Журнал технической физики, 1998, том 68, № 1

05;09;12

Распространение межфазной NS-границы по высокотемпературной сверхпроводящей пленке, разогреваемой микроволновым излучением

© Н.А. Бузников[1], А.А. Пухов[2]

[1]Научно-исследовательский центр прикладных проблем электродинамики РАН,
127412 Москва, Россия
[2]Институт высоких температур РАН,
127412 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 24 июня 1996 г.)

Теоретически исследована динамика $S-N$-перехода тонкой высокотемпературной сверхпроводящей пленки, разогреваемой микроволновым излучением. На основе решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности получена зависимость скорости распространения межфазной NS-границы от интенсивности излучения. Показано, что для вычисления этой зависимости важен учет двумерных эффектов, связанных с нелинейностью прогрева по толщине подложки, обратная сторона которой стабилизирована по температуре. Полученные результаты могут быть существенны при рассмотрении $S-N$-переходов сверхпроводящих устройств микроволнового диапазона.

Введение

Переход высокотемпературной сверхпроводящей (ВТСП) пленки, расположенной на диэлектрической подложке, в нормальное состояние ($S-N$-переход) под действием падающего электромагнитного излучения вызывает в последнее время значительный интерес в связи с созданием различных сверхпроводящих устройств микроволнового и инфракрасного диапазонов [1–3]. Резкое изменение электродинамических характеристик пленки при таком переключении обусловливает перспективность его использования в антеннах и резонаторах [4], экранах и фильтрах [1,2], переключателях и ограничителях мощности [5,6] и т.д. Тепловой механизм $S-N$-перехода подробно рассмотрен в [7,8]. Такой механизм позволяет качественно верно описать нелинейные эффекты, связанные с $S-N$-переключениями резонаторов [9,10], наблюдаемые экспериментально [11]. Резкое возрастание сопротивления пленки при превышении критической температуры T_c проводит к возникновению тепловой бистабильности. При заданном значении интенсивности падающего микроволнового излучения P пленка может находиться в двух устойчивых однородных состояниях: сверхпроводящем (с температурой ниже критической) и нормальном (с температурой выше критической) [7–10].

$S-N$-переход происходит однородно по длине ВТСП пленки лишь в том случае, когда ее длина относительно мала. В обратном случае тепловое разрушение сверхпроводящего состояния, как правило, носит локальный характер. При локальном возникновении нормальной фазы $S-N$-переход осуществляется посредством распространения вдоль пленки температурной автоволны переключения. Такая автоволна представляет собой межфазную NS-границу, переводящую образец из сверхпроводящего в нормальное состояние. Асимптотическое поведение NS-границы характеризуется постоянной скоростью ее распространения v. Зарождение, распространение, устойчивость таких автоволн, а также зависимость v от параметров достаточно подробно изучены для низкотемпературных композитных сверхпроводников с транспортным током [12,13].

Распространение NS-границы в тонких ВТСП пленках, разогреваемых микроволновым излучением или транспортным током, исследовалось экспериментально [14–17] и теоретически [10–18]. $S-N$-переход в системе пленка-подложка имеет целый ряд особенностей, которые не могут быть описаны в рамках стандартной одномерной теории распространения температурной автоволны [12,13]. Эти особенности связаны с существенной неоднородностью разогрева по сечению (тепловыделение происходит только в тонкой ВТСП пленке) [18] и с нелинейным распределением температуры по толщине подложки, обладающей высокой теплопроводностью и играющей роль "теплового резервуара" для ВТСП пленки. В [7–10] при анализе $S-N$-перехода ВТСП пленки под действием микроволнового излучения предполагалось, что температура линейно изменяется по толщине подложки (от температуры пленки T до температуры охладителя T_0, при которой стабилизирована обратная сторона подложки). Это предположение позволяет решать задачу о распространении NS-границы в одномерном приближении, однако справедливо лишь в случае однородного по длине пленки $S-N$-перехода. Корректное описание распространения NS-границы в такой системе требует, вообще говоря, решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности [18].

Одномерное приближение

В одномерном приближении разогрев ВТСП пленки толщиной D_f, расположенной на диэлектрической подложке толщиной D_s (рис. 1), микроволновым излучением описывается уравнением теплопроводности [7–9]

$$\frac{C_s D_s}{2}\frac{\partial T}{\partial t} = k_s D_s \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} - \frac{k_s}{D_s}(T - T_0) + Q(T) D_f, \qquad (1)$$

где T — температура пленки; C_s и k_s — теплоемкость и теплопроводность подложки, обратная сторона которой стабилизирована по температуре T_0, $Q(T) = \varkappa(T)\cdot P$ — удельная мощность разогрева пленки, P — интенсивность падающего излучения, $\varkappa(T)$ — коэффициент поглощения излучения пленкой.

В уравнении (1) учтено, что при типичном соотношении парамеров $k_f D_s \gg k_s D_f$, $C_f D_f \ll C_s D_s$, $k_f \ll k_s$ (C_f и k_f — теплоемкость и теплопроводность пленки) температура пленки однородна по ее сечению, а эффективные теплоемкость и теплопроводность системы пленка–подложка определяются только свойствами подложки. В рамках одномерного приближения предполагается, что температура линейно убывает по толщине подложки. Основанием для этого предположения служит то обстоятельство, что именно такое распределение температуры устанавливается в подложке в случае однородного по длине ВТСП пленки $S-N$-перехода ($\partial T/\partial X = 0$).

Температурная зависимость $\varkappa(T)$ связана с резким изменением элекродинамических свойств ВТСП пленки при $S-N$-переходе и в рамках двухжидкостной модели сверхпроводника может быть описана соотношением [7]

$$\varkappa(T) = \varkappa_n \frac{(T_c - T_0)^2}{(T_c - T_0)^2 + \beta(T_c - T)^2 \eta(T_c - T)}. \qquad (2)$$

Здесь $\varkappa_n = 4r/(2r+1)^2$ — коэффициент поглощения пленки в нормальном состоянии, $r = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}(\rho/D_f)$, ρ — удельное сопротивление пленки в нормальном состоянии, $\beta = [(f/f_0)(2r+1)]^{-2}$, f — частота падающего излучения, $f_0 = 2\rho(T_c - T_0)/\pi\mu_0\lambda^2 T_c$, λ — лондоновская глубина проникновения при $T = T_0$, $\eta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Из формулы (2) следует, что при $f \ll f_0$ температурная нелинейность $\varkappa(T)$ ярко выражена, и это приводит к микроволновой бистабильности пленки. При типичных значениях параметров Y–Ba–Cu–O пленки в области азотных температур $T_0 \cong 77\,\mathrm{K}$, $T_c \cong 90\,\mathrm{K}$, $\rho \cong 5\cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$, $\lambda \cong 10^{-7}\mathrm{m}$ получаем $f_0 \approx 3\cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$. Таким образом, в микроволновом диапазоне ($f \ll f_0$) температурную зависимость $\varkappa(T)$ можно аппроксимировать ступенчатой функцией

$$\varkappa(T) = \varkappa_n \eta(T - T_c). \qquad (3)$$

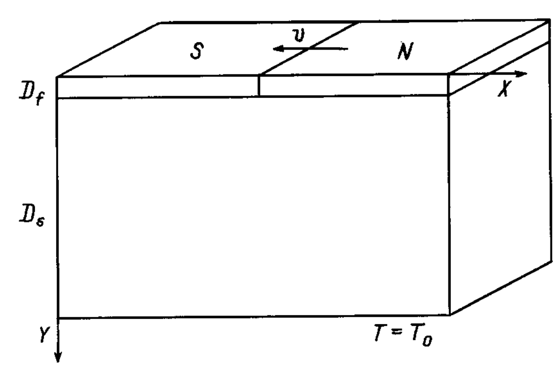

Рис. 1. Схема распространения межфазной NS-границы по сверхпроводящей пленке на подложке. Обратная сторона подложки стабилизирована по температуре T_0.

Температуры однородных стационарных состояний, в которых может находиться ВТСП пленка на термостабилизированной подложке, определяются из условия равенства тепловыделения в пленке отводу тепла в подложку. Из (1) при $\partial T/\partial t = \partial^2 T/\partial X^2 = 0$ получаем уравнение теплового баланса

$$\varkappa(T)\cdot P = \frac{k_s}{D_f D_s}(T - T_0), \qquad (4)$$

решениями которого являются температуры стационарного сверхпроводящего ($T_1 = T_0$) и нормального ($T_2 = T_0 + \varkappa_n P D_f D_s/k_s$) состояний. NS-граница представляет собой автоволну переключения между этими двумя устойчивыми состояниями ВТСП пленки.

Полагая для простоты, что зависимостями теплоемкости и теплопроводности подложки от температуры можно пренебречь, и вводя безразмерные параметры

$$x = \frac{X}{D_s}, \quad \tau = \frac{t}{C_s D_s^2/k_s},$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}, \quad p = P\frac{\varkappa_n D_f D_s}{k_s(T_c - T_0)}, \qquad (5)$$

представим уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \Theta + p\eta(\Theta - 1). \qquad (6)$$

Распространяющаяся NS-граница описывается автомодельным решением уравнения (6) вида $\Theta(x,\tau) = \Theta(x + u\tau)$, удовлетворяющего граничным условиям $\Theta(-\infty) = 0$ и $\Theta(+\infty) = p$. Здесь $u = v/v_h$, $v_h = k_s/C_s D_s$ — характерная "тепловая" скорость NS-границы. Отметим, что v_h определяется только свойствами подложки и при характерных значениях параметров для подложки MgO ($C_s \cong 5\cdot 10^5\,\mathrm{J\cdot m^{-3}\cdot K^{-1}}$, $k_s \cong 350\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) или Al_2O_3 ($C_s \cong 4\cdot 10^5\,\mathrm{J\cdot m^{-3}\cdot K^{-1}}$, $k_s \cong 650\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) толщиной $D_s \cong 10^{-3}\,\mathrm{m}$ получаем $v_h \approx 1\,\mathrm{m/s}$. Безразмерная скорость распространения NS-границы u зависит от значения управляющего параметра p, который является отношением разогрева пленки в нормальном состоянии к характерному теплоотводу в подложку.

Уравнение (6) является кусочно-линейным и может быть решено аналитически [12,13], что позволяет получить для скорости распространения NS-границы выражение

$$u = 2\frac{p - 2}{\sqrt{p - 1}}. \qquad (7)$$

Формула (7) определяет зависимость $u(p)$ во всем интервале бистабильности $1 < p < \infty$. Нормальная фаза вытесняет сверхпроводящую ($u > 0$), если интенсивность излучения превышает пороговое значение $p_p = 2$ ("интенсивность распространения"). Из (7) получаем, что $u \cong 2 \cdot (p-2)$ при $p \cong p_p$ и $u \cong 2p^{1/2}$ при $p \gg p_p$. В интервале $1 < p < p_p$ происходит вытеснение нормальной фазы ($u < 0$) и сверхпроводимость в пленке восстанавливается.

Двумерное приближение

Выше отмечалось, что одномерное приближение справедливо при линейном изменении температуры по толщине подложки. Однако такая ситуация имеет место только вдали от фронта NS-границы. Более корректное описание распространения NS-границы требует учета двумерности задачи. Для этого пленку и подложку следует рассматривать отдельно как две взаимодействующие тепловые подсистемы. При $k_f D_s \gg k_s D_f$ распределение температуры вдоль пленки удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности

$$C_f \frac{\partial T}{\partial t} = k_f \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \theta(T) + \frac{k_s}{D_f} \frac{\partial T}{\partial Y}, \quad 0 < Y < D_f. \quad (8)$$

Последний член в уравнении (8) соответствует отводу тепла из пленки в подложку. Распределение температуры в подложке описывается двумерным уравнением теплопроводности

$$C_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + k_s \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \quad D_f < Y < D_f + D_s. \quad (9)$$

С учетом $D_f \ll D_s$ и $Q(T) = P\varkappa_n \eta(T - T_c)$ и (5) представим уравнения (8) и (9) в безразмерном виде

$$C \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + p\eta(\Theta - 1) + \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad y = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad (11)$$

где $C = C_f D_f / C_s D_s$, $K = k_f D_f / k_s D_s$, $y = Y/D_s$.

Уравнение (11) необходимо дополнить граничным условием при $y = 1$. Учитывая, что со стороны, противоположной пленке, подложка стабилизирована по температуре $T = T_0$, имеем

$$\Theta = 0, \quad y = 1. \quad (12)$$

Таким образом, динамика изменения температуры в системе пленка–подложка описывается двумерным нестационарным уравнением теплопроводности (11) с граничными условиями (10) и (12). Простые оценки показывают, что для Y–Ba–Cu–O пленок ($C_f \cong 9 \cdot 10^5\,\mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}}$, $k_f \cong 5\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) толщиной $D_f \cong 10^{-7}$–10^{-6} m, расположенных на подложках MgO или Al_2O_3 толщиной $D_s \cong 10^{-4}$–10^{-3} m, параметры C и K малы, $C \approx 10^{-3}$, $K \approx 10^{-5}$, поэтому первыми двумя членами в (10) можно пренебречь.

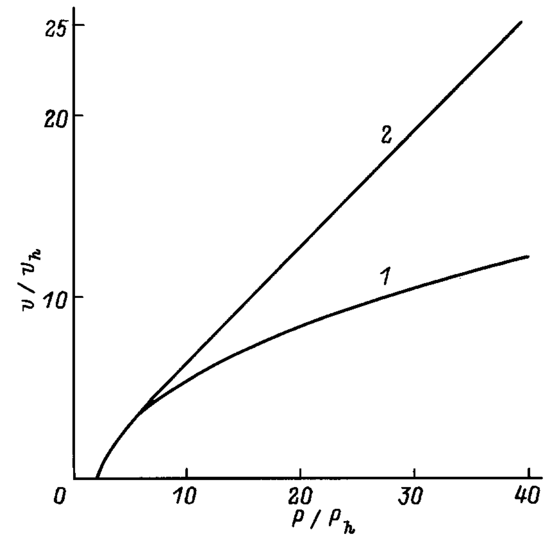

Рис. 2. Зависимость скорости распространения NS-границы от интенсивности излучения. *1* — расчет по формуле (7), *2* — расчет по формуле (15).

Распределение температуры в подложке в движущейся вместе с NS-границей системе координат ($z = x + u\tau$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - u \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Вдали от фронта NS-границы ВТСП пленка находится в однородных состояниях $\Theta(z, 0) = 0$ при $z \to -\infty$ и $\Theta(z, 0) = p$ при $z \to \infty$, а профиль температуры в подложке является линейным. Выберем начало координат таким образом, чтобы выполнялось условие $\Theta(0, 0) = 1$ (это всегда возможно вследствие трансляционной инвариантности уравнения (13)). Тогда граничные условия к (13), которые определяются выражениями (10) и (12), с учетом $C \ll 1$, $K \ll 1$ можно записать в виде

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right|_{y=0} = -p \cdot \eta(z), \quad \Theta\big|_{y=1} = 0. \quad (14)$$

Распределение температуры в системе пленка–подложка определяется решением смешанной задачи Дирихле–Неймана в полосе $0 < y < 1$ для двумерного уравнения (13) с граничными условиями (14), которая может быть решена методом резделения переменных (см. Приложение). Это обстоятельство позволяет получить для скорости распространения NS-границы выражение

$$\frac{p - 2}{2p} = u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \sqrt{u^2 + 4\lambda_k^2}}, \quad (15)$$

где $\lambda_k = \pi(2k + 1)/2$.

Из формулы (15) следует, что скорость межфазной NS-границы u равна нулю при "интенсивности распространения" $p_p = 2$. Из (15) удобно получить приближенные выражения для зависимости $u(p)$ при $p \cong p_p$ и при $p \gg p_p$. При $p \cong p_p$ $(u \ll 1)$ имеем

$$u \cong \frac{\pi}{14 \cdot \zeta(3)}(p-2) \approx 1.84(p-2), \tag{16}$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

С помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена при $p \gg p_p$ $(u \gg 1)$ из (15) получаем

$$u \cong (2/\pi)p. \tag{17}$$

В области малых скоростей распространения межфазной NS-границы $(u \leq 1)$ формулы (7) и (15) практически совпадают, а при $u \geq 1$ зависимость $u(p)$ качественно изменяется (рис. 2). Это отличие связано с тем, что при больших скоростях распространения межфазной границы $(u \geq 1)$ подложка не успевает прогреваться за время прохождения фронта NS-границы.

Решение уравнения (13) с граничными условиями (14) позволяет также получить оценку для ширины фронта NS-границы L (см. Приложение)

$$L = \frac{4D_s}{\pi^2}\sqrt{u^2+\pi^2}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что $L \cong 4D_s/\pi^2 \sim D_s$ при $p \cong p_p$. Таким образом, для ВТСП пленки, расположенной на термостабилизированной подложке, характерный масштаб фронта NS-границы определяется толщиной подложки $L \sim D_s$.

ВТСП пленка, разогреваемая транспортным током

Рассмотрим теперь распространение NS-границы по ВТСП пленке с транспортным током. Возникновение тепловой бистабильности, наблюдавшееся экспериментально [14–17], в этом случае связано с джоулевым саморазогревом пленки. Распределение температуры в системе пленка–подложка описывается уравнением (1) в одномерном приближении и уравнениями (8), (9) в двумерном приближении. Удельная мощность разогрева пленки транспортным током описывается выражением [12,13]

$$Q(T) = \rho j^2 \cdot \eta(T - T_r), \tag{19}$$

где j — плотность транспортного тока, $T_r = T_0 + (1 - j/j_c)(T_c - T_0)$ — температура резистивного перехода, j_c — критическая плотность тока при $T = T_0$.

Из (1), (8), (9) и (19) следует, что безразмерная скорость NS-границы в пленке, разогреваемой током, зависит только от одного безразмерного параметра $\xi = k_s(T_r - T_0)/\rho j^2 D_f D_s$, а выражение для u может быть получено из (7) (одномерное приближение) и (15)

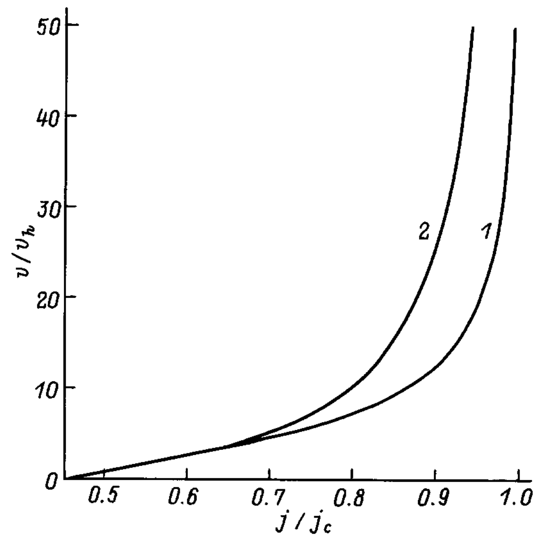

Рис. 3. Зависимость скорости распространения NS-границы от плотности транспортного тока. *1* — расчет по формуле (20), *2* — расчет по формуле (21); $\alpha = 5$.

(двумерное приближение) при помощи замены $p \to 1/\xi$. Таким образом, для u имеем в одномерном приближении

$$u = 2\frac{\alpha i^2 + 2i - 2}{\sqrt{(\alpha i^2 + i - 1)(1-i)}} \tag{20}$$

и в двумерном приближении

$$\frac{\alpha i^2 + 2i - 2}{\alpha i^2} = u\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2\sqrt{u^2 + 4\lambda_k^2}}. \tag{21}$$

Здесь $\alpha = \rho j_c^2 D_f D_s / k_s(T_c - T_0)$ — эффективный параметр Стекли системы пленка–подложка, $i = j/j_c$. Из (20) и (21) следует, что NS-граница покоится при "токе распространения" $j_p = j_c[(1+2\alpha)^{1/2} - 1]/\alpha$. При типичных значениях параметров пленки и подложки, приведенных выше, и $j_c \cong 10^{10}\,\mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$ получаем $\alpha \approx 1{-}10$, т. е. для ВТСП пленки величина j_p сравнима с j_c. Вблизи тока распространения $j \cong j_p$ $(u \ll 1)$ из (21) получаем $u \cong [2\pi^3/7\zeta(3)](j - j_p)/j_c \approx 7.36(j - j_p)j_c$, что лишь незначительно отличается от выражения $u \cong 8(j - j_p)/j_c$, следующего из формулы (20). Существенное различие возникает при $j \cong j_c$ $(u \gg 1)$: в одномерном приближении $u \cong 2[\alpha i^2/(1-i)]^{1/2}$, тогда как из (21) следует $u \cong (2/\pi)\alpha i^2/(1-i)$ (рис. 3).

Заключение

В работе исследована динамика $S{-}N$-перехода в ВТСП пленке на термостабилизированной подложке, вызванного разогревом микроволновым излучением или транспортным током. Рассматриваемая система характеризуется существенной неоднородностью разогрева по сечению и нелинейным распределением температуры по толщине подложки, обладающей высокой теплопроводностью и играющей роль "теплового резервуара" для ВТСП пленки. Эти особенности приводят к тому, что динамика теплового перехода не может быть корректно описана в рамках одномерной теории распространения NS-границы [12,13].

На основе решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности получена зависимость $v(P)$. В области малых скоростей межфазной NS-границы $v \le k_s C_s^{-1} D_s^{-1}$ ($P \cong P_p = 2k_s(T_c - T_0)/\varkappa_n D_f D_s$) эта зависимость практически совпадает с зависимостью $v(P)$, полученной в рамках одномерного приближения. При "быстром" распространении межфазной NS-границы $v \ge k_s C_s^{-1} D_s^{-1}(P \gg P_p)$ зависимость $v(P)$ качественно изменяется: в двумерном приближении $v \propto P$, тогда как из одномерного приближения следует, что $v \propto P^{1/2}$. Это обстоятельство связано с тем, что при $v \ge k_s C_s^{-1} D_s^{-1}$ подложка не успевает прогреваться за время прохождения фронта NS-границы и распределение температуры в ней существенно отличается от линейного. Аналогичная особенность распространения NS-границы имеет место и при разогреве пленки транспортным током.

В заключение отметим, что возможна другая ситуация, когда ВТСП пленка расположена на подложке, целиком погруженной в жидкий азот [16,17]. В этом случае, как показывают простые оценки, параметр Биосистемы пленка–подложка мал, $hD_s/k_s \ll 1$ (коэффициент теплоотвода в азот $h \cong 10^4\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}K^{-1}}$, $D_s \cong 10^{-3}\,\mathrm{m}$, $k_s \cong 10^2\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}K^{-1}}$) и температура практически не изменяется по толщине подложки, следовательно, $S{-}N$-переход может быть удовлетворительно описан в рамках одномерной теории распространения NS-границы [16,17].

Работа выполнена при поддержке Научного совета по проблеме ВТСП (проект № 93027) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-18949).

Приложение

Будем искать решение задачи (13), (14) методом разделения переменных, который позволяет представить $\Theta(z,y)$ в виде ряда Фурье

$$\Theta(z,y) = p\eta(z)(1-y) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\cos(\lambda_k y), \tag{П1}$$

где $\lambda_k = \pi(2k+1)/2$, $f_k(z)$ — неизвестная функция.

Выражение (П1) представляет собой общее решение уравнения (13), обеспечивающее выполнение граничных условий (14). Подставляя (П1) в (13) и решая получающееся обыкновенное дифференциальное уравнение, для функции $f_k(z)$ получаем

$$f_k(z) = \begin{cases} A_k \exp\left\{\left(\frac{u}{2} + \mu_k\right) z\right\}, & z < 0, \\ B_k \exp\left\{\left(\frac{u}{2} - \mu_k\right) z\right\}, & z > 0, \end{cases} \tag{П2}$$

где A_k, B_k — численные коэффициенты; $\mu_k = (u^2/4 + \lambda_k^2)^{1/2}$.

Используя разложение

$$1 - y = 2\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \cos(\lambda_k y),$$

из (П1) и (П2) имеем

$$\Theta(z,y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \exp\left\{\left(\frac{u}{2} + \mu_k\right) z\right\}\cos(\lambda_k y), & z < 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2p}{\lambda_k^2} + B_k \exp\left\{\left(\frac{u}{2} - \mu_k\right) z\right\}\right]\cos(\lambda_k y), & z > 0. \end{cases} \tag{П3}$$

Коэффициенты A_k и B_k определяются из условия непрерывности температуры и ее производной по z на прямой $z = 0$. Опуская промежуточные вычисления, приведем выражение для распределения температуры в подложке

$$\Theta(z,y) = p \times \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}\left(1 - \frac{u}{2\mu_k}\right) \\ \qquad \times \exp\left\{\left(\frac{u}{2} + \mu_k\right) z\right\}\cos(\lambda_k y), & z < 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}\left[2 - \left(1 + \frac{u}{2\mu_k}\right)\right. \\ \qquad \left.\times \exp\left\{\left(\frac{u}{2} - \mu_k\right) z\right\}\right]\cos(\lambda_k y), & z > 0. \end{cases} \tag{П4}$$

Учитывая, что начало координат выбрано таким образом, что $\Theta(0,0) = 1$, из (П4) получаем

$$\frac{p-2}{2p} = u\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2\sqrt{u^2 + 4\lambda_k^2}}. \tag{П5}$$

Из формулы (П4) можно получить также оценку для ширины фронта NS-границы, которая, очевидно, определяется наименьшим значением μ_k: $\mu_0 = (u^2 + \pi^2)^{1/2}/2$. Окончательно для ширины фронта $L = D_s/(\mu_0 + u/2) + D_s/(\mu_0 - u/2)$ имеем

$$L = \frac{4D_s}{\pi^2}\sqrt{u^2 + \pi^2}. \tag{П6}$$

Список литературы

[1] *Вендик О.Г., Ковалевич Л., Митрофанов А.П.* и др. // СФХТ. 1990. Т. 3. № 10(1). С. 2133–2142.

[2] *Likharev K.K.* // Supercond. Sci. Technol. 1990. Vol. 3. N 7. P. 325–337.

[3] *Newman N., Lyons W.G.* // J. Supercond. 1993. Vol. 6. N 2. P. 119–159.

[4] *Hansen R.C.* IEEE Trans. Aerosp. and Electron. Syst. 1990. Vol. 26. N 2. P. 345–355.

[5] *Вендик О.Г., Карпюк А., Колесов С.Г., Попов А.Ю.* // СФХТ. 1990. Т. 3. № 10(1). С. 2161–2169.

[6] *Гайдуков М.М., Козырев А.Б., Ковалевич Л.* и др. // СФХТ. 1990. Т. 3. № 10(1). С. 2170–2174.
[7] *Жаров А.А., Коротков А.Л., Резник А.Н.* // СФХТ. 1992. Т. 5. № 3. С. 419–422.
[8] *Zharov A.A., Korotkov A.L., Reznik A.N.* // Supercond. Sci. Technol. 1992. Vol. 5. N 3. P. 104–106.
[9] *Резник А.Н., Смирнов А.И., Чернобровцева М.Д.* // СФХТ. 1993. Т. 6. № 2. С. 242–251.
[10] *Reznik A.N., Zharov A.A., Chernobrovtseva M.D.* // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1995. Vol. 5. N 2(III). P. 2579–2582.
[11] *Portis A.M., Chaloupka H., Jeck M.* et al. // Supercond. Sci. Technol. 1991. Vol. 4. N 3. P. 436–438.
[12] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
[13] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
[14] *Скоков В.Н., Коверда В.П.* // СФХТ. 1993. Т. 6. № 8. С. 1646–1651.
[15] *Scokov V.N., Koverda V.P.* // Phys. Stat. Sol. (a). 1994. Vol. 142. N 1. P. 193–199.
[16] *Луцет М.О.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 18. С. 7–10.
[17] *Луцет М.О., Климов С.В.* // СФХТ. 1994. Т. 7. № 8–9. С. 1372–1381.
[18] *Levillain C., Manuel P., Therond P.G.* // Cryogenics. 1994. Vol. 34. N 1. P. 69–75.