Краткие сообщения

01;07;09

Линейные топологические дефекты в векторных электромагнитных полях

© М.О. Сопин

Черновицкий государственный университет им. Ю. Федьковича,
274012 Черновцы, Украина

(Поступило в Редакцию 8 июня 1996 г.)

Рассматривается топологическая структура векторного электромагнитного поля в окрестности точки, где амплитуда поля обращается в нуль. Изучаются линейные топологические дефекты в виде дислокаций волнового фронта и дисклинаций. Показано, что поляризация поля в окрестности нуля амплитуды отлична от исходной. Исследуется структурная устойчивость нулей амплитуды.

1. На тот факт, что фаза волновой функции по самому смыслу определена лишь по модулю 2π, обратил внимание П. Дирак еще в 1931 г. Им же был рассмотрен исключительный случай, встречающийся, когда волновая функция обращается в нуль, — в таком случае фаза волновой функции не имеет смысла [1]. В применении к линейным скалярным волнам ситуация, в котрой фаза неопределена, рассматривалась в [2]. Фазовые сингулярности, являющиеся линиями в пространстве или точками на плоскости, при обходе вокруг которых фаза испытывает скачок, кратный 2π, были названы дислокациями волнового фронта. Было показано, что дислокации представляют тонкую структуру волнового поля в смысле выявления ими необычной фазовой топологии на масштабном уровне, определяемом длиной волны. Нули амплитуд и ассоциированные с ними дислокации волновых фронтов изучались как в статистических полях [3,4], так и в полях, имеющих детерминистскую природу [5]. Заметим, что рассмотрение проблемы проводилось в скалярном приближении. Попытка учета векторного характера спекл-поля была предпринята в [6]. В настоящей работе мы покажем, что учет векторных свойств электромагнитного поля приводит к новым интересным результатам, не имеющим места в скалярных волнах.

2. Итак, рассмотрим волновое монохроматическое электромагнитное поле, обладающее пространственной неоднородностью. Поместим в некоторую точку пространства, где амплитуда поля обращается в нуль, начало системы координат, направив ось $0X_3$ вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$. В силу волнового характера, вектор-потенциал поля можно выбрать в виде двухкомпонентной функции

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3)e^{i\theta_1} \\ u_2(x_1, x_2, x_3)e^{i\theta_2} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kx_3)}. \qquad (1)$$

Здесь θ_1, θ_2 — некоторые вещественные константы. Как обычно, поле подчиняется волновому уравнению и дополнительному калибровочному условию [7]

$$\Box\mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \qquad (2), (3)$$

Предлагая гладкость компонент вектор-потенциала и рассматривая для общности случай m-кратного нуля, амплитуду поля в некоторой окрестности точки нуля представим в виде

$$u_{1,2}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m = 1}^{3} f^{(1,2)}_{j_1 j_2 \dots j_m} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}. \qquad (4)$$

Здесь $f^{(1,2)}_{j_1 j_2 \dots j_m}$ — постоянные коэффициенты. Удовлетворение условиям (2) и (3) приведет к тому, что $u_{1,2}$ окажутся гармоническими функциями двух переменных x_1 и x_2. Далее следует различать два случая.

3. Пусть $f^{(1,2)}_{j_1 j_2 \dots j_m}$ — комплексные величины. Это позволяет рассматривать $u_{1,2}$ как функции комплексного переменного. Естественным является требование аналитичности (если переменным считать $x_1 + ix_2$) или антианалитичности (когда переменным является $x_1 - ix_2$) этих функций. Таким образом, конструируются два типа локальных решений, которые в цилиндрической системе координат (ρ, φ, x_3) имеют вид

$$\mathbf{A}^{\pm} = a\rho^m \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kx_3 \pm m\varphi)}. \qquad (5)$$

Злесь a — несущественная для нас комплексная константа. При этом мы предполагали, что векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ попарно ортогональны ($\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/c\partial t$ и $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ — напряженности электрического и магнитного полей). Два типа решений соответствуют состояниям поля с правой и левой круговой поляризацией. Фазовые поверхности решений представляют собой геликоиды противоположной закрутки, причем направление закрутки и характер круговой поляризации жестким образом связаны друг с другом. В силу аналитичности (антианалитичности) компонент комплексной амплитуды нуль является изолированной точкой в плоскости $x_3 = 0$, но может описывать некоторую кривую в трехмерном пространстве. Эта линейная фазовая сингулярность, являющаяся носителем нуля амплитуды, будет линией винтовой дислокации. Топологически устойчивым решениям отвечают линии, не имеющие ни начала, ни конца.

Нетривиальность топологической структуры электромагнитного поля в окрестности нуля видна, если рассмотреть плоское поле градиента фазы $\mathbf{w} = (\partial_1\Psi,\ \partial_2\Psi)$. Интегральные траектории такого поля замкнуты и описывают планарные вихри. Топологическим инвариантом является величина

$$Q \equiv \frac{1}{2\pi} \oint w^{-2}(w_1 dw_2 - w_2 dw_1) = m,$$

выражающая число оборотов вектора $\mathbf{w}$ вокруг точки нуля [8]. У физиков эта величина получила название топологического заряда и в данном случае может принимать целые значения $Q = 0$ (фон), $Q = +1$ (монопольный вихрь), $Q = +2$ (дипольный вихрь) и т. д. Как видно из [5], двум типам решений можно приписать разноименные топологические заряды.

4. Пусть $f^{(1,2)}_{j_1 j_2 \dots j_m}$ — действительные величины. Тогда вектор-потенциал в окрестности нуля имеет вид

$$\mathbf{A} = \rho^m \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos m\varphi + \alpha_2 \sin m\varphi \\ \alpha_2 \cos m\varphi - \alpha_1 \sin n\varphi \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kx_3)}. \qquad (6)$$

Здесь α_1, α_2 — несущественные для нас вещественные константы. При этом мы опять требовали выполнения условия попарной ортогональности тройки векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Существенным отличием от предыдущего случая является то, что в окрестности такого нуля поляризация оказывается линейной.

Нетривиальность топологической структуры электромагнитного поля в окрестности нуля видна, если рассмотреть инвариант

$$Q \equiv \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{x_3,\, t=\mathrm{const}} A^{-2}(A_1 dA_2 - A_2 dA_1) = -m.$$

При $m = 1$ векторное поле является невырожденным в точке нуля [9]. В этом случае нуль, будучи изолированной точкой в плоскости $x_3 = 0$, может описывать некоторую кривую в трехмерном пространстве. Топологически устойчивым решениям отвечают линии без начала и конца. Такие линии, где направление вектора не определено, называются дисклинациями, они и будут носителями нуля амплитуды в рассматриваемой ситуации. Топологический заряд, вообще говоря, может принимать отрицательные целые значения: $Q = 0$ (фон), $Q = -1$ (монопольный заряд), $Q = -2$ (квадрупольный заряд) и т. д.

5. Плоское гладкое векторное поле, как известно [9], задает некоторое непрерывное отображение окружности в окружность. Введение топологического заряда позволяет разбивать множество таких отображений на непересекающиеся классы эквивалентности по признаку Q. Такое обособление делает проблему рождения (уничтожения) топологических дефектов нетривиальной. Тем не менее, рассматривая слияние двух дислокаций одинаковой силы, но противоположной закрутки, получим

$$\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = 2a\rho^m \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kx_3)}. \qquad (7)$$

Как видно, дислокации, аннигилируя, рождают дисклинацию, имеющую соответствующий порядок нуля. В [4] был указан механизм рождения двух разноименных дислокаций из точки нуля амплитуды. Из нашего примера следует возможность сопряжения дисклинаций с концами разноименных дислокаций, иначе говоря, дислокации могут парами рождаться из дисклинаций и оканчиваться на дисклинациях.

6. Наконец, сделаем несколько замечаний по поводу структурной устойчивости рассмотренных нами нулей амплитуды векторного электромагнитного поля. Напомним, что функция называется структурно устойчивой, если при любых достаточно малых гладких возмущениях ее критические точки не меняют своего типа [10]. Из уравнения (3) следует, что всегда можно найти гладкую функцию $F(x_1, x_2)$, такую, что компоненты амплитуды вектор-потенциала поля будут выражаться через производные от этой функции $u_1 = \partial F/\partial x_2$, $u_2 = -\partial F/\partial x_1$, по-прежнему $u_3 \equiv 0$. Формально это следует из возможности введения в окрестности точки нуля симплектической структуры, задаваемой 2-формой $dx_1 \Lambda dx_2$. В этом случае амплитуда вектор-потенциала записывается в виде кососимметричного градиента $\mathbf{u} = s\,\mathrm{grad}\,F$. Нуль амплитуды поля, таким образом, является критической точкой функции $F(x_1, x_2)$. Известно, что критическая точка структурно устойчива тогда и только тогда, когда она не вырождена, вырождение нуля в свою очередь определяется рангом матрицы Гессе $\parallel \partial^2 F(0,0)/\partial x_j \partial x_k \parallel$ [10]. Нетрудно видеть, что только однократные нули амплитуды являются структурно устойчивыми (функция F имеет морсовский вид), нули высших кратностей этим свойством не обладают. Другими словами, малое возмущение (например, краевых условий) вызывает лишь смещение положения однократного нуля в плоскости $x_3 = \mathrm{const}$, не разрушая его. Нуль высшей кратности при таком возмущении может разрушаться, что и отмечалось для дислокации в [11].

7. Таким образом, в пространственно неоднородных электромагнитных волновых полях следует различать нули амплитуд, ассоциированные с дислокациями волнового фронта, и нули амплитуд, ассоциированные с дисклинациями. И те, и другие являются топологически устойчивыми образованиями, но только однократные нули амплитуды обладают свойством структурной устойчивости. В этом смысле нули высших кратностей являются нетипичными топологическими объектами. Независимо от природы поля его поляризационные характеристики в окрестности нуля амплитуды строго определены, причем поляризация оказывается круговой в окрестности нуля одного типа и линейной в окрестности нуля другого типа. Наличие объектов топологической природы — дислокаций и дисклинаций превращает односвязное многообразие в многосвязное. Количественной характеристикой этих линейных дефектов служит некоторый инвариант — топологический заряд. Отметим, что в настоящей работе рассматривались локальные свойства поля общего вида. Размеры окрестности нуля при такой постановке задачи будут определяться характеристическим параметром поля — длиной волны. В следующей работе мы покажем, что рассмотренными здесь двумя типами нулей отнюдь не исчерпываются все возможности тонкой структуры электромагнитного волнового поля.

Список литературы

[1] *Дирак П.А.М.* К созданию квантовой теории поля: Основные статьи 1925–1958 годов. М.: Наука, 1990. 368 с.
[2] *Berry M.V.* // Singularities in Waves and Rays. Lections in Les Houches Summer School, 1980. North-Holland Publishing, 1981.
[3] *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 5. С. 1789–1797.
[4] *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я., Мамаев А.В.* и др. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 5 (11). С. 1702–1710.
[5] *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектр. 1993. Т. 75. Вып. 4. С. 861–867.
[6] *Angelsky O.V., Besaha R.N., Mokhun I.I., Sopin M.O.* // Proc. SPIE. 1995. Vol. 2647. P. 75–79.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
[8] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 240 с.
[9] *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972. 277 с.
[10] *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
[11] *Болштянский М.А.* // Опт. и спектр. 1995. Т. 79. Вып. 3. С. 512–516.