01

Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности

© И.П. Гук

Институт импульсных процессов и технологий АН Украины,
327018 Николаев, Украина

(Поступило в Редакцию 11 ноября 1996 г.)

Получены аналоги уравнения Лагранжа для частиц, эволюция которых происходит в пространстве фрактальной размерности. Рассмотрены два случая: 1) когда пространство образовано множеством материальных точек (так называемый фрактальный континуум) и 2) когда пространство представляет собой истинный фрактал. Во втором случае был привлечен формализм дробного интегродифференцирования и предложен новый принцип для построения теории фракталов — обобщенный принцип наименьшего действия, посредством которого и получено уравнение Лагранжа. Построены функции Лагранжа для свободной частицы и замкнутой системы взаимодействующих частиц, движущихся в фрактальном континууме.

Введение

Такие физические процессы, как взрыв проводников и пробой диэлектриков, принадлежат к одному классу — классу критических явлений. Описание таких процессов осуществляется при помощи методов теории критических явлений, ренормализационной группы и разложений в ряд по теории приближений [1,2]. Одним из важнейших положений теории критических явлений является гипотеза масштабной инвариантности, что по сути дела означает введение в пространство новой симметрии — симметрии подобия. Это положение составляет основу метода ренормализационной группы. Однако сейчас для нас важнее то обстоятельство, что введение в пространство свойства подобия (точнее, самоподобия) позволяет отнести его к объектам с фрактальной структурой. Поэтому представляет интерес описание процессов взрыва проводников и пробоя диэлектриков в рамках концепции фракталов.

Теоретические исследования различных физических явлений на фракталах (точнее, на системах фрактального типа) и внутри фракталов в настоящее время предполагается на основе формализма дробного интегродиференцирования [3–5], нестандартного анализа [6] и др. Мотивацией является следующее утверждение [4]: распространение частиц и волн по истинным фрактальным средам должно описываться иными, более общими уравнениями, переходящими для гладких сред в традиционные линейные.

В настоящее время различные исследования фракталов (как концепции) переходят на новый уровень — к систематизации и упорядочению накопленной информации. Постепенно вырисовываются методы и возможности новых теорий [4,5,7]. Однако нехватка фундаментальных принципов сдерживает построение общей теории фракталов. Так же сдерживающим фактором является отсутствие общепринятого математического аппарата для рассмотрения проблем фракталов. В работах [4,8] предлагается в этом качестве использовать формализм дробного интегродифференцирования.

В данной работе на основе принципа наименьшего действия получено уравнение движения частицы в фрактальном континууме (определение в разделе 1). Если же пространство (или пространственный объект) представляет собой истинный фрактал, то уравнение движения получено на основе обобщенного принципа наименьшего действия, который предлагается в качестве фундаментального для построения теории фракталов. В пространстве фрактальной размерности вводятся понятие инерциальной фрактальной системы отсчета, аналоги преобразований Галилея и принципа относительности Галилея. Построена также функция Лагранжа для свободной частицы и замкнутой системы взаимодействующих частиц, движущихся в фрактальном континууме.

1. Модифицированный формализм Лагранжа

Пусть у нас есть множество материальных точек, которые составляют пространство, где может быть обнаружена наблюдаемая точечная частица в процессе ее эволюции. Наделим введенное множество точек свойством самоподобия и назовем такое множество фрактальным континуумом.

Теперь сформулируем задачу: описать движение некоторой материальной точки в фрактальном континууме. Для того чтобы ввести некоторый аналог действия обычной механики [9], необходимо добавить следующее условие для переменной t (время) она должна "сканировать" все феномены движения. Для этого необходимо выполнение следующего условия: обобщенные координаты должны быть непрерывной функцией вместе с первой производной по сканирующей переменной. Теперь предлагается ввести обобщенный принцип наименьшего действия.

2. Обобщенный принцип наименьшего действия

Пусть у нас есть набор обобщенных координат κ и так называемая сканирующая переменная τ, по которой непрерывен набор координат κ и их первые производные. Иными словами, эволюция обобщенных координат наблюдается в терминах τ. Скорость изменения κ определяется обычной производной $d\kappa/d\tau$. Теперь предположим, что состояние системы полностью описывается заданием всего набора обобщенных координат и обобщенных скоростей κ_τ. Тогда обобщенный принцип наименьшего действия можно сформулировать следующим утверждением: каждая механическая система характеризуется определенной функцией $L(\kappa, \kappa_\tau, \tau)$, непрерывной вместе с первой производной, и функцией τ. Движение системы осуществляется при следующем условии.

Пусть при значениях сканирующей переменной $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ система занимает положения, характеризуемые двумя наборами значений обобщенных координат $\kappa_{\{1\}}$ и $\kappa_{\{2\}}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L(\kappa, \dot{\kappa}_\tau, t) d\tau \tag{1}$$

имел минимально возможное значение (точнее, экстремальное значение). Функцию L назовем обобщенной функцией Лагранжа, а S — обобщенным действием.

3. Уравнение Лагранжа в терминах дробного интегродифференцирования

Будем рассматривать движение некоторой системы как эволюцию в терминах сканирующей переменной τ (когда τ — время, то мы говорим о временнóй эволюции, в общем случае τ не отождествляется с временем). По стандартной схеме проварьируем действие (например, [10])

$$\delta S = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L(\kappa + \delta\kappa, \kappa_\tau + \delta\kappa_\tau, \tau) d\tau - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \tau_1 L(\kappa, \kappa_\tau, \tau) d\tau = 0. \tag{2}$$

В результате получим уравнение Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \kappa} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \kappa_\tau} = 0. \tag{3}$$

На этом этапе заметим, что в случае фрактального континуума взаимосвязь обобщенных координат κ_l и координат обычного пространства x_l имеет скейлинговый характер, а сканирующая переменная τ является временем t (в простейшем случае типа $\kappa_l \sim x_l^D$, где l нумерует координаты, d — фрактальная размерность). Поэтому при переходе к лабораторной системе отсчета обычного пространства получаются уравнения типа (представляет собой аналог уравнения Лагранжа в фрактальном континууме)

$$\frac{\partial L}{\partial x_l^D} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{\tau_l}^D}\right) = 0. \tag{4}$$

Совершим предельный переход от фрактального континуума к истинному фракталу посредством перехода от гладкой функции $L(\kappa, \kappa_\tau, \tau)$ ко всюду недифференцируемой фрактальной функции $L(x, \dot{x}, t)$. Переход осуществим путем замены обычных производных производными дробного порядка Римана–Лиувилля

$$\hat{D}_x^D[L(x, \dot{x}, t)] - \frac{d}{dt}\hat{D}_{\dot{x}}^D[L(x, \dot{x}, t)] = 0. \tag{5}$$

Выражение (5) является аналогом уравнения Лагранжа в терминах дробного интегродифференцирования.

4. Принцип относительности в фрактальном континууме

Предположим, что, для того чтобы фрактальный континуум был однороден и изотропен относительно "инерциальной" системы отсчета, необходимо, чтобы эта система отсчета сама была бы фракталом той же размерности, что и фрактальный континуум. Для определенности будем называть такую систему отсчета инерциальной фрактальной системой отсчета, инерциальной в том смысле, что фрактальный континуум относительно нее будет однородным и изотропным, а сканирующая переменная τ — однородной.

Вид функции Лагранжа $L(\kappa, \dot{\kappa}_\tau, t)$ свободной материальной точки в инерциальной фрактальной системе отсчета определяется следующими соображениями: однородность фрактального континуума и сканирующей переменной означает, что L не содержит в явном виде зависимость от κ и τ, изотропность же говорит о том, что нет зависимости от направления вектора обобщенной скорости (иными словами L зависит от скалярной величины, образованной компонентами обобщенной скорости, например $\Sigma_l \kappa_\tau^l \kappa_{\tau l}$), т.е. $L = L(|\kappa_\tau|^2)$. Уравнения Лагранжа в этом случае принимают вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \kappa_\tau^l} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \kappa_\tau^l} = \text{const}, \tag{6}$$

где индекс l нумерует компоненты обобщенных координат (скоростей).

Здесь учтено, что в предположении однородности фрактального континуума $\partial L/\partial \kappa^l = 0$. Уравнение (6) имеет следующее решение

$$\kappa_\tau^l = \text{const}. \tag{7}$$

Таким образом, в инерциальной фрактальной системе отсчета любая свободная материальная точка движется так, что компоненты обобщенной скорости сохраняются. Этот результат представляет собой обобщение известного в классической механике закона инерции.

Теперь рассмотрим две различные инерциальные фрактальные системы отсчета: K и K$'$, вторая из которых движется с постоянной обобщенной скоростью $\{X^l_\tau\}$. Материальная точка имеет в системах отсчета K и K$'$ наборы обобщенных координат: $\{\kappa_l\}$, $\{\kappa'_l\}$. Между наборами координат существует взаимосвязь (эволюция сканирующей переменной предполагается одинаковой в обеих инерциальных фрактальных системах отсчета)

$$\kappa^l = \kappa'^l + X^l_\tau \tau, \quad \tau = \tau'. \tag{8}$$

Преобразования обобщенных координат (8) аналогичны известным преобразованиям Галилея. Требование инвариантности уравнений движения механики в фрактальном континууме по отношению к преобразованиям (8) является обобщением принципа относительности Галилея.

5. Функция Лагранжа свободной материальной точки

При построении механики в пространстве с нецелочисленной размерностью будем иметь в виду, что при асимптотическом переходе к обычному пространству (одно-, двух-, трехмерному) вид функций и уравнений, описывающих движение материальной точки, должен совпадать с классическими выражениями.

Приступим к построению функции Лагранжа свободной материальной точки, движущейся в фрактальном континууме. Рассуждения аналогичны [8]. Функция L свободной материальной точки не зависит от сканирующей переменной τ, обобщенных координат κ и от направления вектора обобщенной скорости. Таким образом, L зависит от квадрата модуля обобщенной скорости

$$L \sim |\kappa_\tau|^2. \tag{9}$$

Взаимосвязь с лабораторной системой координат, в которой положение точки определяется координатой x, определяется соотношением (α — коэффициент пропорциональности)

$$\kappa = \alpha x^D, \quad \kappa_\tau = \alpha x^{D-1} x_\tau. \tag{10}$$

Функция Лагранжа свободной материальной точки последовательно приводится к виду

$$L = \frac{m' \kappa_\tau^2}{2}, \tag{11}$$

$$L = \frac{m}{2}(x^{D-1} x_\tau) = L = \frac{mv^2}{2} x^{2D-2},$$
$$m = m'\alpha^2, \quad v = x_\tau. \tag{12}$$

где m, m' — постоянные.

Полагая, что фрактальная размерность незначительно отличается от $D = 1$, проведем разложение в ряд по малому параметру $(D - 1)$

$$L = L_0 \bigg(1 + \frac{\partial x^{2D-1}}{\partial D}\Big|_{D=1} (D-1)$$
$$+ \frac{\partial^2 x^{2D-1}}{\partial D^2}\Big|_{D=1} (D-1)^2 + \dots \bigg)$$
$$= L_0 \Big(1 + 2(D-1)\ln(x) + \big\{2(D-1)\ln(x)\big\}^2 + \dots \Big)$$
$$= L_0 \bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \big\{2(D-1)\ln(x)\big\}^n \bigg), \tag{13}$$

где $L_0 = (mv^2)/2$.

В случае, когда $|2(D-1)\ln(x)| < 1$, выражение принимает следующий вид

$$L = \frac{L_0}{1 - 2(D-1)\ln(x)}. \tag{14}$$

Результат в принципе не является неожиданным, поскольку известно, что член $\ln(x)$ возникает при рассмотрении квазидвумерных (квазиодномерных) структур [11].

6. Функция Лагранжа системы материальных точек

Выше было получено выражение для функции Лагранжа свободной частицы. Для системы невзаимодействующих частиц получится, если принять во внимание свойство аддитивности L,

$$L = \sum_{b=0}^{N} \frac{m'_b (\kappa_\tau)^2_b}{2}. \tag{15}$$

Взаимодействие частиц можно учесть по аналогии с [8] добавлением к (15) определенной функции обобщенных координат (что следует из мгновенности передачи взаимодействия)

$$L = \sum_{b=0}^{N} \frac{m'_b (\kappa_\tau)^2_b}{2} - U(\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3, \dots), \tag{16}$$

где N — число частиц, $\bar{\kappa}_l$ — радиус вектор частицы в фрактальном континууме.

Уравнения движения получаются путем подставления (16) в обобщенные уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \kappa^l_\tau} = \frac{\partial L}{\partial \kappa^l} \to m_b \frac{d\kappa^l_\tau}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \kappa^l}, \tag{17}$$

где индекс l нумерует компоненты вектора.

Переход к лабораторной системе отсчета осуществляется при помощи преобразований координат

$$\kappa_l = \sum_{i=0} \beta_{li} x_i^{D_{il}}. \tag{18}$$

Тогда уравнения движения в лабораторной системе отсчета можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0} \beta_{li} D_{il} \nu_i^{D_{il}-1} w_i} = \sum_{i=0} \beta_{li} D_{il} \kappa_i^{D_{il}-1} \frac{1}{F_i}, \tag{19}$$

где введены обозначения обобщенных скорости, ускорения и силы

$$\nu_i = \frac{\partial \kappa_i}{\partial \tau}; \quad w_i = \frac{\partial^2 \kappa_i}{\partial \tau^2}; \quad F_i = \frac{\partial U}{\partial \kappa_i}, \tag{20}$$

т. е. в фрактальном континууме взаимосвязь между действующей на частицу силой и ускорением в общем случае не является прямопропорциональной (19).

Заключение

Пространство, образованное множеством материальных точек и имеющее фрактальную структуру, нельзя отождествить с истинным фракталом, поэтому такой объект был назван фрактальным континуумом. Подобные объекты наблюдаются в средах, в которых происходят фазовые переходы (так, например, взрыв проводников и пробой диэлектриков). Уравнение движения частиц внутри такого объекта построено на основе обобщенного принципа наименьшего действия. При теоретическом изучении движения частиц (квазичастиц) по истинному фракталу сложность построения формализма Лагранжа заключается в том, что функция, описывающая такое движение, принадлежит классу фрактальных функций. Как известно, фрактальные функции всюду недифференцируемы, поэтому нельзя использовать обычную схему нахождения экстремума действия. Выход из этой ситуации предлагается на основе обобщенного принципа наименьшего действия, в котором предлагается идея введения сканирующей переменной, по которой функция Лагранжа является непрерывной [12]. Для примера можно привести следующую задачу: "Дан биологический объект — клетка с набором хромосом. Сделаем метку на некотором фрагменте одной выделенной хромосомы. В процессе деления клетки образуется два набора хромосом (на первом этапе). Пусть прошло N-е число делений. Необходимо определить местонахождение меченного фрагмента." Множество точек (в данном случае точка — ядро клетки) изоморфно множеству Кантора. Роль сканирующей переменной может играть номер акта деления.

Путем введения в пространство фрактальной размерности понятия инерциальной фрактальной системы отсчета получены обобщения закона инерции, принципа относительности Галилея и преобразований Галилея.

Также получено в терминах лабораторной системе отсчета выражение функции Лагранжа свободной частицы и системы взаимодействующих частиц, движение которых происходит в самоподобном пространстве нецелочисленной размерности. В отличие от обычного изотропного пространства целочисленной размерности имеется зависимость от радиуса-вектора лабораторной системы отсчета и размерности фрактального континуума.

Приложение. Формализм дробного интегродифференцирования

Математический аппарат дробного интегродифференцирования в настоящее время является достаточно разработанным для применения его к задачам теоретической физики. Однако этот аппарат еще не получил широкого распространения.

Дробный интеграл Римана–Лиувилля определяется следующим выражением:

$$\hat{I}_x^z[(f(x)] = \frac{1}{\Gamma(z)} \int\limits_b^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-x}} dt. \tag{1П}$$

Определение (7) является обобщением тождества

$$\underbrace{\int\limits_b^x dx \ldots \int\limits_b^x dx \int\limits_b^x}_{n} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_b^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \tag{2П}$$

Для дробного интеграла имеет место тождество

$$\hat{I}_x^z \cdot \hat{I}_x^b = \hat{I}_x^b \cdot \hat{I}_x^z = \hat{I}_x^{z+b}. \tag{3П}$$

Дробная производная Римана–Лиувилля вводится по аналогии с дробным интегралом

$$\hat{D}_x^z[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d}{dx} \int\limits_b^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-z}} dt. \tag{4П}$$

Дробные производные подчиняются следующему тождеству:

$$\hat{D}_x^z \cdot \hat{D}_x^b = \hat{D}_x^b \cdot \hat{D}_x^z = \hat{D}_x^{z+b}. \tag{5П}$$

Комбинации операторов дробного интегрирования и дифференцирования осуществляются по следующим правилам:

$$\hat{D}_x^z\big[\hat{I}_x^z[f(x)]\big] = f(x),$$

$$\hat{I}_x^z\big[\hat{D}_x^z[f(x)]\big] = f(x) - \sum_{k=1}^{[z]} \hat{D}_x^{z-k}[f(x)]\Big|_{x=z}$$

$$\times \frac{(x-z)^{z-k}}{\gamma(z-k+1)}. \tag{6П}$$

Комбинация операторов Лапласа и дробного интегрирования

$$\hat{L}\big[\hat{I}_x^z[f(x)]\big] = p^{-z} \hat{L}[f(x)]. \tag{7П}$$

В заключение приведем обобщенное правило Лейбница

$$\hat{D}_x^z[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} \hat{D}_x^{z-k}[f(x)]\hat{D}_x^k[g(x)], \qquad (8\Pi)$$

$$\hat{D}_x^z[f(x)g(x)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{z}{k+b} \times \hat{D}_x^{z-b-k}[f(x)]\hat{D}_x^{b+k}[g(x)], \qquad (9\Pi)$$

где обобщенный биномальный коэффициент равен

$$\binom{z}{b} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(z-b+1)} \times \frac{\sin[\pi(b-z)]\Gamma(z+1)\Gamma(b-z)}{\Gamma(b+1)}, \qquad (10\Pi)$$

и формулу Лейбница с остаточным членом

$$\hat{D}_x^z[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{z}{k} \hat{D}_x^{z-k}[f(x)]\hat{D}_x^k[g(x)] + R_n, \quad (11\Pi)$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(-z)(n-1)!} \int_z^x (x-t)^{-z-1} f(t)dt \times \int_t^x (x-s)^{n-1} \hat{D}_s^n[g(s)]ds.$$

Список литературы

[1] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 382 с.

[2] *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.

[3] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.

[4] Фракталы в прикладной физике / Под ред. А.Е.Дубинова. ВНИИЭФ (Арзамас-16), 1995. 216 с.

[5] *Олемской А.И., Флат А.Я.* // УФН. 1993. Т. 163. Вып. 12. С. 1–50.

[6] *Notale L., Schnelder I.* // J. Math. Phys. 1994. Vol. 25. P. 1296–1300.

[7] *Смирнов Б.М.* Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 133 с.

[8] *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* // УФН. 1985. Т. 146. № 3. С. 493–506.

[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

[10] *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.

[11] *Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф.* Электронные свойства двумерных систем. М.: Мир, 1985. 416 с.

[12] *Guk I.P.* // Proc. Intern. Conf. "Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics". Uzhgorod, 1996. P. 78.