Журнал технической физики, 1998, том 68, № 3

01;03

Совместные колебания двухслойной жидкости и массивного штампа в бесконечном волноводе

© А.К. Абрамян, В.В. Алексеев, Д.А. Индейцев

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 28 мая 1996 г. В окончательной редакции 27 декабря 1996 г.)

Показано, что в волноводе, представляющим собой канал бесконечной протяженности, заполненный двухслойной тяжелой жидкостью со свободной поверхностью, наряду с бегущими волнами могут существовать нераспространяющиеся волны (ловушечные моды колебаний). Эти волны локализуются в области динамического включения — массивного штампа на дне канала. Возникновение таких волн обусловлено наличием вещественного дискретного спектра собственных частот колебаний, который располагается на оси непрерывного спектра, соответствующего расходящимся волнам в жидкости. Для случаев близких плотностей жидкостей в волноводе найдена связь между геометрическими параметрами канала, характеристиками жидкости и массой штампа, при которых такой спектр существует.

Введение

Резонансные свойства упругих систем конечных размеров хорошо известны. Это прежде всего дискретность и положительность спектра частот собственных колебаний. В случае тел, имеющих хотя бы одну границу бесконечной протяженности, появляются области сплошного спектра, границы которых в акустике называются частотами отсечки. В задачах механики деформируемого твердого тела существование смешанного спектра собственных частот было обнаружено И.И. Воровичем и В.А. Бабешко. В работах [1,2] были рассмотрены резонансные колебания массивного штампа на упругой полосе. В работе [3] были рассмотрены колебания штампа в канале, заполненном тяжелой сжимаемой жидкостью. Существование нераспространяющихся колебаний (наличие дискретного спектра) в канале, заполненном тяжелой сжимаемой жидкостью со свободной поверхностью, имеющем в качестве включения на дне массивный штамп, установлено в [4]. Показано, что в системе возможно существование как акустических колебаний, обусловленных сжимаемостью жидкости, так и гравитационных волн, вызванных наличием у жидкости свободной поверхности.

В настоящей работе показывается существование стоячих волн в волноводе, заполненном двухслойной жидкостью со свободной поверхностью. Для случая близких плотностей жидкостей получено аналитическое решение, указывающее на локализацию волнового процесса в области штампа, расположенного на дне канала и совершающего малые колебания. Такой случай имеет важное практическое значение в вопросах океанологии и гидротехники.

Колебания тежелой двухслойной жидкости в плоском канале с включением

Плоский канал бесконечной длины и высотой H заполнен несжимаемой невязкой жидкостью, состоящей из двух слоев. Плотность и толщина верхнего слоя жидкости — ρ_1 и h_1, нижнего — ρ_2 и h_2 ($\rho_2 > \rho_1$). Плоскость x, y выбрана в плоскости раздела двух жидкостей в равновесии, ось z направлена вертикально вверх. Верхний слой жидкости ($z = h_1$) имеет свободную поверхность, нижний слой ($z = -h_2$) ограничен неподвижной горизонтальной плоскостью. На дне канала имеется штамп массой M и шириной $2a$, который совершает малые вертикальные колебания по гармоническому закону $w = w_0 \exp(-i\omega t)$ с частотой ω и амплитудой перемещения w_0. Ось z проходит через середину штампа.

Под действием колебаний штампа возбуждаются гравитационные волны, распространяющиеся одновременно по свободной поверхности и по поверхности раздела жидкостей. Движение жидкости предполагается потенциальным с потенциалом скоростей φ_j и описывается уравнением Лапласа $\Delta\varphi_j = 0$ (здесь и ниже переменным, соответствующим верхнему слою, приписывается индекс $j = 1$, нижнему слою — $j = 2$). Движение жидкости удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = 0, \quad z = h_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, \quad z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \left\{ \begin{matrix} 0, & |x| > a \\ \partial w/\partial t, & |x| \le a, \end{matrix} \right\}, \quad z = -h_2, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести, w — координата поверхности штампа.

Условие (1) является обычным условием на свободной поверхности. Условие (2) выражает условие равенства скоростей обеих жидкостей на границе раздела. Условие (3) выражает условие равенства скоростей частиц жидкости и штампа на границе их контакта, а также условие непроницаемости на жестких границах канала.

В жидкости действует давление

$$p_1(z) = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \rho_1 g z, \quad p_2(z) = -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \rho_2 g z.$$

На поверхности раздела жидкостей — $\eta(x,t)$ давление должно быть непрерывным, т.е. $p_1(\eta) = p_2(\eta)$, что вместе с условием (2) согласно с [5] приводит к соотношению:

$$g(\rho_2 - \rho_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \rho_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \quad z = 0. \tag{4}$$

Для формулировки граничного условия при $x \to \pm\infty$ используется известное условие излучения [6].

Движение штампа описывается уравнением

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} = -\int\limits_{-a}^{a} p_2(x, -h_2, t)\, dx. \tag{5}$$

Давление на дне канала $p_2(x, -h_2, t)$ определяется соотношением

$$p_2\big|_{z=-h_2} = -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\bigg|_{z=-h_2} - \rho_2 g \left\{ \begin{matrix} 0, & |x| > a, \\ w, & |x| \le a. \end{matrix} \right. \tag{6}$$

Все переменные величины, характеризующие течение жидкости, предполагаются пропорциональными множителю $\exp(-i\omega t)$, как это принято при исследовании установившихся колебаний, причем физический смысл имеет только вещественная часть.

Осуществляя преобразование Фурье по координате x в системе уравнений и граничных условий (1)–(4) и, отделяя временно́й множитель $\exp(-i\omega t)$, получим

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_j}{\partial z^2} - k^2 \hat{\varphi}_j = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\hat{\varphi}_1 = 0, \quad z = h_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial z},$$

$$g(\rho_2 - \rho_1)\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial z} = -\omega^2(\rho_1 \hat{\varphi}_1 - \rho_2 \hat{\varphi}_2), \quad z = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial z} = -2i\omega w_0 \frac{\sin ka}{k}, \quad z = -h_2, \tag{10}$$

где $\hat{\varphi}(z,k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi \exp(-ikx) dx$.

Решение уравнений (7) имеет вид

$$\hat{\varphi}_1(z,k) = A_1 \operatorname{sh} kz + B_1 \operatorname{ch} kz,$$

$$\hat{\varphi}_2(z,k) = A_2 \operatorname{sh} kz + B_2 \operatorname{ch} kz,$$

где константы A_1, B_1, A_2, B_2 определяются из граничных условий (8)–(10).

Тогда решение окончательно записывается в виде

$$\hat{\varphi}_1(z,k) = -\frac{2i\omega w_0}{\operatorname{ch} kh_2 \Delta(k,\omega)} \frac{\sin ka}{k^2} \times \left[\omega^2(gk \operatorname{th} kh_1 - \omega^2) \operatorname{sh} kz - \omega^2(gk - \omega^2 \operatorname{th} kh_1) \operatorname{ch} kz\right],$$

$$\hat{\varphi}_2(z,k) = -\frac{2i\omega w_0}{\Delta(k,\omega) \operatorname{ch} kh_2} \frac{\sin ka}{k^2} \times \Big\{\omega^2(gk \operatorname{th} kh_1 - \omega^2) \operatorname{sh} kz - \Big[\omega^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}(gk - \omega^2 \operatorname{th} kh_1) - gk\frac{\Delta\rho}{\rho_2}(gk \operatorname{th} kh_1 - \omega^2)\Big] \operatorname{ch} kz\Big\},$$

где введены обозначения $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$,

$$\Delta(k,\omega) = -\omega^4 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2\right) + \omega^2 gk(\operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2) - g^2k^2 \frac{\Delta\rho}{\rho_2} \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2. \tag{11}$$

При изучении совместных колебаний жидкости и штампа потребуется выражение для давления на дне канала (6), в которое входит величина $\varphi_2(x, -h_2)$. Поэтому окончательный вид потенциала течения приведем только для нижнего слоя жидкости. Осуществляя обратное преобразование Фурье величины $\hat{\varphi}_2(z,k)$ при $z = -h_2$ с использованием свойства свертки, получим

$$\varphi_2(x, -h_2) = -i\omega w_0 \int\limits_{-a}^{a} G(|x - \xi|, \omega) d\xi, \tag{12}$$

где $G(|x-\xi|,\omega)$ — функция Грина исходной задачи.

Функция Грина $G(x,\omega)$ представляется в виде

$$G(x,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\Delta_1(k,\omega)}{\Delta(k,\omega)} \exp(ikx)\, dk. \tag{13}$$

Здесь знаменатель подынтегрального выражения определяется формулой (11), а числитель имеет вид

$$\Delta_1(k,\omega) = \omega^4 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2\right) - \omega^2 gk(1 + \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2) + g^2k^2 \frac{\Delta\rho}{\rho_2} \operatorname{th} kh_1.$$

Дисперсионное соотношение $\Delta(k, \omega) = 0$ имеет вещественные корни вида

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{gk(\operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2)}{2[1 + (\rho_1/\rho_2)\operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2]} \Biggl\{ 1$$

$$\pm \sqrt{1 - 4\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\,\frac{[1+(\rho_1/\rho_2)\operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2]\operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2}{(\operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2)^2}} \Biggr\}. \tag{14}$$

Можно показать, что подкоренное выражение никогда не бывает меньше нуля. Следовательно, соотношение $\Delta(k, \omega) = 0$ содержит две ветви дисперсионных кривых. Одна ветвь $\omega_1^2(k)$ определяет поверхностную волну в слое, другая $\omega_2^2(k)$ — волну на границе раздела двух сред.

Найдем явный вид функции Грина. Интегрирование в выражении (13) будет осуществляться на комплексной плоскости с применением теоремы о вычетах. Подынтегральное выражение в (13), где k является уже комплексным, имеет полюсы $\pm k_0^{(1)}$, $\pm k_0^{(2)}$ на вещественной оси и $\pm ik_n^{(1)}$, $\pm ik_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ на мнимой оси, которые определяются равенством (14). Верхние индексы 1 и 2 в обозначении полюсов соответствуют волнам поверхностного слоя и волнам на границе раздела двух сред.

При вычислении интеграла (13) следует принять во внимание условие излучения, о котором говорилось в постановке задачи, заключающейся в том, что при $x \to \pm\infty$ имеют место только уходящие волны. Это можно реализовать с помощью принципа предельного поглощения путем формального добавления к правой части уравнения (1) члена $\varepsilon\partial\varphi_1/\partial t$, характеризующего затухание волн, где ε — малый параметр. Тогда в выражениях (8)–(10) частота ω будет являться комплексной величиной с мнимой частью, пропорциональной ε. Это приводит к тому, что полюса $k_0^{(1)}$ и $k_0^{(2)}$ сдвигаются с вещественной оси на величину, пропорциональную ε. В этом случае интегрирование в выражении (13) будет осуществляться по контуру, не содержащему особенностей на вещественной оси, и это устранит неоднозначность ответа. После вычисления интеграла (13) и устремления ε к нулю будем иметь решение, не содержащее волн, приходящих из бесконечности.

Ввиду симметричности картины течения относительно $x = 0$ выполним интегрирование в (13) для $x > 0$. Тогда контур интегрирования не будет содержать внутри себя полюсов $-k_0^{(1)}$, $-k_0^{(2)}$, $ik_n^{(1)}$, $-ik_n^{(2)}$ и функция Грина после устремления параметра ε к нулю представится в виде

$$G(x, \omega) = iA\bigl(k_0^{(1)}\bigr)\exp\bigl(ik_0^{(1)}x\bigr) + iA\bigl(k_0^{(2)}\bigr)\exp\bigl(ik_0^{(2)}x\bigr)$$
$$+ i\sum_{n=1}^{\infty} A\bigl(k_n^{(1)}\bigr)\exp\bigl(-k_n^{(1)}x\bigr)$$
$$+ i\sum_{n=1}^{\infty} A\bigl(k_n^{(2)}\bigr)\exp\bigl(-k_n^{(2)}x\bigr), \tag{15}$$

где $A(k)$ определяется выражением

$$A(k) = \Delta_1(k, \omega)\left\{\frac{d}{dk}\bigl[k\Delta, (k, \omega)\bigr]\right\}^{-1}.$$

Давление на дне канала в соответствии с (12) и выражением (6), в котором произведено отделение множителя $\exp(-i\omega t)$, имеет вид

$$p_2(x, -h_2) = p_2\omega^2 w_0 \int_{-a}^{a} G|x - \xi|, \omega)d\xi$$
$$- \rho_2 g\begin{cases} 0, & |x| > a, \\ w_0, & |x| < a. \end{cases} \tag{16}$$

При вычислении интеграла (16) следует иметь в виду, что функция Грина при $-\infty < x < \infty$ также дается выражением (15), только в показателях экспонент переменную x нужно заменить на $|x|$.

Нераспространяющиеся колебания двухслойной жидкости в канале с включением

Изучение совместных колебаний двухслойной жидкости и массивного штампа будем проводить для случая, когда плотности жидкостей примерно равны, т. е. $\rho_1 \approx \rho_2$. Дисперсионное соотношение (11) приближенно будет иметь вид

$$\omega^4(1 + \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2) + \omega^2 gk(\operatorname{th} kh_1 + \operatorname{th} kh_2)$$
$$- g^2k^2\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{gk \operatorname{th} k(h_1 + h_2)}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\,\frac{\operatorname{cth} k(h_1 + h_2)}{\operatorname{cth} kh_1 + \operatorname{cth} kh_2}}\right].$$

Разложив квадратный корень в ряд Тэйлора, получим

$$\omega_1^2 = gk \operatorname{th} k(h_1 + h_2),$$
$$\omega_2^2 = \frac{\Delta\rho}{\rho_2} gk(\operatorname{cth} kh_1 + \operatorname{cth} kh_2)^{-1}, \tag{17}$$

где $\omega_1^2\bigl(k_0^{(1)}\bigr)$ — поверхностная волна в слое толщиной $h_1 + h_2$, $\omega_2^2\bigl(k_0^{(2)}\bigr)$ — внутренняя волна на границе раздела жидкостей с учетом границ $z = h_1$ и $z = -h_2$.

Функцию Грина при $-\infty < x < \infty$ запишем в виде

$$G(x, \omega) = iA_1\bigl(k_0^{(1)}\bigr)\exp\bigl(ik_0^{(1)}|x|\bigr) + iA_2\bigl(k_0^{(2)}\bigr)\exp\bigl(ik_0^{(2)}|x|\bigr)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_1\bigl(k_n^{(1)}\bigr)\exp\bigl(-k_n^{(1)}|x|\bigr)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_2\bigl(k_n^{(2)}\bigr)\exp\bigl(-k_n^{(2)}|x|\bigr),$$

где величины $k_0^{(1)}$, $k_0^{(2)}$ определяются соотношениями (17), а величины $k_n^{(1)}$, $k_n^{(2)}$ соответственно соотношениями

$$\omega_1^2 = -gk_n^{(1)}\,\mathrm{tg}\left[k_n^{(1)}(h_1+h_2)\right],$$

$$\omega_2^2 = -\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\,gk_n^{(2)}\left(\mathrm{ctg}\,k_n^{(2)}h_1 + \mathrm{ctg}\,k_n^{(2)}h_2\right)^{-1}. \qquad (18)$$

Коэффициенты $A_1\left(k_0^{(1)}\right)$, $A_2\left(k_0^{(2)}\right)$, $B_1\left(k_n^{(1)}\right)$, $B_2\left(k_n^{(2)}\right)$ не приводятся ввиду их громоздкости. Осуществляя интегрирование функции Грина в выражении (16), получим выражение для давления на дне канала при $|x| < a$

$$\begin{aligned} p_2(x,-h_2) &= 2\rho_2\omega^2 w_0 \\ &\times\left\{\frac{A_1\left(k_0^{(1)}\right)}{k_0^{(1)}}\left[\exp(ik_0^{(1)}a)\cos\left(k_0^{(1)}x\right)-1\right]\right. \\ &+\frac{A_2\left(k_0^{(2)}\right)}{k_0^{(2)}}\left[\exp(ik_0^{(2)}a)\cos\left(k_0^{(2)}x\right)-1\right] \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_1\left(k_n^{(1)}\right)}{k_n^{(1)}}\left[1-\exp(-k_n^{(1)}a)\,\mathrm{ch}\left(k_n^{(1)}x\right)\right] \\ &\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_2\left(k_n^{(2)}\right)}{k_n^{(2)}}\left[1-\exp(-k_n^{(2)}a)\,\mathrm{ch}\left(k_n^{(2)}x\right)\right]\right\} \\ &-\rho_2 g w_0, \end{aligned} \qquad (19)$$

при $|x| > a$

$$\begin{aligned} p_2(x,-h_2) = 2\rho_2\omega^2 w_0 &\left[i\,\frac{A_1\left(k_0^{(1)}\right)}{k_0^{(1)}}\exp(ik_0^{(1)}x)\sin\left(k_0^{(1)}a\right)\right. \\ &+i\,\frac{A_2\left(k_0^{(2)}\right)}{k_0^{(2)}}\exp(ik_0^{(2)}x)\sin\left(k_0^{(2)}a\right) \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_1\left(k_n^{(1)}\right)}{k_n^{(1)}}\exp(-k_n^{(1)}x)\,\mathrm{sh}\left(k_n^{(1)}a\right) \\ &\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_2\left(k_n^{(2)}\right)}{k_n^{(2)}}\exp(-k_n^{(2)}x)\,\mathrm{sh}\left(k_n^{(2)}a\right)\right]. \end{aligned} \qquad (20)$$

Наличие мнимых множителей в выражении для давления при $|x| > a$ физически означает, что энергия колеблющегося штампа уносится поверхностными и внутренними волнами на бесконечность.

Существование дискретного спектра колебаний в рассматриваемом бесконечном волноводе может быть обеспечено только при отсутствии волн, уносящих энергию на бесконечность. Тогда в полученном решении члены, определяющие унос энергии, необходимо положить равными нулю. В выражении для давления при $|x| > a$ (20) такими членами являются те, которые содержат $\exp\left(ik_0^{(1)}x\right)$, $\exp\left(ik_0^{(2)}x\right)$. Для их устранения потребуем выполнения равенства $\sin\left(k_0^{(1)}a\right) = 0$, $\sin\left(k_0^{(2)}a\right) = 0$. Это обеспечивается при условиях $k_0^{(1)} = (\pi/a)l$, $k_0^{(2)} = (\pi/a)m$ $(l, m = 1, 2, \dots)$. Выясним, когда возможно выполнение этих условий. Для существования совместных колебаний в жидкости требуется равенство частот поверхностных и внутренних волн, определяемых выражениями (17). Приравнивая выражения (17), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\,\frac{\mathrm{th}\left(k_0^{(2)}h_1\right)\mathrm{th}\left(k_0^{(2)}h_2\right)}{\mathrm{th}\left(k_0^{(2)}h_1\right)+\mathrm{th}\left(k_0^{(2)}h_2\right)} \\ &\qquad\times\frac{1+\mathrm{th}\left(k_0^{(1)}h_1\right)\mathrm{th}\left(k_0^{(1)}h_2\right)}{\mathrm{th}\left(k_0^{(1)}h_1\right)+\mathrm{th}\left(k_0^{(1)}h_2\right)} = \frac{k_0^{(1)}}{k_0^{(2)}} = \frac{l}{m}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Для предельных случаев глубокой и мелкой воды из (21) приближенно находим

$$\text{при } h_1, h_2 \gg a \text{ (глубокая вода) } l/m = \Delta\rho/(2\rho_2),$$

$$\text{при } h_1 \approx h_2 \ll a \text{ (мелкая вода) } l/m = \left[\Delta\rho/(4\rho_2)\right]^{1/2}. \qquad (22)$$

Отметим, что числа l, m характеризуют число гребней стоячих поверхностных и внутренних волн, возникающих над штампом длины $2a$, т. е. при отсутствии волн, уносящих энергию на бесконечность, энергия колеблющегося штампа и жидкости локализуется в пределах длины штампа. При этом число стоячих поверхностных волн должно быть меньше числа внутренних волн в соотношении, определяемом (22).

Определим силу, действующую со стороны жидкости на колеблющийся штамп, используя выражения для давления (19).

$$\begin{aligned} Q = -\int_{-a}^{a} p_2(x,-h_2)dx &= -4\rho_2\omega^2 w_0 \\ &\times\left\{\frac{A_1\left(k_0^{(1)}\right)}{k_0^{(1)}}\left[\exp\left(ik_0^{(1)}a\right)\frac{\sin\left(k_0^{(1)}a\right)}{k_0^{(1)}}-a\right]\right. \\ &+\frac{A_2\left(k_0^{(2)}\right)}{k_0^{(2)}}\left[\exp\left(ik_0^{(2)}a\right)\frac{\sin\left(k_0^{(2)}a\right)}{k_0^{(2)}}-a\right] \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_1\left(k_n^{(1)}\right)}{k_n^{(1)}}\left[a-\exp\left(-k_n^{(1)}a\right)\frac{\mathrm{sh}\left(k_n^{(1)}a\right)}{k_n^{(1)}}\right] \\ &\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_2\left(k_n^{(2)}\right)}{k_n^{(2)}}\left[a-\exp\left(-k_n^{(2)}a\right)\frac{\mathrm{sh}\left(k_n^{(2)}a\right)}{k_n^{(2)}}\right]\right\} \\ &+2a\rho_2 g w_0. \end{aligned}$$

Для определения установившихся колебаний жидкости и штампа подставим найденное усилие Q в уравнение (5), определяющее движение штампа. Учтем при этом, что для установившихся колебаний должны быть выполнены равенства $\sin\left(k_0^{(1)}a\right) = 0$, $\sin\left(k_0^{(2)}a\right) = 0$, устраняющие унос энергии на бесконечность. Тогда получим уравнение движения штампа в виде

$$-M\omega^2 w_0 = 4\rho_2\omega^2 w_0\left\{\frac{A_1\big(k_0^{(1)}\big)}{k_0^{(1)}}\,a + \frac{A_2\big(k_0^{(2)}\big)}{k_0^{(2)}}\,a - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_1\big(k_n^{(1)}\big)}{\big(k_n^{(1)}\big)^2}\left[ak_n^{(1)} - \exp\big(-k_n^{(1)}a\big)\,\mathrm{sh}\,\big(k_n^{(1)}a\big)\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_2\big(k_n^{(2)}\big)}{\big(k_n^{(2)}\big)^2}\left[ak_n^{(2)} - \exp\big(-k_n^{(2)}a\big)\,\mathrm{sh}\,\big(k_n^{(2)}a\big)\right]\right\} + 2a\rho_2 g w_0. \quad (23)$$

Из уравнения (23) видно, что оно описывает установившиеся колебания жидкости и штампа только тогда, когда правая часть отрицательна. В противном случае уравнение не имеет физического смысла.

Оценим порядки величин членов, входящих в правую часть уравнения (23). Расчет будем проводить для случая мелкой воды, полагая $h_1 = h_2 = h \ll a$, $H = 2h$. Кроме того, будем полагать, что имеется одна стоячая волна на поверхности жидкости, т.е. $l = 1$. Тогда приближенно будем иметь

$$A_1\big(k_0^{(1)}\big) \approx -\frac{1}{2k_0^{(1)}H}, \quad A_2\big(k_0^{(2)}\big) \approx -\frac{1}{2k_0^{(2)}H}.$$

Можно показать, что корни выражений (18) находятся в пределах $-\pi/2 + \pi n < k_n^{(1)}H < \pi n$, $-\pi/2 + \pi n < k_n^{(2)}h < \pi n$ $(n = 1, 2, \dots)$. При малом значении $\Delta\rho/\rho_2$ принимаем

$$B_1\big(k_n^{(1)}\big) = -\left[0.5\sin\big(2k_n^{(1)}H\big) + k_n^{(1)}H\right]^{-1},$$

$$B_2\big(k_n^{(2)}\big) = -\left[0.5\sin\big(2k_n^{(2)}H\big) + k_n^{(2)}H\right]^{-1}.$$

Тогда уравнение (23) представится в виде

$$-M\omega^2 w_0 = 2\rho_2\omega^2 w_0\left\{-\frac{aH}{\big(k_0^{(1)}H\big)^2} - \frac{aH}{\big(k_0^{(2)}H\big)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k_n^{(1)}a - 1 + \exp(-2k_n^{(1}a)}{\big(k_n^{(1)}\big)^2\left[0.5\sin\big(2k_n^{(1)}H\big) + k_n^{(1)}H\right]} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k_n^{(2)}a - 1 + \exp(-2k_n^{(2}a)}{\big(k_n^{(2)}\big)^2\left[0.5\sin\big(2k_n^{(2)}H\big) + k_n^{(2)}H\right]} + \frac{a}{\omega^2}g\right\}. \quad (24)$$

При оценке рядов, входящих в (24), пренебрежем экспонентой, которая является малой, и синусом, который является отрицательным, и положим, что $k_n^{(1)}H = \pi n$, $k_n^{(2)}H = 2\pi n$. Тогда получившиеся ряды можно просуммировать. Последний член в скобках в выражении (24) преобразуем с использованием соотношения $\omega^2 = g\big(k_0^{(1)}\big)^2 H$, справедливого в приближении мелкой воды. Тогда окончательно будем иметь уравнение

$$-M\omega^2 w_0 = 2\rho_2\omega^2 w_0\left[-\frac{aH}{\big(k_0^{(1)}H\big)^2} - \frac{aH}{\big(k_0^{(2)}H\big)^2} + \frac{aH}{3} + \frac{aH}{12} + \frac{aH}{\big(k_0^{(1)}H\big)^2}\right]. \quad (25)$$

Из уравнения видно, что первый и последний член в скобках взаимно сокращаются, а так как $k_0^{(2)} < 1$ (приближение мелкой воды), то правая часть уравнения является отрицательной. Поэтому можно сделать вывод, что уравнение (25) описывает установившиеся колебания в двухслойной жидкости с образованием стоячих волн над штампом. Отметим, что если жидкость была бы однослойной, тогда второго и четвертого члена в скобках в уравнении (25) не было, и правая часть была бы положительной. Тогда следует признать невозможность образования стоячих волн в однослойной жидкости. По-видимому, поверхность раздела двух жидкостей является неким аккумулирующим слоем преобразующем и перераспределяющем энергию колеблющейся системы с образованием стоячих волн.

Отметим, что для простоты вычислений оценки сумм в уравнении (23) проводились приближенно. Для их точного определения и вычисления величин $A_1\big(k_0^{(1)}\big)$, $A_2\big(k_0^{(2)}\big)$ необходим более детальный расчет. Это же относится и к случаю, когда имеется более одной стоячей волны на поверхности жидкости, так как тогда в выражении (21) нельзя безоговорочно принимать $k_0^{(2)}H < 1$. Данный оценочный расчет показывает принципиальную возможность образования нераспространяющихся локализованных волн, что приводит к незатухающим колебаниям штампа в такой системе, как бесконечный волновод, заполненный двухслойной жидкостью. При наличии внешнего источника колебаний на найденных собственных частотах возможно возникновение резонансных колебаний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01153а.

Список литературы

[1] *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. 1990. № 3. С. 74.

[2] *Бабешко В.А., Глушков Б.В., Винченко Н.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 332 с.

[3] *Абрамян А.К., Андреев В.Л., Индейцев Д.А.* // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. С. 34.

[4] *Abramian A.K., Indejtchev D.A.* // Proc. of 3[d] Intern. Congress on Air and Structure-Borne Sound and Vibration. Vol. 3. Montreal, 1994. P. 1817.

[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

[6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.