

01;05;09;12

## Вихревые токи от движущихся точечных источников магнитного поля в эксперименте GRAVITY PROBE B

© А.С. Зильберглейт, М.Г. Кайзер

Gravity Probe B, HEPL, Stanford University, Stanford, CA 94305–4085, USA

(Поступило в Редакцию 30 октября 1996 г.)

Дано аналитическое решение двух двумерных граничных задач, моделирующих распределение магнитного поля и электрического тока от движущихся источников магнитного потока (флаксонов). В первой задаче флаксоны движутся с постоянной скоростью по плоской поверхности сверхпроводника, отделенного вакуумным зазором от полупространства, заполненного металлом с невысокой электропроводностью. Во втором случае вместо полупространства имеется тонкий слой металла, электропроводность которого высока. Решение строится с помощью методов разложения по малому параметру и интегрального преобразования Фурье. Равенство Парсевала используется для вычисления мощности, рассеянной в металле. Оценка этой величины необходима для расчета некоторых вращающих моментов магнитного происхождения в эксперименте Gravity Probe B.

### Введение

Целью эксперимента Gravity Probe B (GP-B) является измерение отклонения оси вращения сверхпроводящего гироскопа (вращающегося шара), установленного на искусственном спутнике Земли на круговой полярной орбите (подробное описание эксперимента содержится в работах [1,2]). Этот дрейф является результатом действия двух эффектов общей теории относительности. Согласно теории, он должен быть очень малым ( $0.042''$  в год и  $6.6''$  в год в направлениях Восток–Запад и Север–Юг соответственно), а планируемая точность измерения очень высока, так что классические (нерелятивистские) вращающие моменты, вызывающие отклонение оси, должны быть либо исключены либо тщательно учтены.

В частности, на поверхности сверхпроводящего ротора будут квантоворазмерные источники магнитного поля (флаксоны), которые индуцируют вихревые токи и, таким образом, вызывают диссипацию энергии в окружающих нормальных металлах. В результате возникают дифференциальные демпфирующие вращающие моменты, которые требуется оценить.

В настоящей работе получены такие оценки путем решения двух модельных краевых задач в плоской геометрии (они могут также представлять интерес для некоторых других приложений). Можно избежать сложностей, связанных со сферической геометрией, имеющей место в GP-B эксперименте, поскольку зазор между поверхностью вращающегося шара и окружающими его нормальными металлами очень мал по сравнению с радиусом ротора.

В первой задаче рассматривается флаксон-антифлаксонная пара, которая движется с постоянной скоростью по сверхпроводящей плоскости (поверхность ротора), отделенной зазором от полупространства с конечной электропроводностью. Для эксперимента GP-B это моделирует влияние так называемого (удерживающего

стержня, который в действительности располагается над небольшой частью поверхности шара. Однако верхний предел энергии диссипации, которыми мы интересуемся, может, очевидно, быть найден, если предположить, что металл покрывает всю поверхность, моделируемую полупространством.

Во второй задаче полупространство из первой заменяется на тонкий слой с высокой электропроводностью. В условиях GP-B это моделирует влияние шести электродов системы подвески ротора, сделанных из материала с высоким содержанием меди. Электроды также покрывают в действительности около 45% поверхности ротора, но наиболее консервативная оценка диссипированной энергии, а значит, и вращающих моментов получается в предположении, что покрыта вся поверхность.

Мы завершаем статью оценками замедления (уменьшения частоты) вращения GP-B гироскопа, вызванного диссипацией энергии вихревого тока.

### 1. Задача для проводящего полупространства: постановка и представление решения

Пусть металл с электропроводностью  $\sigma$  и магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0$  занимает полупространство  $z' > d$  декартовой координатной системы  $\{x', y', z'\}$ . Плоскость  $z = 0$  является поверхностью сверхпроводника, по которой флаксон и антифлаксон движутся с постоянной скоростью  $v \ll c$  вдоль оси  $x'$ ; слой  $0 < z' < d$  представляет собой диэлектрический зазор (рис. 1). Уравнения и граничные условия для магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и вихревых токов с плотностью  $\mathbf{j}$ , индуцированных в металле, имеют вид [3, гл. X] зазор (среда 1)

$$\nabla' \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla' \times \mathbf{B} = 0; \quad 0 < z' < d, \quad |x'|, |y'| < \infty; \quad (1.1)$$

$$B_{z'}|_{z'=0} = \Phi_0 \left[ \delta(x' - x'_f(t))\delta(y' - y'_f) - \delta(x' - x'_a(t))\delta(y' - y'_a) \right],$$

$$\mathbf{B}|_{|x'|, |y'| \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (1.2)$$

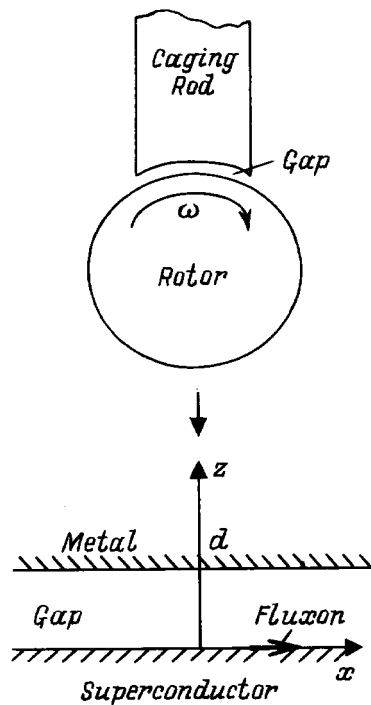


Рис. 1.

проводник (среда 2)

$$\nabla' \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla' \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla' \times \mathbf{j} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$z' > d, \quad |x'|, |y'| < \infty; \quad (1.3)$$

граница раздела

$$\mathbf{B}|_{z'=d+0} = \mathbf{B}|_{z'=d-0}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\Phi_0$  — магнитный поток точечного источника (в GP-B,  $\Phi_0 = h/2e$  есть квант магнитного потока,  $h$  — постоянная Планка,  $e$  — заряд электрона),  $\delta$  обозначает дельта-функцию Дирака,  $x'_{f,a}(t) = x'_{f,a} + vt$ ,  $y'_{f,a}$  есть координаты флаксона и антифлаксона соответственно; штрих у символа  $\nabla$  означает дифференцирование по штрихованным переменным. Заметим, что плотность тока  $\mathbf{j}$  может быть исключена из последних двух уравнений в (1.3), что приводит к уравнению второго порядка для  $\mathbf{B}$ ,

$$-\sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{B} = -\Delta' \mathbf{B},$$

$$z' > d, \quad |x'|, |y'| < \infty, \quad (1.5)$$

причем последнее равенство справедливо вследствие соленоидальности  $\mathbf{B}$ .

Будем искать квазистационарное решение (1.1)–(1.4); введем систему безразмерных координат, движущуюся вместе с источниками,

$$x = \frac{x' - x'_f(t)}{d} = \frac{x' - x'_f - vt}{d},$$

$$y' = \frac{y' - y'_f}{d}, \quad z' = \frac{z'}{d}. \quad (1.6)$$

В этих переменных задача приобретает вид: среда 1

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0; \quad 0 < z < 1, \quad |x|, |y| < \infty; \quad (1.7)$$

$$B_z|_{z=0} = \frac{\Phi_0}{d^2} [\delta(x)\delta(y) - \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)]; \quad (1.8)$$

среда 2

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \Delta \mathbf{B} = -\varkappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}; \quad z > 1, \quad |x|, |y| < \infty; \quad (1.9)$$

граница раздела

$$\mathbf{B}|_{z=1+0} = \mathbf{B}|_{z=1-0}. \quad (1.10)$$

Мы не выписываем очевидные условия на бесконечности и обозначаем  $x_0 = (x_a - x_f)/d$ ,  $y_0 = (y_a - y_f)/d$ ; единственным безразмерным параметром задачи является величина

$$\varkappa = \sigma \mu_0 v d. \quad (1.11)$$

Задача (1.7)–(1.10) может быть решена более или менее стандартным путем при помощи интегрального преобразования Фурье по переменным  $x$  и  $y$ , что приводит к распределению поля и тока в виде весьма громоздких двойных интегралов Фурье, затрудняющих дальнейший анализ и скрывающих физический смысл результата. Вместо этого будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра  $\varkappa$  ( $\varkappa \lesssim 0.02$ , в условиях GP-B)

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(0)}(x, y, z) + \varkappa \mathbf{B}^{(1)}(x, y, z) + \varkappa^2 \mathbf{B}^{(2)}(x, y, z) + \dots, \quad (1.12)$$

причем функциональные коэффициенты  $\mathbf{B}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  должны при этом быть найдены из последовательности задач, вытекающей из (1.7)–(1.10) и (1.12)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(k)} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}^{(k)} = 0; \quad 0 < z < 1, \quad |x|, |y| < \infty;$$

$$B_z^{(k)}|_{z=0} = \frac{\Phi_0}{d^2} [\delta(x)\delta(y) - \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)] \delta_{k0}; \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(k)} = 0, \quad \Delta \mathbf{B}^{(k)} = -(1 - \delta_{k0}) \frac{\partial \mathbf{B}^{(k-1)}}{\partial x};$$

$$z > 1, \quad |x|, |y| < \infty;$$

$$\mathbf{B}^{(k)}|_{z=1+0} = \mathbf{B}^{(k)}|_{z=1-0}, \quad (1.14)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  и  $\delta_{00} = 1$ ,  $\delta_{k0} = 0$ ,  $k \geq 1$ .

Из (1.12) и второго уравнения в (1.3) следует, что соответствующее разложение для плотности тока в проводнике есть

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0 d} \nabla \times \mathbf{B} = (\varkappa \mathbf{j}^{(1)} + \varkappa^2 \mathbf{j}^{(2)} + \dots),$$

$$\mathbf{j}^{(k)} = \frac{1}{\mu_0 d} \nabla \times \mathbf{B}^{(k)}, \quad z > 1, \quad (1.15)$$

где учтено, что  $\nabla \times \mathbf{B}^{(0)} = 0$  во всем полупространстве  $z > 0$ ; соответственно плотность тока является величиной первого порядка по  $\varkappa$ , так как без проводника ( $\varkappa = 0$ ) тока нет вообще.

Нашей целью является определение  $\mathbf{j}^{(1)}$ , т.е. главного члена в распределении тока, и затем расчет диссипированной энергии в первом порядке. Это можно сделать без особых технических затруднений, и результат имеет ясный физический смысл.

## 2. Задача для полупространства: распределение тока и диссипированной энергии

Вернемся к цепочке задач (1.13), (1.14) "Невозмущенное" решение  $\mathbf{B}^{(0)}$  является, естественно, полем двух точечных источников в полупространстве без проводника. Оно удовлетворяет уравнению Лапласа в полупространстве  $z > 0$  с граничным условием (1.13) и поэтому может быть представлено в виде

$$\mathbf{B}^{(0)} = \nabla\psi^{(0)}, \quad z > 0, \\ \psi^{(0)}(x, y, z) = -\frac{\Phi_0}{2\pi d^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right), \quad (2.1)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $R_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$  суть расстояния от источников до произвольной точки с координатами  $(x, y, z)$ .

Для отыскания главного члена в разложении плотности тока (1.15) необходимо знать поле  $\mathbf{B}^{(1)}$ , удовлетворяющее задаче (1.13), (1.14) с  $k = 1$ , а точнее, ротор этого поля в проводнике. Замечательно, что последний может быть определен без полного решения соответствующей краевой задачи. Действительно, используя (2.1), представим поле в проводнике в виде

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} - \frac{x}{2}\mathbf{B}^{(0)} + \frac{1}{2}\psi^{(0)}\mathbf{e}_x \\ = \mathbf{b}^{(1)} - \frac{x}{2}\nabla\psi^{(0)} + \frac{1}{2}\psi^{(0)}\mathbf{e}_x \\ = \mathbf{b}^{(1)} - \frac{1}{2}\nabla(x\psi^{(0)}) + \psi^{(0)}\mathbf{e}_x, \quad z > 1, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{b}^{(1)}(x, y, z)$  есть новое искоемое поле,  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ .

С помощью (2.1), (2.2) и уравнения (1.14) с  $k = 0$  легко обнаружить, что

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(1)} = \nabla \cdot \mathbf{b}^{(1)} - \frac{x}{2}\nabla \cdot \mathbf{B}^{(0)} - \frac{1}{2}\mathbf{B}^{(0)} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{(0)} = \nabla \cdot \mathbf{b}^{(1)};$$

$$\Delta \mathbf{B}^{(1)} = \Delta \mathbf{b}^{(1)} - \frac{x}{2}\Delta \mathbf{B}^{(0)} - \frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\Delta \psi^{(0)} \\ = \Delta \mathbf{b}^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial x}, \quad z > 1,$$

ввиду чего из уравнения (1.14) с  $k = 1$  получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{b}^{(1)} = 0, \quad \Delta \mathbf{b}^{(1)} = 0, \quad z > 1. \quad (2.3)$$

Поэтому, полагая

$$\mathbf{b}^{(1)} = \nabla\psi^{(1)} + \nabla \times \mathbf{A}^{(1)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}^{(1)} = 0, \quad z > 1, \quad (2.4)$$

видим, что оба неизвестных потенциала  $\psi^{(1)}$  и  $\mathbf{A}^{(1)}$  являются гармоническими в полупространстве, занятом проводником,

$$\Delta\psi^{(1)} = 0, \quad \Delta\mathbf{A}^{(1)} = 0, \quad z > 1. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.2), находим

$$\mathbf{B}^{(1)} = \nabla \left( \psi^{(1)} - \frac{x}{2}\psi^{(0)} \right) \\ + \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} + \psi^{(0)}\mathbf{e}_x, \quad z > 1. \quad (2.6)$$

В соответствии с (2.4), (2.5) первые два слагаемых в правой части (2.6) являются безвихревыми, поэтому

$$\nabla \times \mathbf{B}^{(1)} = \nabla\psi^{(0)} \times \mathbf{e}_x = \mathbf{B}^{(0)} \times \mathbf{e}_x, \quad z > 1. \quad (2.7)$$

На основании этого равенства формулы (1.15), (1.11) позволяют определить главный член плотности тока, который имеет вид

$$\mathbf{j} = \varkappa\mathbf{j}^{(1)} + O(\varkappa)^2 = \sigma v\mathbf{B}^{(0)} \times \mathbf{e}_x + O(\varkappa)^2, \quad z > 1. \quad (2.8)$$

Результат (2.8) имеет ясный физический смысл. В самом деле, когда проводник движется со скоростью  $\mathbf{v}^{(0)}$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}^{(0)}$ , индуцированная плотность тока известна и задается формулой Лоренца

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(0)}. \quad (2.9)$$

В нашем случае, очевидно,  $\mathbf{v}^{(0)} = -v\mathbf{e}_x$  и, поскольку проводимость мала, индуцированным магнитным полем можно пренебречь по сравнению с внешним полем  $\mathbf{B}^{(0)}$ ; это превращает (2.9) в (2.8).

Найдем теперь энергию, диссипированную флаксоном-антифлаксоном согласно формуле

$$P_{fa} = \frac{1}{\sigma} \int_{z'>d} j^2 dV' = \frac{d^3}{\sigma} \int_{z>1} j^2 dV \\ \simeq \sigma v^2 d^3 \int_{z>1} [(B_y^{(0)})^2 + (B_z^{(0)})^2] dV$$

(приближенное равенство здесь и ниже означает, что выражение вычисляется в первом отличном от нуля порядке по  $\varkappa$ ).

После подстановки выражения (2.1) для  $\mathbf{B}^{(0)}$  в первую часть необходимо только вычислить интегралы для окончательного результата; выкладки, однако, оказываются достаточно громоздкими, а их результат зависит от взаимного положения флаксона и антифлаксона.

В действительности мы интересуемся универсальной верхней оценкой для  $P_{fa}$ , которая может быть найдена

через скорость диссипации энергии  $P_f$  единичного флаксона, определенную в соответствии с формулой

$$P_f = \frac{d^3}{\sigma} \int_{z>1} j_f^2 dV \approx \sigma v^2 d^3 \int_{z>1} [(B_{f,y}^{(0)})^2 + (B_{f,z}^{(0)})^2] dV. \quad (2.10)$$

Здесь магнитное поле представлено естественным образом в виде суммы поля флаксона и антифлаксона (см. (2.1)),  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}_f^{(0)} + \mathbf{B}_a^{(0)}$ ,  $\mathbf{B}_f^{(0)} \sim \nabla(1/R)$ ,  $\mathbf{B}_a^{(0)} \sim \nabla(1/R_0)$  с соответствующим разбиением плотности тока из (2.9),  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_a$ . Очевидно, что  $P_f = P_a$ , откуда

$$P_{fa} = \frac{d^3}{\sigma} \int_{z>1} (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_a)^2 dV = \frac{d^3}{\sigma} \int_{z>1} (j_f^2 + j_a^2 + 2\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{j}_a) dV \leq \frac{d^3}{\sigma} 2 \int_{z>1} (j_f^2 + j_a^2) dV = 2(P_f + P_a) = 4P_f. \quad (2.11)$$

Комбинируя теперь (2.11) с (2.10) и подставляя значение  $\mathbf{B}_f^{(0)}$  из (2.1) в интеграл для  $P_f$ , находим

$$P_{fa} \leq 4P_f \approx \sigma v^2 d^3 \frac{\Phi_0^2}{\pi^2 d^4} \int_{z>1} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \right)^2 \right] dV = \frac{\sigma v^2 \Phi_0^2}{\pi^2 d} \int_{z=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz. \quad (2.12)$$

Интегралы в (2.12) легко вычисляются, что дает желаемую простую оценку

$$P_{fa} \leq 4P_f = \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma v^2 \Phi_0^2}{d}. \quad (2.13)$$

Обычно значение  $P_{fa}$  как минимум вдвое меньше, чем этот верхний предел.

### 3. Задача для сильно проводящего тонкого слоя: постановка и асимптотическое упрощение

Обратимся теперь ко второй задаче, в которой проводящее полупространство заменяется проводящим слоем толщины  $d_0$ , занимающим область  $d < z' < d + d_0$  (рис. 2). Слой предполагается тонким  $d_0 \ll d$ , а его электропроводность высокой, так что параметр  $\varkappa$  теперь не мал (для условия GP-B  $d_0 \sim 0.1d$ ,  $\varkappa \sim 30$ ).

Следовательно, вне слоя в полупространстве  $z > 0$  магнитное поле удовлетворяет уравнениям (1.7) с граничным условием (1.8) и стремится к нулю на бесконечности, в то время как в слое  $1 < z < 1 + d_0/d$  справедливы

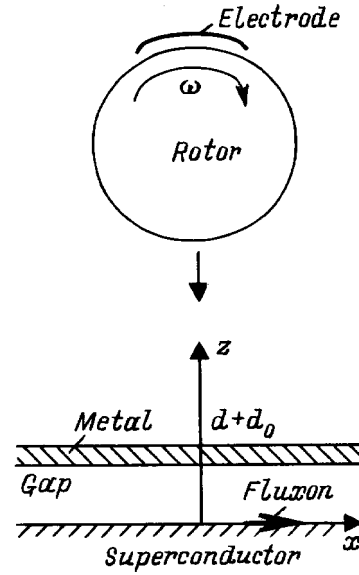


Рис. 2.

уравнения (1.9); соответствующие условия непрерывности должны удовлетворяться на обеих поверхностях слоя (здесь и далее мы вновь используем безразмерные движущиеся координаты (1.6)). Решение этой задачи выглядит очень сложно и анализ его затруднен, поэтому требуется еще одно физически осмысленное упрощение модели. Очевидно, что подходящим упрощением является замена тонкого высокопроводящего слоя конечной толщины на бесконечно тонкий слой, несущий ток с некоторой поверхностной плотностью  $\mathbf{j}^s = \mathbf{j}^s(x, y)$ . Известно [2, 7.21; 3, гл. 1, разд. 2], что условия для поля имеют при этом вид

$$B_z|_{z=1+0} = B_z|_{z=1-0},$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{B}|_{z=1+0} - \mathbf{B}|_{z=1-0}) = \mu_0 \mathbf{j}^s. \quad (3.1)$$

Таким образом, для замыкания задачи необходимо только связать  $\mathbf{j}^s$  с полем  $\mathbf{B}$ . Чтобы сделать это, мы введем векторный потенциал  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.2)$$

и заметим, что последнее из уравнений (1.3) (уравнение индукции), которое справедливо в реальном трехмерном слое, дает

$$\mathbf{j} = \sigma v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}.$$

Следовательно, для поверхностной плотности тока можно написать

$$\mathbf{j}^s(x, y) = \sigma v d_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \Big|_{z=1}. \quad (3.3)$$

Заметим, что условия (3.1), (3.3) можно вывести с помощью процедуры асимптотического интегрирования

полной трехмерной задачи, известной из асимптотической теории "тонких" тел (пластин, оболочек) [4–9].

Соотношения (3.1)–(3.3) позволяют сформулировать всю краевую задачу через векторный потенциал. Используя уравнения (1.7) для  $z > 0$ ,  $z \neq 1$  и граничное условие (1.8), запишем

$$\Delta \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad z > 0, \quad z \neq 1;$$

$$\left. \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_{z=0} = \frac{\Phi_0}{d^2} [\delta(x)\delta(y) - \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)];$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle|_{z=1} = 0;$$

$$\left\langle \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\rangle|_{z=1} = -\kappa_0 \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{z=1},$$

$$\left\langle \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right\rangle|_{z=1} = \kappa_0 \frac{\partial A_y}{\partial x} \Big|_{z=1}, \quad (3.4)$$

$$\kappa_0 = \kappa \frac{d_0}{d} = \sigma \mu_0 \nu d_0 \quad (3.5)$$

и угловые скобки обозначают скачок величины, стоящей внутри них,

$$\langle a \rangle|_{z=1} = (a|_{z=1+0} - a|_{z=1-0}).$$

Векторная краевая задача (3.4)–(3.7) все еще достаточно громоздка; существует, однако, естественный способ сведения ее к достаточно простой скалярной задаче. Очевидно, что поверхностная плотность тока не имеет  $z$  компоненты,  $j_z^s = 0$ , поэтому (3.3) требует  $A_z = 0$  по крайней мере для  $z = 1$ . Ввиду этого потребуем  $A_z = 0$  всюду, полагая, таким образом, что

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \quad z > 0. \quad (3.6)$$

Чтобы удовлетворить условию нулевой дивергенции (3.6), положим

$$A_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad A_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (3.7)$$

где  $\Pi = \Pi(x, y, z)$  — новая искомая функция.

В соответствии с (3.3) и (3.7) поверхностная плотность тока выражается через  $\Pi$  формулами

$$j_x^s = -\sigma \nu d_0 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \Big|_{z=1}, \quad j_y^s = \sigma \nu d_0 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \Big|_{z=1}. \quad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что уравнение и граничные условия (3.4) выполняются: если  $\Pi(x, y, z)$  является решением следующей задачи:

$$\Delta \Pi = 0, \quad z > 0, \quad z \neq 1;$$

$$-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{\Phi_0}{d^2} [\delta(x)\delta(y) - \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)];$$

$$\langle \Pi \rangle|_{z=1} = 0; \quad \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right\rangle|_{z=1} = -\kappa_0 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Big|_{z=1}. \quad (3.9)$$

За исключением второй производной в граничном условии (3.9) при  $z = 0$ , эта скалярная задача является стандартной; ее решение дано ниже.

#### 4. Задача для слоя: решение и вычисление диссипированной энергии

Решение задачи (3.9) строится с помощью интегрального преобразования Фурье по переменным  $x$  и  $y$ ; для  $z \geq 1$  это дает следующее выражение для  $\Pi(x, y, z)$ :

$$\Pi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Pi}(\lambda, \nu, z) e^{i(\lambda x + \nu y)} d\lambda d\nu;$$

$$\hat{\Pi}(\lambda, \nu, z) = D(\lambda, \nu) e^{-\gamma z};$$

$$\gamma(\lambda, \nu) = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \geq 0,$$

$$D(\lambda, \nu) = -\frac{\Phi_0}{d^2 \gamma} \frac{1 - e^{-i(\lambda x_0 + \nu y_0)}}{\gamma - i(\kappa_0/2)\lambda(1 - e^{-\gamma})}; \quad z \geq 1. \quad (4.1)$$

В области  $0 < z < 1$  выражение для  $\hat{\Pi}(\lambda, \nu, z)$  слегка отличается от (4.1), однако для наших целей его приводить не нужно.

Из (4.1) по формулам предыдущего раздела можно вычислить все требуемые физические поля. В частности, для поверхностной плотности тока в соответствии с (3.8) получим

$$\mathbf{j}^s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{j}}^s(\lambda, \nu) e^{i(\lambda x + \nu y)} d\lambda d\nu;$$

$$\frac{\hat{j}_x^s(\lambda, \nu)}{\sigma \nu d_0} = \lambda \nu \hat{\Pi}(\lambda, \nu, 1) = \lambda \nu D(\lambda, \nu) e^{-\gamma},$$

$$\frac{\hat{j}_y^s(\lambda, \nu)}{\sigma \nu d_0} = -\lambda^2 \hat{\Pi}(\lambda, \nu, 1) = -\lambda^2 D(\lambda, \nu) e^{-\gamma}. \quad (4.2)$$

Чтобы вычислить диссипированную мощность  $P_{fa}$ , используем равенство Парсеваля, которое при определенных условиях на функцию  $f(x, y)$  имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda, \nu)|^2 d\lambda d\nu,$$

где  $\hat{f}(\lambda, \nu)$  есть фурье-образ  $f(x, y)$ .

Поэтому на основании (4.2), (4.1) мы можем написать следующую цепочку равенств:

$$P_{fa} = \frac{d^2}{\sigma d_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(j_x^s(x, y))^2 + (j_y^s(x, y))^2] dx dy$$

$$= \frac{d^2}{\sigma d_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\hat{j}_x^s(\lambda, \nu))^2 + (\hat{j}_y^s(\lambda, \nu))^2] d\lambda d\nu$$

$$= \sigma \nu^2 d_0 d^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \gamma^2 e^{-2\gamma} |D(\lambda, \nu)|^2 d\lambda d\nu$$

или, подставляя величину  $D(\lambda, \nu)$  из (4.1),

$$P_{fa} = \frac{\sigma v^2 d_0 \Phi_0^2}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-2\gamma} \times \left| \frac{1 - e^{-i(\lambda x_0 + \nu y_0)}}{\gamma - i(x_0/2)\lambda(1 - e^{-\gamma})} \right|^2 d\lambda d\nu. \quad (4.3)$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления и получить оценку, не зависящую от взаимного расположения флаксона и антифлаксона, мы снова оценим  $P_{fa}$  с помощью энергии  $P_f$ , диссипированной единичным флаксоном; в этом случае оценка базируется на очевидном неравенстве для множителя в подынтегральной функции в (4.3)

$$\left| 1 - e^{-i(\lambda x_0 + \nu y_0)} \right|^2 = 4 \sin^2 \frac{\lambda x_0 + \nu y_0}{2} \leq 4.$$

Выражение (4.3) с единицей вместо этого множителя есть, очевидно,  $P_f$ , следовательно, мы имеем

$$P_{fa} \leq 4P_f = \frac{4\sigma v^2 d_0 \Phi_0^2}{d^2} C(x_0);$$

$$C(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-2\gamma}}{\gamma^2 + (x_0/2)^2 \lambda^2 (1 - e^{-2\gamma})^2} d\lambda d\nu, \quad \gamma(\lambda, \nu) = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \geq 0. \quad (4.4)$$

Двойной интеграл, представляющий коэффициент  $C(x_0)$ , может быть вычислен явно. Это приводит к формуле

$$C(x_0) = \frac{\pi}{2\alpha^2} \left[ \ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1}{2} + \alpha \ln(\sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha) + \sqrt{1 + \alpha^2} \ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1}{2(1 + \alpha^2)} \right], \quad \alpha = \frac{x_0}{2} > 0, \quad (4.5)$$

вывод которой приведен в Приложении. В ходе вывода возникает промежуточное представление в виде однократного интеграла

$$C(x_0) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\gamma e^{-2\gamma}}{\sqrt{1 + (x_0/2)^2 p^2(\gamma)}} d\gamma, \quad \times [\sqrt{1 + (x_0/2)^2 p^2(\gamma)} + 1] \quad p(\gamma) = 1 - e^{-2\gamma}, \quad (4.6)$$

которое дает простую оценку для  $C(x_0)$

$$C(x_0) < C(0) = \pi \int_0^{\infty} \gamma e^{-2\gamma} d\gamma = \frac{\pi}{4} \quad (4.7)$$

(формула (4.5) в пределе  $\alpha \rightarrow +0$  доставляет, естественно, ту же самую величину  $C(0)$ ). Из (4.6) также ясно,

что  $C(x_0)$  является монотонно убывающей функцией  $x_0$ , поведение которой при больших значениях аргумента описывается формулой

$$C(x_0) \sim \frac{2\pi}{x_0^2} (\ln x_0 + 0.75 - 3 \ln 2).$$

Комбинация (4.4) и (4.7) приводит к простой оценке диссипированной энергии

$$P_{fa} \leq 4P_f < \frac{\pi \sigma v^2 d_0 \Phi_0^2}{d^2}. \quad (4.8)$$

Заметим, что помимо значения численного коэффициента единственное отличие (4.8) от соответствующей оценки (2.13) в задаче для полупространства заключается в множителе  $d_0/d$ , т.е. в отношении толщин слоя и зазора.

## 5. Заключение

В заключение дадим некоторые оценки, относящиеся к эксперименту Gravity Probe B. В этом случае флаксон-антифлаксонные пары расположены на поверхности гироскопа, вращающегося с угловой частотой  $\omega$ , поэтому их скорость есть  $v = \omega r_g$ , где  $r_g \simeq 1.91$  см — радиус ротора. Соответственно обе оценки (2.13) и (4.8) для максимальной энергии  $P_{fa}^{\max}$  диссипированной парой, могут быть записаны как

$$P_{fa}^{\max} = K \frac{\sigma \omega^2 r_g^2 \Phi_0^2}{d}, \quad (5.1)$$

где  $K = K_c = 3/4\pi \simeq 0.24$  для удерживающего стержня (моделированного полупространством) и  $K = K_e = \pi d_0/d \simeq 0.31$  для электродов (моделированных тонким слоем).

Единственным источником рассеянной энергии является кинетическая энергия ротора  $W = I\omega^2/2$ , где  $I \simeq 91.9$  г · см<sup>2</sup> — момент инерции ротора. Оценка для потери кинетической энергии за время  $T$  дается выражением

$$\delta W = NTP_{fa}^{\max}, \quad (5.2)$$

где  $N \sim 100$  есть число флаксон-антифлаксонных пар на поверхности гироскопа.

Потери означают замедление вращения гироскопа, выражаемое соответствующим уменьшением  $\delta\omega$  угловой скорости, которое мы хотим оценить. Так как  $\delta\omega$ ,  $\delta W$  малы, оба изменения связаны соотношением

$$\delta W = \delta \left( \frac{I\omega^2}{2} \right) \simeq I\omega \delta\omega,$$

так что

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\delta W}{W}.$$

Подставляя в это все необходимые выражения, данные выше (см. (5.1), (5.2)), мы получим желаемую оценку в виде

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = NTK \frac{\sigma r_g^2 \Phi_0^2}{Id}. \quad (5.3)$$

Для конкретных численных оценок необходимо знать лишь величину кванта магнитного потока  $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{Wb}$ , зазор  $d = 0.05 \text{ cm}$  и электропроводность, которая различна для saging rod и электродов  $\sigma = \sigma_c \simeq 2.4 \cdot 10^7 (\Omega \text{ m})^{-1}$  и  $\sigma = \sigma_e \simeq 6.5 \cdot 10^{10} (\Omega \text{ m})^{-1}$ ; последние значения взяты для титана и меди при температуре около 2 К. При характерном времени продолжительности эксперимента  $T = 1$  год это дает  $\delta\omega/\omega \sim 6.0 \cdot 10^{-10}$  и  $\delta\omega/\omega \sim 1.2 \cdot 10^{-6}$  для удерживающего стержня и электродов соответственно. Эти значения меньше, чем, например, замедление, вызванное молекулами остаточного газа, которое оценивается как  $\delta\omega/\omega \sim 3 \cdot 10^{-5}$  при давлении  $10^{-11} \text{ Torr}$  [1, с. 570]. Однако, принимая во внимание наиболее осторожные предположения, сделанные нами при моделировании, можно ожидать, что в действительности значения на один или два порядка ниже. Соответствующие вращающие моменты, вызывающие классический дрейф оси вращения гироскопа, пропорциональны  $\delta\omega/\omega$  и также находятся существенно ниже "опасного" значения.

Эта работа была выполнена при поддержке НАСА, грант № AS8-39225 для Gravity Probe B.

## Приложение

Получим явное выражение (4.5) для коэффициента  $C(\varkappa_0)$  путем вычисления двойного интеграла из его определения (4.4). Вычисление выполняется в два этапа. Во-первых, используя четность подынтегральной функции в (4.4) и полярные координаты  $\gamma, \varphi$  в плоскости  $\lambda, \nu, \lambda = \gamma \cos \varphi, \nu = \gamma \sin \varphi, \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}$ , запишем

$$C(\varkappa_0) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-2\gamma}}{\gamma^2 + (\varkappa_0/2)^2 \lambda^2 (1 - e^{-2\gamma})^2} d\lambda d\nu$$

$$= 4 \int_0^\infty \gamma e^{-2\gamma} d\gamma \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \alpha^2 p^2(\gamma) \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

$$\alpha = \frac{\varkappa_0}{2}, \quad p(\gamma) = 1 - e^{-2\gamma}.$$

Внутренний интеграл по  $\varphi$  легко сводится к табличному — 446.00 (см., например, [10]), что дает представление (4.6) в виде однократного интеграла, которое мы теперь запишем как

$$C(\varkappa_0) = \frac{2\pi}{\alpha^2} C_0(\alpha),$$

$$C_0(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\gamma e^{-2\gamma}}{p^2(\gamma)} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2(\gamma)}} \right] d\gamma$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1-p)}{p^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}} - 1 \right] dp, \quad (\text{П1})$$

Здесь введена новая переменная интегрирования  $p(\gamma) = 1 - e^{-2\gamma}$  вместо  $\gamma$ .

Второй этап состоит в вычислении  $C_0(\alpha)$ , которое из-за сингулярностей на обоих концах промежутка интегрирования  $p = 0$  и  $p = 1$  удобнее сначала для неопределенного интеграла

$$C_0(\alpha) = J(\alpha, p) \Big|_{p=0}^{p=1}, \quad (\text{П2})$$

где

$$J(\alpha, p) = \int \frac{\ln(1-p)}{p^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 p^2}} - 1 \right] dp$$

$$= \left[ 1 - \sqrt{1 + \alpha^2 p^2} \right] \frac{\ln(1-p)}{p}$$

$$+ \int \frac{1 - \sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{p(1-p)} dp, \quad (\text{П3})$$

и мы проинтегрировали по частям в (П3). Ясно, что последний интеграл можно разбить на сумму нескольких табличных, поэтому, используя, например, формулы 241.01, 380.311, 380.001, 380.111 из [10], после элементарных, но длинных и утомительных вычислений приходим к выражению

$$J(\alpha, p) = \left( \frac{1 - \sqrt{1 + \alpha^2 p^2}}{p} - 1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right)$$

$$\times \frac{\ln(1-p)}{p} + \ln(\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + 1)$$

$$- \ln(\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} - \alpha p) - \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$\times \ln \left[ \sqrt{1 + \alpha^2 p^2} (\sqrt{1 + \alpha^2 p^2} + \sqrt{1 + \alpha^2}) \right], \quad \alpha > 0.$$

Подставляя это в (П2) и учитывая тот факт, что вклад всего первого слагаемого с  $\ln(1-p)$  равен нулю, получаем окончательное выражение

$$C_0(\alpha) = \ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1}{2} + \alpha \ln(\sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha)$$

$$+ \sqrt{1 + \alpha^2} \ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1}{2(1 + \alpha^2)}, \quad \alpha > 0. \quad (\text{П4})$$

В силу (П1) это дает в точности выражение (4.5) для  $C(\varkappa_0)$ .

## Список литературы

- [1] *Everitt C.W.F.* Report on a Program to Develop a Gyro Test of General Relativity in a Satellite and Associated Control Technology. Stanford University, 1980.
- [2] *Turneaure J.P.* et al. // *Advances in Space Research*. 1989. Vol. 9. N 9. P. 29–38.
- [3] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1954.
- [4] *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
- [5] *Гольденвейзер А.Л.* // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1992. № 3. С. 5–17.
- [6] *Galaktionov E.V., Tropp E.A.* // *J. Crystal Growth*. 1987. Vol. 82. P. 65–69.
- [7] *Gregory R.D., Wan F.Y.* // *Int. J. Solids and Struct.* 1985. Vol. 21. P. 1005–1024.
- [8] *Зино И.Е., Тропп Е.А.* Асимптотические методы в проблемах теории теплопроводности и термоупругости. Л., 1978.
- [9] *Назаров С.А.* Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
- [10] *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов. М., 1948.