой двуокиси кремния ($\varepsilon_2 = 2.121975 - i2.9134 \cdot 10^{-6}$), граничащей с воздухом ($\varepsilon_g = 1$) и кремниевой подложкой ($\varepsilon_s = 15.21 - i0.39$). Для всех этих зависимостей $\text{Re } \nu_1 > 0$, $\text{Im } \nu_1 > 0$, т.е. они относятся к модам, вытекающим в подложку. Кривые 4–6 начинаются в точке $k_z/k_0 = \sqrt{\varepsilon_2}$ ($d \rightarrow 0$), которая значительно удалена от разреза функции $\nu_1(k_z)$ (расположенного вне поля рисунка). Соответственно все рассмотренные моды допускают резонансное возбуждение. Сделанные выводы подтверждены нами расчетами зависимостей $R_2(k_z)$, для которых характерны резонансные провалы (подобные представленным на рис. 2), соответствующие возбуждению указанных мод.

3. Обратные задачи восстановления комплексных постоянных распространения мод и параметров волноведущих пленок

Измерение комплексных постоянных распространения мод h играет важную роль при исследовании свойств волноводов и приповерхностных слоев. Для определения h в настоящее время широко используется подход, основанный на экспериментальной регистрации резонансных провалов в зависимостях $R_2(k_z)$ [13–16]. В данном подходе, однако, учитывается довольно ограниченная информация об этих зависимостях: измеряются только координаты минимумов функций $R_2(k_z)$, которые отождествляются с вещественными частями постоянных распространения $\text{Re } h$. Величины $\text{Im } h$ определяют в дополнительных измерениях, наблюдая затухание мод вдоль направления их распространения [14]. Такая процедура определения h достаточно трудоемка в экспериментальном плане и имеет принципиальный недостаток, который заключается в отсутствии учета возмущающего влияния призмы на исследуемую структуру.

Одним из важных приложений волноводных методов является восстановление параметров волноведущих пленок. В этом случае использование значений h для двух мод с известными номерами позволяет записать систему двух дисперсионных уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, численное решение которой дает величины ε_2 и d [13,14]. При этом, однако, в случае строгого решения системы возникают трудности, обусловленные наличием точек ветвления и разрезов для обратных тригонометрических функций. Данная проблема особенно существенна при использовании мод, находящихся при условиях, близких к критическим.

Ниже представлены более эффективные подходы к решению упомянутых обратных задач. Одновременное нахождение вещественной и мнимой частей постоянной распространения моды планарной волноведущей структуры (в общем случае неоднородной) осуществляется с учетом возмущающего влияния призмы путем интегрирования зависимости $R_2(k_z)$ в окрестности резонансных провалов. Величины ε_2 и d определяются системой уравнений (13), взятых при двух значениях h . Решение системы сводится к нахождению корней целых функций рассмотренным выше способом.

С использованием разложения Тейлора функции $F_\nu(k_z)$ в области H может быть получено следующее приближение для зависимости $R(k_z)$ в окрестности резонансов [7]:

$$R = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} - \frac{4\delta}{1 - \delta^2} \frac{\Delta h}{k_z - \bar{h}} + O(|\Delta h|). \quad (18)$$

Здесь величина δ вычисляется при $k_z = \text{Re } h$, \bar{h} — постоянная распространения моды системы волновод–призма, $\Delta h = \bar{h} - h$. Выражение (18) определено в случае возбуждения произвольной плоскослоистой вол-

ведущей структуры, при этом

$$\Delta h = -\frac{i\nu(1-\delta)\exp(-2i\nu g)}{(\varepsilon_g)^T(1+\delta)I\operatorname{Re}h}, \quad (19)$$

$$I = \int_{-d}^{\infty} \frac{\psi^2(y)}{[\varepsilon(y)]^T} dy + \frac{\psi^2(-d)}{2i\nu_1(\varepsilon_s)^T}, \quad (20)$$

где функция $\psi(y)$ с нормировкой $\psi(0) = 1$ описывает распределение поля возбуждаемой моды $\nu_1 = \sqrt{k_0^2\varepsilon_s - h^2}$, $\nu = -i\sqrt{(\operatorname{Re}h)^2 - k_0^2\varepsilon_g}$.

Для решения обратной задачи нахождения h удобно ввести параметры [17]

$$p_1 = \frac{\operatorname{Im}\bar{h}}{k_0}, \quad (21)$$

$$p_2 = -\frac{2\delta\nu\exp(-2i\nu g)}{(\varepsilon_g)^T(1-\delta)Ik_0\operatorname{Re}h}, \quad (22)$$

$$p_4 = \frac{\operatorname{Re}\bar{h} - k_z}{k_0}, \quad (23)$$

характеризующие затухание моды нагруженной призмой структуры, связь призмы с волноводом и отстройку z -составляющей волнового вектора возбуждающей волны от резонансного значения $\operatorname{Re}\bar{h}$. Параметр p_2 является, вообще говоря, комплексной величиной, т.е. $p_2 = |p_2|\exp(i\sigma)$. Однако в представляющем основной практический интерес случае слабо затухающих мод выполняются неравенства $|\operatorname{Re}I| \gg |\operatorname{Im}I|$, $\sigma \ll 1$. Это позволяет опустить в дальнейших выкладках малые $0(\sigma^2)$. Учитывая выражения (18)–(23), находим

$$R_2 = |R|^2 = 1 + \left[4|p_2|(p_1 + |p_2| - p_4\sigma) \right] / (p_1^2 + p_4^2). \quad (24)$$

Из (24) следует, что наличие затухания мод ($\sigma \neq 0$) приводит к асимметрии в зависимости $R_2(p_4)$, степень которой возрастает с ростом потерь (рис. 2). Определим координату минимума функции $R_2(p_4)$, которую мы обозначим через $p_4^{(0)}$. Продифференцировав выражение (24), получаем

$$p_4^{(0)} = -\frac{p_1^2\sigma}{2(|p_2| + p_1)}, \quad (25)$$

$$R_2^{(0)} = 1 + \frac{4|p_2|(p_1 + |p_2|)}{p_1^2}, \quad (26)$$

где $R_2^{(0)} = R_2(p_4^{(0)})$.

Из (26) следует, что

$$|p_2| = 0.5p_1 \left[\operatorname{sign}(g/g_0 - 1) \sqrt{R_2^{(0)} - 1} \right]. \quad (27)$$

Здесь g_0 — толщина буферного слоя, при которой $R_2^{(0)} = 0$. Для нахождения параметров p_1 и σ выделим

интервал $(p_4^{(0)} - \Delta k_z/k_0, p_4^{(0)} + \Delta k_z/k_0)$ изменения величины p_4 и составим интегралы

$$I_1 = \int_{-\Delta k_z/k_0}^0 R_2(p_4^{(0)} + x) dx, \quad I_2 = \int_0^{\Delta k_z/k_0} R_2(p_4^{(0)} + x) dx,$$

где $R_2(p_4)$ — функция вида (24).

Вычислив величины $(I_1 + I_2)/2$ и $(I_1 - I_2)/2$, получаем

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{1}{2\Delta k_z} \int_{-\Delta k_z}^{\Delta k_z} R_2(k_z^{(0)} + x) dx \right] \left[1 - R_2^{(0)} \right]^{-1} \\ & = \frac{p_1 k_0}{\Delta k_z} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta k_z}{p_1 k_0} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma & = \left[\int_{-\Delta k_z}^0 R_2(k_z^{(0)} + x) dx - \int_0^{\Delta k_z} R_2(k_z^{(0)} + x) dx \right] \\ & \times \left\{ 4k_0|p_2| \left[\left(1 + (k_0 p_1 / \Delta k_z)^2 \right)^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \ln \left(1 + (\Delta k_z / (k_0 p_1))^2 \right) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $R_2(k_z)$ — экспериментально регистрируемая функция на интервале $(k_z^{(0)} - \Delta k_z, k_z^{(0)} + \Delta k_z)$, $k_z^{(0)}$ — координата минимума этой функции.

Таким образом, отождествив величину $R_2^{(0)}$ с минимальным значением функции $R_2(k_z)$, мы можем определить значение параметров p_1 , p_2 , $p_4^{(0)}$. При этом первоначально решается уравнение (29) относительно p_1 , имеющее единственный корень ввиду монотонности функции $f(x) = x \operatorname{arctg}(x^{-1})$ в области $x \leq 0$. Последующее нахождение величин p_2 и $p_4^{(0)}$ осуществляется по формулам (25), (27), (29) прямым расчетом. Согласно (21)–(23), искомая постоянная распространения моды

$$h = k_z^{(0)} + p_4^{(0)} + i \left[p_1 - p_2(1 - \delta)^2(2\delta)^{-1} \right]. \quad (30)$$

Заметим, что величина δ в (30) зависит от $\operatorname{Re}h$. Однако ввиду малости $|p_4^{(0)}|$, $|p_1|$, $|p_2|$ она может быть взята при $\operatorname{Re}h = k_z^{(0)}$ и, если это необходимо, уточнена методом итераций. Заметим также, что использование операций интегрирования в выражениях (28), (29) обеспечивает устойчивость восстанавливаемой величины h по отношению к шумам функции $R_2(k_z)$.

Обратимся теперь к вопросу восстановления параметров волноводной пленки ε_2 и d . Предположим, что найдены значения h для двух мод, заданы значения ε_g и ε_s , величина ε_2 находится в области G комплексной плоскости, а d — в промежутке (d_1, d_2) . Зафиксируем некоторое d из данного промежутка и подставим первое из значений h в уравнение (13). Нетрудно

№ моды	Поляризация	h/k_0 (точное)	g/λ_0	h/k_0 (восстановленное)	№ моды	ε_2 (восстановленные)	
						ε_2	d/λ_0
Волноводная пленка $\varepsilon_2 = 2.295225 - i3.03 \cdot 10^{-5}$, $d/\lambda_0 = 5$							
1	TE_W	$1.512636 - i9.819 \cdot 10^{-6}$	0.28	$1.512636 - i9.819 \cdot 10^{-6}$	1-2	$2.295225 - i3.030 \cdot 10^{-5}$	4.99998
2	TE_W	$1.505806 - i8.999 \cdot 10^{-6}$	–	$1.505805 - i8.999 \cdot 10^{-6}$	1-3	$2.295222 - i3.030 \cdot 10^{-5}$	5.00089
3	TM_W	$1.512560 - i9.805 \cdot 10^{-6}$	–	$1.512560 - i9.806 \cdot 10^{-6}$	2-3	$2.295225 - i3.030 \cdot 10^{-5}$	4.99999
Волноводная пленка $\varepsilon_2 = 2.295225 - i3.03 \cdot 10^{-5}$, $d/\lambda_0 = 3$							
1	TE_W	$1.509681 - i9.295 \cdot 10^{-6}$	0.16	$1.509674 - i9.296 \cdot 10^{-6}$	1-2	$2.295251 - i3.031 \cdot 10^{-5}$	2.9943
2	TE_L	$1.498070 - i3.363 \cdot 10^{-3}$	–	$1.498177 - i3.585 \cdot 10^{-3}$	1-3	$2.295090 - i3.029 \cdot 10^{-5}$	3.0131
3	TM_W	$1.509436 - i9.223 \cdot 10^{-6}$	–	$1.509432 - i9.222 \cdot 10^{-6}$	2-3	$2.295269 - i3.031 \cdot 10^{-5}$	2.9937
Серебряная пленка $\varepsilon_2 = -18 - i0.47$, $d/\lambda_0 = 0.06$							
1	TM_L	$1.031124 - i4.595 \cdot 10^{-3}$	1.6	$1.031198 - i4.668 \cdot 10^{-3}$	1-2	$-18.0039 - i0.4694$	0.06014
2	TM_W	$1.625144 - i4.617 \cdot 10^{-3}$	0.16	$1.624916 - i4.595 \cdot 10^{-3}$			
Пленка двуокиси кремния $\varepsilon_2 = 2.121975 - i2.913 \cdot 10^{-5}$, $d/\lambda_0 = 3$							
1	TE_L	$1.448039 - i2.524 \cdot 10^{-4}$	0.32	$1.448039 - i2.526 \cdot 10^{-4}$	1-2	$2.121977 - i2.966 \cdot 10^{-5}$	2.99981
2	TE_L	$1.421781 - i9.937 \cdot 10^{-4}$	–	$1.421779 - i9.960 \cdot 10^{-4}$	1-3	$2.121977 - i2.967 \cdot 10^{-5}$	2.99983
3	TE_L	$1.377055 - i2.279 \cdot 10^{-3}$	–	$1.377052 - i2.290 \cdot 10^{-3}$	2-3	$2.121981 - i3.517 \cdot 10^{-5}$	2.99984

видеть, что функция $F_\nu(\varepsilon_2)$ является целой, поэтому ее корни в области G могут быть найдены по схеме раздела 1. Заметим, что таких корней, вообще говоря, может быть несколько (при рассмотрении в качестве G полной комплексной плоскости их количество в силу экспоненциальной асимптотики $F_\nu(\varepsilon_2)$ при $|\varepsilon_2| \rightarrow \infty$ не ограничено [9]). Обозначим полученные корни через $\varepsilon_{2j}^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots$). Решив аналогичным образом уравнение (13), при втором значении h будем иметь другой набор корней $\varepsilon_{2k}^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Перебором разностей $\Delta_{jk} = |\varepsilon_{2j}^{(1)} - \varepsilon_{2k}^{(2)}|$ может быть найдена величина $\Delta = \min_{j,k}(\Delta_{jk})$. Построив теперь функцию $\Delta(d)$, $d \in (d_1, d_2)$ и определив ее минимум, мы придем к искомому значению ε_2 и d .

В таблице представлены примеры реализации описанной расчетной схемы для рассмотренных выше волноводных пленочных структур. Данные получены при использовании в качестве "экспериментальных" строго рассчитанных зависимостей $R_2(k_z)$ (приведенной на рис. 2 и аналогичных ей). Величины Δk_z выбирались из условия $R_2(k_z^{(0)} + \Delta k_z) = (1 + R_2^{(0)})/2$. В первой колонке таблицы приведены условные номера мод. Поляризация мод обозначена символами TE_p и TM_p , где $p = w$ для направляемых и $p = L$ для вытекающих мод. Заметим, что с ростом $|\text{Im } h|$ возрастает величина $|\Delta h|$, что ведет к снижению точности приближения (18). Рост $|\Delta h|$ следует из выражений (19)–(22) при учете того факта, что получение контрастных резонансных провалов в зависимости $R_2(k_z)$ возможно, если $|p_2| \sim |\text{Im } h|/k_0$. Последнюю оценку нетрудно получить, сопоставив соотношения (19), (22), (26) и учитывая неравенство $\sigma \ll 1$. Вместе с тем все приведенные в таблице данные получены при значениях g , для которых

$R_2^{(0)} < 0.75$. Сделанное замечание объясняет видимый рост погрешности решения обратных задач, сопровождающий рост потерь использованных мод. Отметим также возможность восстановления параметров одномодовых (при фиксированной поляризации) волноводных пленок по значениям h для волноводной и вытекающей мод (строки 4–6 таблицы). Точность такого восстановления оказывается более высокой, чем в случае использования величины h для направляемых мод ортогональных поляризаций, поскольку в этом случае система дисперсионных уравнений плохо обусловлена.

Список литературы

- [1] Talisa S.H. // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1985. Vol. 33. N 10. P. 967–971.
- [2] Borland W.S., Zelman D.E., Radens C. et al. // IEEE J. Quant. Electron. 1987. Vol. 23. N 7. P. 1172–1179.
- [3] Hulse C., Knoeser A. // IEEE J. Quant. Electron. 1992. Vol. 28. N 12. P. 2682–2684.
- [4] Shaw J.K., Jordan A.K., Winfrey W.R. // J. Opt. Soc. Am. A. 1993. Vol. 10. N 6. P. 1157–1167.
- [5] Burton F.A., Cassidy S.A. // J. Lightwave Tech. 1990. Vol. 8. N 12. P. 1843–1849.
- [6] Schlereth K.H., Tack M. // IEEE J. Quant. Electron. 1990. Vol. 26. N 4. P. 627–630.
- [7] Романенко А.А., Сотский А.Б., Хомченко А.В. // Препринт ИФ АНБ. № 649. Минск, 1991. 31 с.
- [8] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [9] Шевченко В.В. // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 11. С. 2004–2020.
- [10] Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
- [11] Ulrich R. // J. Opt. Soc. Am. 1970. Vol. 60. N 10. P. 1337–1350.

- [12] Дерюгин Л.Н., Марчук А.Н., Сотин В.Е. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1970. Т. 13. № 8. С. 973–980.
- [13] Singh B.P., Prasad P.N. // J. Opt. Soc. Am. B. 1988. Vol. 5. N 2. P. 453–456.
- [14] Никит А.К., Тищенко А.А., Черняй А.И. // Зарубежная радиоэлектроника. 1990. № 10. С. 14–30.
- [15] Yang F., Sambles J.R. // J. Opt. Soc. Am. B. 1993. Vol. 10. N 5. P. 858–866.
- [16] Yang F., Sambles J.R., Bradberry G.B. // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 78. N 4. P. 2187–2192.
- [17] Сотский А.Б., Хомченко А.В., Сотская Л.И. // Опт. и спектр. 1995. Т. 78. Вып. 3. С. 502–511.