

01;02

Потери энергии релятивистских многозарядных ионов в электронной плазме

© В.И. Матвеев¹, С.Г. Толманов²

¹ Научно-исследовательский институт прикладной физики Ташкентского государственного университета, 700005 Ташкент, Узбекистан

² Отдел теплофизики АН Узбекистана, 700135 Ташкент, Узбекистан

(Поступило в Редакцию 4 августа 1995 г. В окончательной редакции 23 октября 1996 г.)

Получена простая формула для расчетов потерь энергии релятивистского многозарядного иона при движении в электронной плазме в области неприменимости борновского приближения. Вклад в потери энергии обусловленный столкновениями с отдельными электронами вычислен путем использования точного решения уравнения Дирака для кулоновского релятивистского рассеяния.

Введение

Известно, что быстрые заряженные частицы, движущиеся в плазме, тормозятся в основном при взаимодействии с электронами. Поляризационные потери энергии иона, движущегося в электронной плазме, могут быть вычислены в рамках диэлектрического формализма. Выражение для потерь энергии на единицу пути имеет вид [1]

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2 iV} \int d^3k \times \left[\frac{\omega}{k^2 \epsilon_l(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{\omega(V^2 - \omega^2/k^2)}{c^2(k^2 - \omega^2 \epsilon_{tr}(\mathbf{k}, \omega)/c^2)} \right]. \quad (1)$$

Здесь E — энергия иона, x — его координата, Ze — заряд иона, V — его скорость, $\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega)$ и $\epsilon_{tr}(\mathbf{k}, \omega)$ — соответственно продольная и поперечная проницаемости газа, c — скорость света, $\omega = \mathbf{kV}$, e — заряд электрона. Стандартная схема вычислений по формуле (1) поляризационных потерь энергии быстрого (но нерелятивистского) иона состоит в следующем: а) второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (1) соответствует отсутствующему в данном случае черенковскому излучению, поэтому может быть опущено; б) интеграл от первого слагаемого, соответствующего возбуждению продольных колебаний в электронной плазме, вычисляется до некоторых максимальных значений k_1 , соответствующих минимальным параметрам удара b_1 , начиная с которых электронную плазму можно рассматривать как коллективную систему; потери в максвелловской плазме, обусловленные столкновениями с плазмой как коллективной системой, были рассчитаны ранее [2,3], но для случая нерелятивистских скоростей пробной частицы, существуют также расчеты тормозной способности вырожденного электронного газа (см., например, [4–8]), при этом получено выражение для потерь энергии в пределе больших скоростей, независимое от степени

вырождения

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi N (Ze^2)^2}{mV^2} \ln \frac{k_1 V}{\omega_p}, \quad (2)$$

где m — масса электрона, $\omega_p = 4\pi Ne^2/m$ — плазменная частота, N — плотность электронной плазмы; в) для параметров удара, меньших b_1 , потери энергии обусловлены столкновениями с отдельными электронами и могут быть рассчитаны с помощью формулы Резерфорда, которая, как известно, является точным решением для кулоновского рассеяния описываемого нерелятивистским уравнением Шредингера.

В случае расчета потерь энергии релятивистского многозарядного иона мы должны действовать следующим образом: пункты а и б остаются без изменения, а пункт в меняется: для релятивистских скоростей столкновений необходимо решать задачу рассеяния для уравнения Дирака, результатом точного решения которой является сечение Мотта. Если же Ze — заряд иона, такой что $Ze^2/\hbar V \ll 1$, то можно ограничиться первым борновским приближением.

В настоящей работе мы предполагаем, что $Z \gg 1$ (например, для "голого" ядра урана $Z = 92$), так что $Ze^2/\hbar V \lesssim 1$ всегда, в частности и при $V \approx c$ (т.е. условие применимости борновского приближения нарушено несмотря на большую скорость), и учитываем область отдельных столкновений путем использования точного выражения для сечения.

Вклад области отдельных столкновений

Будем считать, что скорость иона много больше средней тепловой скорости электронов плазмы, тогда электрон можно считать до столкновения неподвижным. Потери энергии иона выражаются через $\sigma(\epsilon)$ — сечение передачи энергии ϵ :

$$\frac{dE}{dx} = -N \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon. \quad (3)$$

Далее, следуя [9, § 82, раздел "Большие передачи импульса"], при рассмотрении столкновений с отдельными электронами будем считать налетающий ион бесконечно тяжелой частицей, не меняющей своего движения при столкновении. Тогда сечение рассеяния первоначально покоящегося электрона на двигающемся с постоянной скоростью ионе можно получить при помощи преобразования к системе, где двигающийся электрон рассеивается на неподвижном ионе. Соответствующий угол рассеяния обозначим через Θ . Можно считать [9] (исключая область сверхвысоких энергий), что потеря энергии $\epsilon = \epsilon(\Theta)$ и

$$\epsilon(\Theta) = \frac{2mV^2}{(1-\beta^2)} \sin^2 \frac{\Theta}{2}, \quad \beta = V/c, \quad (4)$$

а значения ϵ_{\max} и ϵ_{\min} достигаются при $\Theta = \pi$ и $\Theta = \Theta_{\min}$ соответственно. В результате формулу (3) можно переписать в виде [10]

$$\frac{dE}{dx} = -2N\pi \frac{(Ze^2)^2}{mV^2} \int_{\Theta_{\min}}^{\pi} \frac{\sigma(\Theta)}{\sigma_R(\Theta)} \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} d\Theta, \quad (5)$$

где $\sigma(\Theta)$ — сечение рассеяния электрона на неподвижном ионе заряда Z при произвольной скорости электрона V , полученное [11,12] в результате точного решения задачи кулоновского рассеяния для уравнения Дирака, $\sigma_R(\Theta)$ — сечение Резерфорда

$$\sigma_R = \frac{(Ze^2)^2(1-\beta^2)}{m^2c^4\beta^4(1-\cos\Theta)^2}. \quad (6)$$

Согласно [11,12], при $\Theta \rightarrow 0$ отношение точного сечения к сечению Резерфорда $\sigma(\Theta)/\sigma_R(\Theta) \rightarrow 1$, поэтому интеграл (5) при малых Θ_{\min} можно представить в виде (ср. [10])

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi \frac{N(Ze^2)^2}{mV^2} \ln \frac{2}{a(Z,V)\Theta_{\min}}. \quad (7)$$

Функция $a(Z,V)$ учитывает отличие сечения рассеяния электрона на многозарядном ионе при релятивистских скоростях от сечения Резерфорда (т.е. $a(Z,V) \rightarrow 1$ при $\alpha = Z/c \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$) и с учетом малости Θ_{\min} определяется по формуле

$$a(Z,V) = \lim_{\Theta_{\min} \rightarrow 0} \frac{2}{\Theta_{\min}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Theta_{\min}}^{\pi} \frac{\sigma(\Theta)}{\sigma_R(\Theta)} \operatorname{ctg}(\Theta/2) d\Theta \right\}, \quad (8)$$

что позволяет, используя данные работы [11] о сечении Мотта, численно найти $a(Z,V)$. Связь между Θ_{\min} и k_1 дается выражением

$$\Theta_{\min} = \frac{\hbar k_1}{p}, \quad p = \frac{mV}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поэтому кулоновский логарифм, входящий в формулу (7), имеет вид

$$\ln \Lambda = \ln \frac{2}{a(Z,V)\Theta_{\min}} = \ln \frac{2mV}{\hbar k_1 \sqrt{1-\beta^2} a(Z,V)}.$$

Нам удобнее использовать функцию $f(Z,V)$, связанную с $a(Z,V)$, следующим соотношением:

$$f(Z,V) = \frac{1}{a(Z,V)} \exp \frac{\beta^2}{2}. \quad (9)$$

Используя данные численных расчетов [11] для отношения сечений σ/σ_R , можно аппроксимировать $f(Z,V)$ следующим образом (аппроксимация для $a(Z,V)$, предложенная в [10] приводит к менее точным значениям $f(Z,V)$):

$$f(Z,V) = 1 + \left[0.222592\beta - 0.042948\beta^2 + (0.6016 + 5.15289\beta - 3.73293\beta^2)\alpha - (0.52308 + 5.71287\beta - 8.11358\beta^2)\alpha^2 \right]^2. \quad (10)$$

Таким образом, потери релятивистского многозарядного иона при столкновениях с отдельными электронами

Таблица 1.

Энергия иона, MeV / nucl.	Заряд иона					
	6	13	29	50	82	92
91.8	1.0311	1.0802	1.2256	1.4168	1.6366	1.6752
183.6	1.0340	1.1002	1.2943	1.6260	2.1293	2.2540
367.2	1.0530	1.1209	1.3678	1.8544	2.5596	3.2137
734.4	1.0575	1.1455	1.4306	2.0585	3.7396	4.4333
1285.2	1.0522	1.1505	1.4673	2.1815	4.3564	5.3506
1836	1.0689	1.1613	1.4846	2.2335	4.6402	5.8127
3672	1.0707	1.1638	1.5025	2.2953	4.9749	6.3560
7344	1.0714	1.1655	1.5064	2.3170	5.5868	6.5818
18360	1.0688	1.1696	1.5137	2.3266	5.1620	6.6521

Таблица 2.

Энергия иона, MeV / nucl.	Заряд иона					
	6	13	29	50	82	92
91.8	1.0300	1.0726	1.2118	1.4206	1.6399	1.6621
183.6	1.0431	1.1003	1.2942	1.6212	2.1082	2.2280
367.2	1.0562	1.1257	1.3746	1.8579	2.8311	3.1721
734.4	1.0658	1.1419	1.4322	2.0787	3.7137	4.4020
1285.2	1.0701	1.1477	1.4577	2.2099	4.3581	5.3392
1836	1.0717	1.1494	1.4666	2.2669	4.6712	5.8042
3672	1.0731	1.1505	1.4747	2.3291	5.0395	6.3584
7344	1.0736	1.1507	1.4773	2.3527	5.1865	6.5816
18360	1.0738	1.1508	1.4782	2.3612	5.2407	6.6643

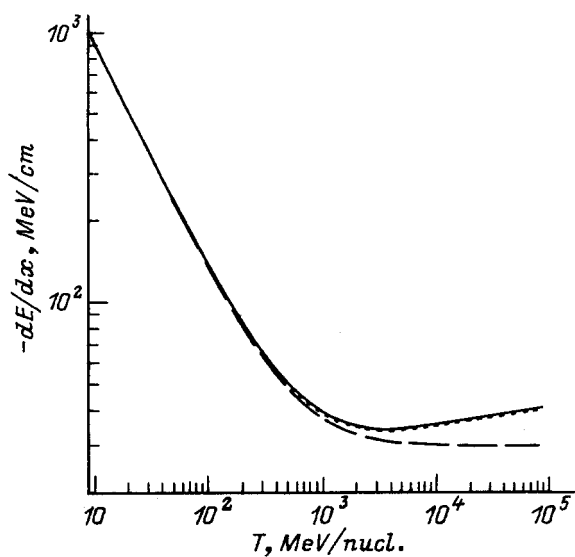


Рис. 1. $Z = 6$.

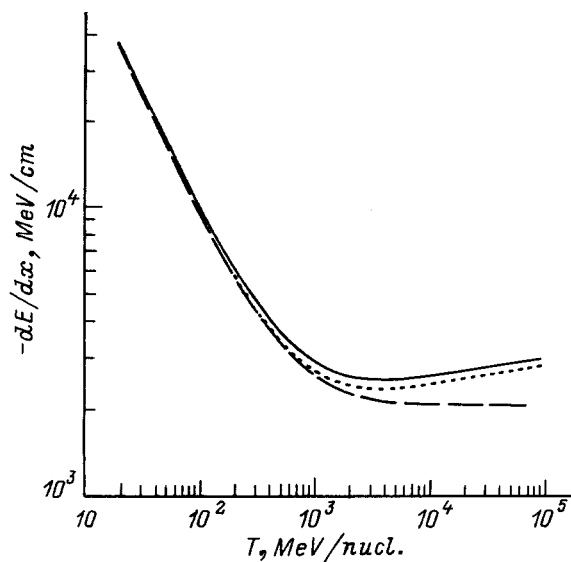


Рис. 4. $Z = 50$.

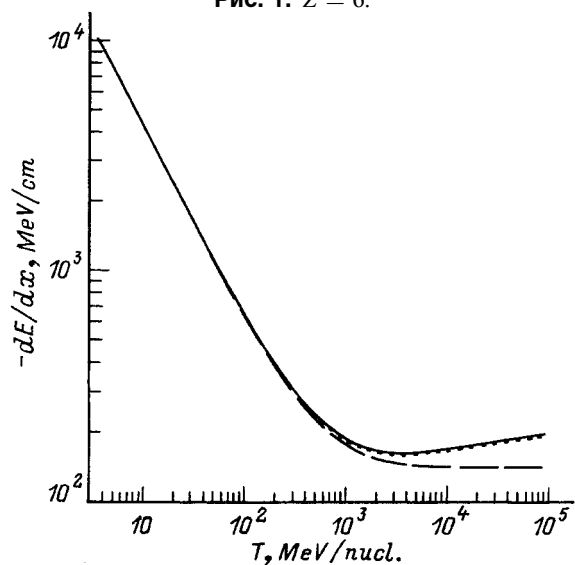


Рис. 2. $Z = 13$.

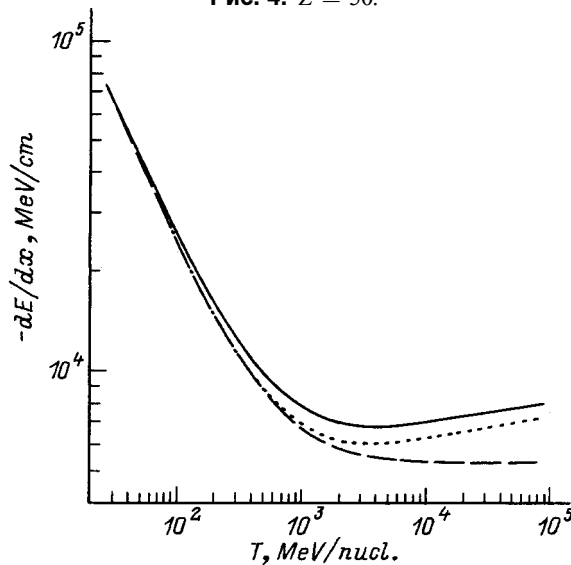


Рис. 5. $Z = 80$.

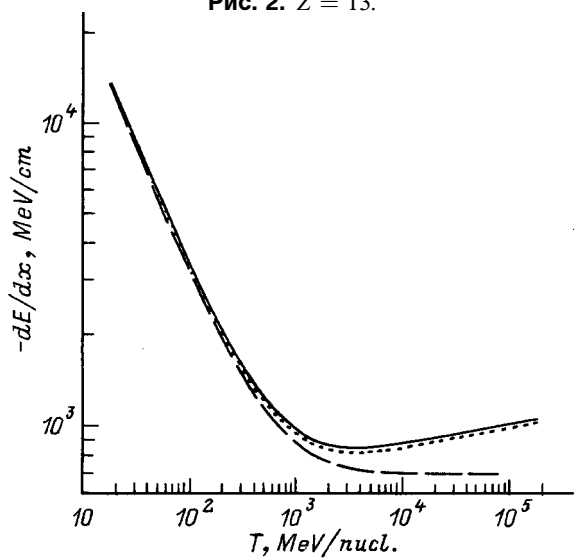


Рис. 3. $Z = 29$.

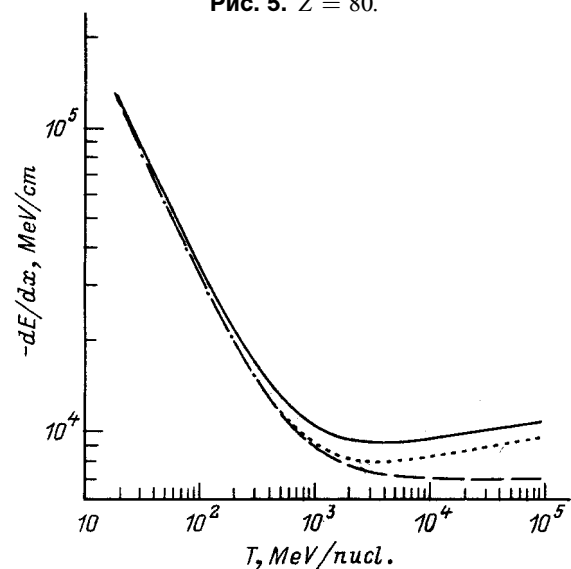


Рис. 6. $Z = 92$.

описываются следующей формулой:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi N(Ze^2)^2}{mV^2} \left[\ln \frac{2mVf(Z, V)}{\hbar k_1 \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (11)$$

Для проверки справедливости аппроксимации (10) в табл. 1 и 2 приведены значения $f(Z, V)$, рассчитанные численно по данным [11] (формулы (8), (9); (табл. 1), и результаты формулы (10) (табл. 2) для тех же значений зарядов иона и его энергии: первый столбец — энергия многозарядного иона в (MeV/nuc.); остальные столбцы — значения $f(Z, V)$ для ионов заряда 6, 13, 29, 50, 80, 92 соответственно). Как видно из таблиц, предложенная аппроксимация (10) достаточно хороша, во всяком случае в пределах изменения Z и V , для которых приведены данные работы [11].

Складывая (2) и (11), мы получим величину полных потерь энергии релятивистского многозарядного иона на единицу длины при движении в равновесной электронной плазме

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi N(Ze^2)^2}{mV^2} \left[\ln \frac{2mV^2 f(Z, V)}{\hbar \sqrt{1-\beta^2} \omega_p} - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (12)$$

Полагая в (12) $f(Z, V) = 1$, получим формулу, соответствующую теории торможения, которая может быть получена из стандартной схемы расчета, когда вклад области отдельных столкновений учитывается в первом борновском приближении,

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi N(Ze^2)^2}{mV^2} \left[\ln \frac{2mV^2}{\hbar \sqrt{1-\beta^2} \omega_p} - \frac{\beta^2}{2} \right]. \quad (13)$$

Приведем также нерелятивистский предел ($\beta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$) формулы (12) (при получении последнего учитывалась связь (9) и тот факт, что $a(Z, V) \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$)

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi N(Ze^2)^2}{mV^2} \ln \frac{2mV^2}{\hbar \omega_p}. \quad (14)$$

Как следует из сравнения (12) и (13), введенная нами функция $f(Z, V)$ описывает отклонения (появляющиеся для релятивистских ионов больших зарядов) от теории торможения, использующей первое борновское приближение. Для ионов малых зарядов значения $f(Z, V)$ близки к единице, а с учетом того, что функция f входит в формулу (12) под знаком логарифма, наши результаты, при малых Z , не отличаются от борновского приближения — формула (13), тогда как при больших Z отклонения становятся существенными; наконец, в нерелятивистском случае формула (12) переходит в известный [1] результат — формула (14). Именно такое поведение формулы (12) проиллюстрировано на рис. 1–6. На этих же рисунках приведена зависимость потерь энергии $|dE/dx|$ (MeV/cm) релятивистских ионов для заряда $Z = 6, 13, 29, 50, 80, 92$ (принято для иллюстрации, что $\omega_p = 0.5 \text{ at.un} = 13.605 \text{ eV}$) от энергии

ионов T (MeV/nuc.); сплошная кривая — точный расчет, формула (12); пунктир — ”борновское приближение”, формула (13); штриховая — нерелятивистский предел, формула (14). Как видно из рисунков, поправки за счет точного учета поля иона растут с увеличением заряда иона, достигая, например, для $Z = 92$ примерно 15%.

Таким образом, полученная нами формула (12) позволяет рассчитывать потери энергии релятивистских высокозарядных ионов в электронной плазме в случаях неприменимости борновского приближения. Причем для быстрых ионов малых зарядов наши результаты численно переходят в борновское приближение, кроме того, формула (12) имеет стандартный [1] нерелятивистский предел (14).

Список литературы

- [1] Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
- [2] Hamada T. // Austr. J. Phys. 1978. Vol. 31. P. 291–298.
- [3] May R.M. // Austr. J. Phys. 1969. Vol. 22. P. 687–699.
- [4] Fermi E., Teller E. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 399–408.
- [5] Ларкин А.И. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 1. С. 264–272.
- [6] Ritchie R.H. // Phys. Rev. 1959. Vol. 114. N 3. P. 644–654.
- [7] Явлинский Ю.Н. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 4. С. 1623–1627.
- [8] Яковлев Д.Г., Котельников С.С. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. Вып. 4. С. 1348–1356.
- [9] Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, 1989. 623 с.
- [10] Матвеев В.И., Толманов С.Г. // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 6. С. 1780–1791.
- [11] Doggett J.A., Spenser L.V. // Phys. Rev. 1956. Vol. 103. N 6. P. 1597–1601.
- [12] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, 1969. Гл. 2. С. 154–155.