

01;10

## О некоторых свойствах уравнений огибающих применительно к задачам проектирования и настройки оптики пучков

© Ю.В. Зуев

Научно-исследовательский институт электрофизической аппаратуры им. Д.В. Ефремова, 189631 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 17 июня 1996 г.)

На основе аналитического преобразования обычных уравнений огибающих получены уравнения масштабного преобразования линз первого порядка с учетом температуры частиц и их объемного заряда. Анализ полученных уравнений позволил выявить некоторые общие принципы построения и масштабирования пучковых систем разных типов. Свойства преобразования иллюстрируются на примере уравнения для электростатической осесимметричной линзы.

### Введение

Проектирование пучковой оптики в той или иной степени всегда включает в себя решение обратной задачи динамики, т.е. нахождение структуры и интенсивности силового поля, реализующего требуемые характеристики пучка. В свою очередь любое силовое поле, формирующее пучок, всегда в итоге определяется несколькими осевыми функциями и их производными (управлениями  $u(z)$ ). Через параксиальное уравнение линейная  $r(z)$  и угловая  $r'(z)$  огибающие пучка представляются интегралами вида

$$r(z) = r_0 + \int_0^z r'(z) dz, \quad r'(z) = r'_0 + \int_0^z \Phi(u(z), p) dz.$$

Аналогично записываются выражения для абберрионных поправок, характеризующих интенсивность нагрева пучка. Исходя из этого проектирование должно включать последовательное решение двух задач: 1) нахождение осевого поля, обеспечивающего желаемые оптические свойства системы; 2) экстраполяцию этого поля в пространство для определения необходимых полеформирующих элементов. Первая задача сводится к отысканию такого управления  $u(z)$ , которое при заданных краевых условиях

$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L \quad (1)$$

придавало бы функционалам вида

$$f(u) = \int_0^L \Phi(u(z), p) dz, \quad h(u) = \int_0^L \int_0^z \Phi(u(\zeta), p) d\zeta dz$$

вполне определенные значения

$$|h(u) - A| \leq \delta_A, \quad |f(u) - B| \leq \delta_B, \quad (2), (3)$$

обеспечивая по возможности

$$g(u) = \int_0^L \Omega(u(z), p) dz \leq C \quad \text{или} \quad g(u) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Иногда эти требования объединяют

$$\omega_1(h(u) - A)^2 + \omega_2(f(u) - B)^2 + \omega_3(g(u) - C)^2 \leq \delta. \quad (5)$$

Здесь и выше  $h(u)$  отвечает за размер,  $f(u)$  — за угол наклона огибающей на мишени,  $g(u)$  оценивает конечную температуру в пучке. Роль параметров  $p$  играют ток, заряд, масса и скорость частиц, входные размеры поперечного сечения пучка, угол наклона огибающей, эмиттанс и т.п.

Задачу в такой постановке следует отнести к изопериметрической разновидности вариационных задач и решать соответствующими методами. Однако использование их на практике затруднено большим количеством ограничений, накладываемых на искомое управление и приводящих к невозможности определить функционалы для всех значений своих аргументов. Обычно это — обеспечивающие физическую реализуемость управления ограничения на апертуру пучка

$$R_{\min} \leq \int_0^z \int_0^\zeta \Phi(u(\zeta), p) d\zeta dz \leq R_{\max}, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (6)$$

длину системы

$$L_{\min} \leq L \leq L_{\max}, \quad (7)$$

допустимую интенсивность поля

$$u_{\min} \leq u(z) \leq u_{\max}, \quad (8)$$

скорость его изменения

$$|u'(z)| \leq u'_{\max} \quad (9)$$

и т.д. В литературе до сих пор известны лишь единичные случаи применения вариационных методов для решения задач подобного рода.

Чаше управление стараются описать конечным числом параметров и, выразив через них функционалы, свести задачу к поиску экстремума некоторой целевой функции  $n$  переменных. В роли целевой обычно используется так называемая функция качества (добротности) устройства,

включающая в себя и отклонение характеристик пучка от их номинальных значений. Поиск экстремума проводится методами оптимального управления или многокритериальной оптимизации. Такой трансформации задачи в значительной мере способствует возможность матричного описания системы, к сожалению, непригодного в случае пучков с заметной ролью собственного объемного заряда. В подавляющем же большинстве случаев проектирование осуществляется путем многократного решения прямой задачи, т.е. подбором описывающих силовое поле параметров и последующим расчетом характеристик пучка, продолжающимися до тех пор, пока не будет получено необходимое преобразование. Наиболее широко при этом используются методы нелинейного программирования.

Построенные на аналогичных принципах компьютерные программы, гарантируя физическую реализуемость проектируемых систем, могут находить решение только при хорошем начальном приближении. К ним относятся и широко известные программы типа "Transport", "Trase" [1]. Причины этого связаны в первую очередь с некорректностью обратной задачи. Подобные задачи, состоящие в обращении причинно-следственных связей, допускают при заданных ограничениях как множественность решений, так и отсутствие решений вообще. Немаловажное значение играют методы решения. Рассматриваемая задача заключается не в оптимизации функции или функционала, а в придании им определенных значений. Этим значений может не содержать "ниша", ближайшая к точке старта.

Целью данной работы являлась разработка неоптимизационного метода решения задачи в постановке наиболее актуальной при проектировании оптики, согласующей параметры пучка с пропускными характеристиками ускоряющих структур или каналов транспортировки (условия (2), (3) без (4)). Немногочисленные известные автору прямые методы решения такой задачи применимы к системам с определенной структурой поля (как, например, в [1–4]) и пренебрежимо малым первансом [1–3,5,6].

## Преобразование уравнений огибающих с помощью функции связи. Обобщенное уравнение масштабного преобразования

Для оптических устройств, наиболее часто используемых в качестве линз первого порядка, уравнения огибающих в обычной форме имеют следующий вид. Уравнение огибающей в солениоиде

$$r'' = \Phi_S(r, B), \quad (10)$$

где  $\Phi_S(r, B) = Q_S|r + \varepsilon^2|r^3 - \text{const } rB^2$ ;  $B$  — индукция магнитного поля на оси;  $Q_S$  — параметр объемного заряда, зависящий от величины тока пучка, сорта и скорости частиц;  $\varepsilon$  — эмиттанс.

Уравнение огибающей в квадрупольном канале

$$x'' = Gx + F_x, \quad y'' = -Gy + F_y. \quad (11)$$

Здесь роль управления играет приведенный градиент линз  $G$ ;  $F_x(x, y) = Q/(x + y) + \varepsilon_x^2/x^3$ ;  $F_y(x, y) = Q/(x + y) + \varepsilon_y^2/y^3$ . Система уравнений (11) может быть сведена к одному, связывающему только поперечные размеры пучка  $x$  и  $y$ ,

$$yx'' + xy'' = \Phi_q(x, y), \quad (12)$$

где  $\Phi_q(x, y) = yF_x + xF_y$ .

Тогда  $G = (x'' - F_x)/x = (y'' - F_y)/(-y)$  (при такой форме записи в качестве управления рассматривается задаваемый размер пучка).

Уравнение огибающей в поворотном магните

$$x'' = -\frac{(1-n)}{R^2}x + F_x, \quad y'' = -\frac{n}{R^2}y + F_y$$

или

$$yx'' + xy'' = \Phi_M(x, y). \quad (13)$$

Здесь  $R$  — радиус поворота магнита;  $n$  — показатель спада поля;  $\Phi_M(x, y) = yF_x + xF_y - (xy)/R^2$ ;  $nR^{-2} = R^{-2} + (x'' - F_x)/x = (y'' - F_y)/(-y)$ .

Преимущества предлагаемого подхода удобнее всего проследить на примере уравнения огибающей в осесимметричной электростатической линзе. Поле линзы определяется только осевым распределением потенциала  $U(z)$ , а поведение огибающей — начальными условиями  $r(0) = r_0$ ,  $r'(0) = r'_0$  и уравнением

$$r''U + 0.5r'U' + 0.25rU'' = \Phi_U(r, U), \quad (14)$$

где  $\Phi_U(r, U) = Q_U/(\sqrt{U}r) + \varepsilon_H^2/r^3$ ,  $\varepsilon_H$  — нормализованный эмиттанс.

Следовательно, систему линза–пучок можно описать пространственной кривой (жирная линия на рис. 1) в координатах  $Urz$ , заданной, например, проекциями  $U(z)$  и  $r(z)$ . Использование обычного уравнения (14) представляет собой отыскание проекции этой кривой на плоскость  $rz$  по известной проекции на плоскость  $Uz$  (или наоборот). Идея предлагаемого метода состоит в том, чтобы считать исходной проекцию на плоскость  $Ur$ . В этом случае, задавая некоторую функцию, изначально связывающую управление и пучок, — функцию связи, мы заранее определяем все значения, которые будут принимать и радиус пучка, и потенциал в линзе, в том числе, что особенно важно, их минимальные, максимальные и краевые значения, т.е. выполнять условия (1), (2), (6), (8) (рис. 1).

Еще ряд преимуществ связан с уравнением, устанавливающим соответствие между функцией связи и оптической осью. Его форма

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}}{h_1}(h_2 - h_3\dot{z}^2) \quad (15)$$

Таблица 1.

Тип оптической системы	$\ddot{z} = \frac{\dot{z}}{h_1(\zeta)}(h_2(\zeta) - h_3(\zeta)\dot{z}^2)$					
	Функция связи	$\zeta$	$\dot{z}$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Соленоид	$r(B)$	$B$	$\frac{dz}{dB}$	$\frac{dr}{dB}$	$\frac{d^2r}{dB^2}$	$\Phi_S$
	$B(r)$	$r$	$\frac{dz}{dr}$	1	0	$\Phi_S$
Осесимметричная электростатическая система	$r(U)$	$U$	$\frac{dz}{dU}$	$U \frac{dr}{dU} + 0.25r$	$0.5 \frac{dr}{dU} + U \frac{d^2r}{dU^2}$	$\Phi_U$
	$U(r)$	$r$	$\frac{dz}{dr}$	$U + 0.25r \frac{dU}{dr}$	$0.5 \frac{dU}{dr} + 0.25r \frac{d^2U}{dr^2}$	$\Phi_U$
Квадрупольный канал	$y(x)$	$x$	$\frac{dz}{dx}$	$y + x \frac{dy}{dx}$	$x \frac{d^2y}{dx^2}$	$\Phi_q$
	$x(y)$	$y$	$\frac{dz}{dy}$	$x + y \frac{dx}{dy}$	$y \frac{d^2x}{dy^2}$	$\Phi_q$
Поворотный магнит	$y(x)$	$x$	$\frac{dz}{dx}$	$y + x \frac{dy}{dx}$	$x \frac{d^2y}{dx^2}$	$\Phi_M$
	$x(y)$	$y$	$\frac{dz}{dy}$	$x + y \frac{dx}{dy}$	$y \frac{d^2x}{dy^2}$	$\Phi_M$

инвариантна относительно выбора новой независимой переменной и справедлива для всех уравнений, представленных выше (табл. 1). Последнее дает возможность при разработке систем различных типов использовать единые принципы, которые основаны на свойствах уравнения.

Уравнение (15) может иметь узловые и седловые особенности. Характер и положение особенностей определяют единственность или множественность реализаций функции связи либо ее принципиальную нереализуемость (под реализацией здесь подразумевается решение обычного уравнения огибающей, дающее соответствующую проекцию на плоскость  $Ur$ ). Множественность позволяет выбрать ту реализацию, которая имеет на краях не только требуемые значения управления и ра-

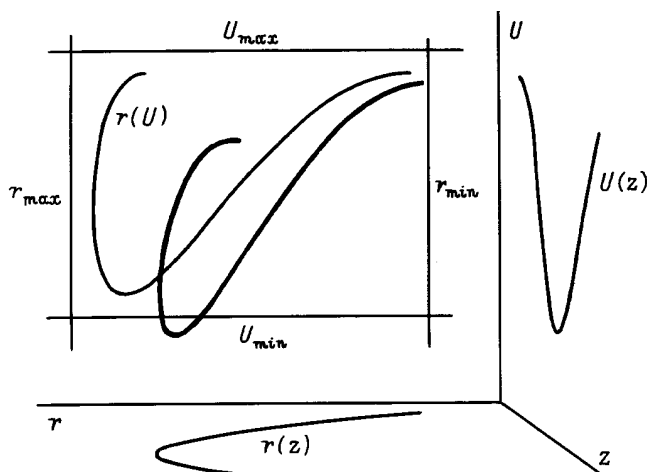


Рис. 1. К описанию системы линза–пучок в пространстве  $(U, r, z)$ .

диуса пучка, но и все необходимые производные, т.е. полностью решить поставленную задачу. Выявление и анализ особенностей просты. Их тип и положение не зависят от формы представления функции связи.

При переходе от явного представления к параметрическому сохраняет свой вид и основное уравнение

$$\dot{M} = \frac{M}{f_1(\lambda)}(f_2(\lambda) - f_3(\lambda)M^2) \quad (16)$$

(выражения для  $f_1, f_2, f_3$  приведены в табл. 2; точкой обозначено дифференцирование по параметру  $\lambda$ ).

Но переменная  $M$  во всех уравнениях теперь играет одну и ту же роль — дифференциального коэффициента масштабного преобразования, поскольку по определению  $M \equiv dz/d\lambda$ . Кроме того, уравнение (16) выявляет еще ряд свойств, полезных не только при проектировании оптики, но и при настройке.

Так как при замене  $\lambda$  на  $z$  выражения для  $f_2(\lambda)$  и  $f_3(\lambda)$  соответствуют левым и правым частям уравнений (10), (12)–(14), то совершенно очевидно, что  $M(\lambda) \equiv 1$ , когда параметрически заданная функция связи совпадает с решениями обычных уравнений. Последнее наводит на мысль использовать в качестве функции связи размер пучка и управление настраиваемых систем или спроектированных ранее, если необходимы изменения их характеристик. С этой точки зрения уравнение (16) является обобщенным уравнением масштабного преобразования оптических систем первого порядка с функцией связи в качестве инварианта. Если параметрически заданная функция связи совпадает с решением обычного уравнения огибающей и допускает множественность реализаций, интегрирование уравнения (16) с  $M_0 > 1$  дает

Таблица 2.

Тип оптической системы	$\dot{M} = \frac{M}{f_1(\lambda)}(f_2(\lambda) - f_3(\lambda)M^2)$				
	Функция связи	$f_1(\lambda)$	$f_2(\lambda)$	$f_3(\lambda)$	$\frac{df_1(\lambda)}{d\lambda}$
Соленоид	$\{B(\lambda), r(\lambda)\}$	$\dot{r}$	$\dot{r}$	$\Phi_S$	$f_2(\lambda)$
Электростатическая система	$\{U(\lambda), r(\lambda)\}$	$0.25r\dot{U} + U\dot{r}$	$\dot{r}U + 0.5r\dot{U} + 0.25r\ddot{U}$	$\Phi_U$	$f_2(\lambda) + 0.75r\dot{U}$
Квадрупольный канал	$\{X(\lambda), Y(\lambda)\}$	$X\dot{Y} + Y\dot{X}$	$X\ddot{Y} + Y\ddot{X}$	$\Phi_q$	$f_2(\lambda) + 2\dot{X}\dot{Y}$
Поворотный магнит	$\{X(\lambda), Y(\lambda)\}$	$X\dot{Y} + Y\dot{X}$	$X\ddot{Y} + Y\ddot{X}$	$\Phi_M$	$f_2(\lambda) + 2\dot{X}\dot{Y}$

систему большей длины  $L = \int M(\lambda)d\lambda$ , но меньшими первыми производными вдоль оси  $d/dz = M^{-1}d/d\lambda$ . Интегрирование с  $M_0 < 1$  — наоборот, поскольку интегральные кривые уравнения (16), за исключением особых точек, не пересекаются и величина  $(M - 1)$  сохраняет свой знак. К аналогичному интегрированию можно свести перенастройку (перепроектирование) систем на новое значение тока, эмиттанса, при смене сорта частиц и т. п.

В общем же случае параметрическое задание функции связи, полагая параметр совпадающим с координатой вдоль оптической оси, можно рассматривать как приближенное (качественное) описание желательного поведения пучка и управления в системе. Элементарный анализ особых точек выявляет обоснованность (реализуемость) желаемого. Основное уравнение преобразования ремасштабирует оптическую ось так, чтобы заданные функцией связи пучок и управление согласовать по производным в точном соответствии с обычным уравнением огибающей.

### Анализ и свойства особых точек основного уравнения преобразования

Несложно показать, что уравнение (16) при заданных начальных условиях имеет единственное решение на всем интервале изменения независимой переменной  $\lambda$  за исключением особых точек, в которых и числитель, и знаменатель уравнения обращаются в ноль:

$$f_1(\tilde{\lambda}) = 0, \quad \tilde{M}(f_2(\tilde{\lambda}) - f_3(\tilde{\lambda})\tilde{M}^2) = 0. \quad (17), (18)$$

В нулях характеристической функции  $f_1(\lambda)$  функция связи формирует или одну (всегда нулевую), или три различные (нулевую и две симметричные) особенности, соответствующие действительным корням уравнения (18). Вид особенности будет тот же, что и у особой точки линеаризованного уравнения  $\dot{M} = \tilde{M} + a(M - \tilde{M})/(\lambda - \tilde{\lambda})$  с коэффициентами  $a_1 = f_2(\tilde{\lambda})/f_1(\tilde{\lambda})$  для  $\tilde{M}_1 = 0$ ,  $a_{2,3} = -2a_1$ , для  $\tilde{M}_{2,3} = \pm\sqrt{f_2(\tilde{\lambda})/f_3(\tilde{\lambda})}$ . Если  $a \geq 0$  ( $f_1(\tilde{\lambda}) \neq 0$ ), то особая точка является узлом. В противном случае имеет место седловая сингулярность.

В случае  $\dot{f}_1(\tilde{\lambda}) = 0$  для определения вида особой точки требуется рассмотрение членов высшего порядка (дополнительная информация приведена в [7]). Функция связи принципиально не реализуема лишь тогда, когда соответствующая интегральная кривая уравнения преобразования проходит через ноль либо терпит разрыв. Такие решения уравнения (16) могут быть только особыми. Отсутствие особых точек гарантирует множественность реализаций функции связи, которая задается начальными условиями интегрирования уравнения (16). Каждому  $M_0$  соответствует разное масштабирование оптической оси, при котором управление и пучок изменяют свои производные, но удовлетворяют как обычному уравнению огибающей, так и выбранной функции связи. При этом отношение их первых производных остается неизменным  $r'/U' = \dot{r}/\dot{U}$ .

Возможность реализации функции связи образующей нули характеристической функции  $f_1$  зависит от характера формируемых в этом случае особенностей. Наличие ненулевых особых точек ( $\tilde{M} \neq 0$ ) всегда гарантирует присутствие подходящих решений уравнения (16) вблизи  $\tilde{\lambda}$ . Это — либо единственное решение, проходящее через центр ненулевого седла (и однозначно определяющее допустимое начальное значение  $M_0$ , единственно возможное значение краевых производных), либо бесконечное множество решений с общей точкой в ненулевом узле. Если только  $f_2(\tilde{\lambda}) \neq -0.5\dot{f}_1(\tilde{\lambda})$ , то интегральные кривые, проходящие через ненулевой узел, имеют в особой точке еще и общую касательную. Это позволяет сшить в узел любые два решения, полученные интегрированием уравнения (16) слева и справа от особенности, причем сшить идеальным образом, обеспечивая непрерывность всех производных. Последнее свойство и дает возможность решать задачу (2), (3) формальным образом, задавая в качестве начальных необходимые краевые значения.

В общем случае нулей характеристической функции может несколько. Необходимым условием реализуемости функции связи в такой ситуации, естественно, является реализуемость в окрестности каждого нуля, т.е.  $f_2(\tilde{\lambda}_i)f_3(\lambda_i) > 0$ ,  $i = 1-N$ . Это условие является и достаточным, если образуемые смежные ненулевые осо-

бенности будут разного типа либо узлами. Для смежных седел достаточное условие общего вида пока не найдено.

Приведем еще два свойства введенного преобразования, которые могут быть полезны при настройке и перепроектировании оптических систем.

Свойство А. Пусть  $\{U(\lambda), r(\lambda)\}$  — реализуемая функция связи в параметрической форме,  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные положительные константы, тогда  $\{C_1 U(\lambda), C_2 r(\lambda)\}$  — также реализуемая функция связи, если только  $f_3(U, r) f_3(C_1 U, C_2 r)_{\lambda=\bar{\lambda}_i} > 0$ , поскольку положение нулей  $\bar{\lambda}_i$  и характер особых точек уравнения (16) при таком преобразовании функции связи не меняются.

Свойство Б. Пусть  $p_1, \dots, p_K$  — входящие в  $f_3$  параметры реализуемой системы с функцией связи  $\{U(\lambda), r(\lambda)\}$ ,  $\chi_1, \dots, \chi_K$  — некоторые функции  $\lambda$ , тогда функция связи  $\{U(\lambda), r(\lambda)\}$  реализуема с параметрами  $\chi_1 p_1, \dots, \chi_K p_K$ , если  $f_3(U, r, p_1, \dots, p_K) \times \times f_3(U, r, \chi_1 p_1, \dots, \chi_K p_K)_{\lambda=\bar{\lambda}_i} > 0$ , поскольку характер особых точек при таком изменении параметров остается прежним.

Исключения (только с точки зрения реализуемости) здесь могут иметь место лишь при наличии смежных ненулевых седел. Единственная соединяющая центры седел интегральная кривая существует при определенных условиях, которые в результате масштабирования функции связи или вследствие изменения параметров могут быть нарушены.

## Общие принципы построения и масштабирования пучковых систем

Из предыдущего следует, что использование уравнения преобразования сводит процедуру проектирования (настройки) систем по оптическим характеристикам первого порядка к достаточно произвольному выбору (коррекции) некоторой производящей функции — функции связи. Эта функция при заданных краевых значениях должна формировать (не формировать) те или иные сингулярности основного уравнения. Анализ уравнения преобразования выявил некоторые принципы, общие для линз различных типов.

Любая функция связи обеспечивает требуемое преобразование пучка по размеру, если она реализуема и имеет соответствующие краевые значения.

Одна и та же функция связи реализуема, как правило, в широком диапазоне изменения тока, эмиттанса, сорта частиц и т.д. (свойство Б). Границы этого диапазона могут использоваться для определения предельных значений этих параметров.

Функция связи может быть подвергнута линейному масштабированию с сохранением характера особых точек (свойство А). Такое масштабирование огибающей или управления может значительно ускорить перепроектирование оптических систем в случае изменения ограничений на максимальную апертуру и интенсивность

силового поля, облегчить перенастройку на близкие размеры пучка.

Функция связи с прилегающим к границе ненулевым узлом дает возможность получения заданного размера пучка с любым углом наклона одного знака.

Прилегание к границе ненулевой седловой особенно-сти задает краевой наклон пучка, реализующего выбранную функцию связи, единственным образом. Некоторые комбинации краевых значений характеристической функции  $f_1(\lambda)$ , например  $f_1(0) < 0, f_1(L) > 0$  при  $f_3(\lambda) > 0$ , влекут за собой образование таких точек автоматически. Для получения нужного угла наклона в этом случае, как и при традиционном проектировании, с формальной точки зрения остается только перебор вариантов связи с заданными краевыми значениями. Однако задачи с подобного рода "неудобными" краевыми условиями могут быть сведены к эквивалентным путем включения в систему подходящего участка с заранее известными оптическими свойствами, который преобразует краевые значения пучка и управления в любые более удобные. Типичным примером таких краевых условий является сходящийся входной пучок при нулевой интенсивности силового поля. Простейшей эквивалентной системе в этом случае достаточно содержать дрейф такой длины, чтобы сходящийся на входе пучок, пройдя кроссовер, начал расходиться.

Варьируя положение особенностей и (или) функцию связи между ними, можно уменьшать абберрации (4), оптимизировать длину и другие свойства системы, не меняя при этом размер и угол наклона пучка на краях. В отличие от классической постановки задачи оптимизация при данном подходе облегчается тем, что уравнение (16) как частный случай уравнения Бернулли преобразуется в линейное неоднородное уравнение с решением в виде квадратур [7].

Использование уравнения (16) позволяет в принципе формализовать процедуру проектирования систем требуемой длины. Априори любая длина не меньше некоторой может быть гарантирована таким выбором функции связи, при котором на интервале изменения  $\lambda$  будут находиться две смежные ненулевые сингулярности типа узел. Тогда останется лишь надлежащим образом выбрать подходящую интегральную кривую, соединяющую эти два узла, т.е. задать  $M_0$ . К сожалению, подобная ситуация реализуема не всегда. Необходимо соответствующее изменение знака функции  $f_3(\lambda)$ . А уравнение для соленоидальной линзы, например, ни при каких условиях ненулевых узловых точек не имеет, поскольку  $f_2 \equiv df_1/d\lambda$ .

В качестве иллюстрации некоторых возможностей предлагаемой методики ниже представлен ряд преобразований осесимметричной одиночной линзы с протонным пучком, типичным для систем инъекции в ускоряющую структуру с пространственно однородной квадрупольной фокусировкой (энергия 60 keV, ток 30 mA, нормализованный эмиттанс 0.25 mm mrad). Осевое распределение потенциала линзы, задающее базовую функ-

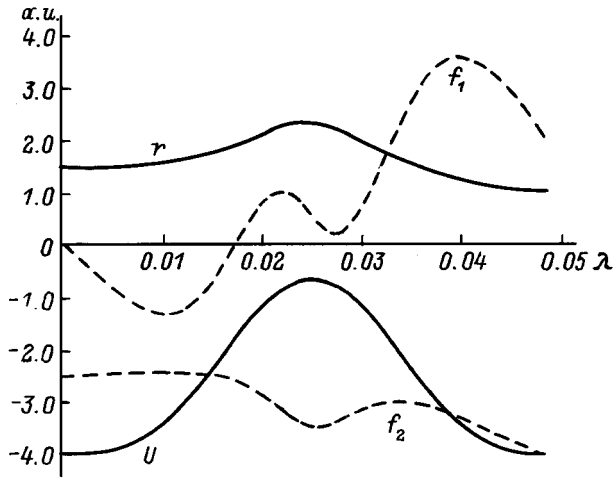


Рис. 2. Характеристики одиночной линзы и пучка при токе 30 мА.

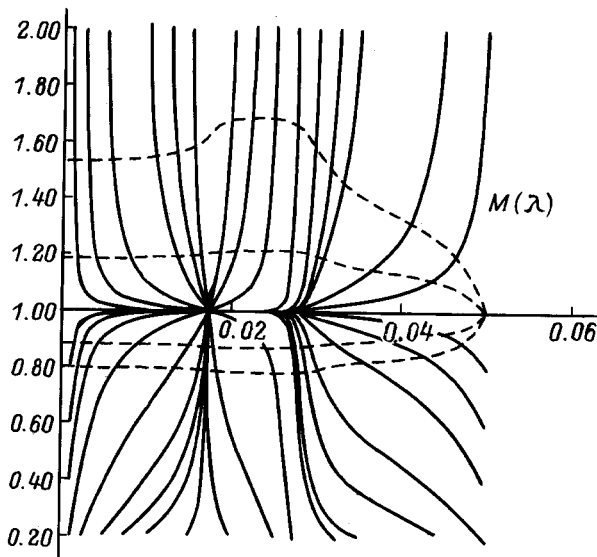


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (16). Сплошные линии — ток 30 мА; штриховые линии (сверху вниз) — токи 10, 20, 40 и 50 мА.

цию связи в параметрическом виде, аппроксимировалось полиномом шестой степени с нулевыми на краях первой и второй производными. Соответствующая ему огибающая пучка находилась численным интегрированием уравнения (14) с начальными значениями  $r(0) = 1.5 \text{ mm}$ ,  $r'(0) = 0$ . Форма электродов, реализующая требуемое осевое распределение потенциала, определялось уравнением первого приближения

$$\Psi = U(z) - 0.25U''(z)R_A^2(z) + Q_U(1 + 2 \ln(R_A(z)/r(z)))/\sqrt{U(z)},$$

где  $\Psi$  — потенциал электрода,  $R_A$  — радиус апертуры.

Потенциал среднего электрода был выбран так, чтобы формировать на выходе системы пучок радиусом около

1 mm и углом сходимости 10 mrad. На рис. 2 представлены характеристики этой системы. Поскольку функция связи получена интегрированием обычного уравнения огибающей, то  $f_3 \equiv f_2$ . Решения уравнения (16) для тока 30 мА приведены на рис. 3 сплошными линиями. Интегральная кривая  $M = 1$  соответствует базовой реализации функции связи. Остальные реализации будут отличаться величиной угла наклона огибающей на выходе. На интервале от ненулевого узла до седла на входе все реализации совпадают. На рис. 4 представлены профили электродов с потенциалами базовой системы, реализующих функцию связи с угловой огибающей пучка на выходе 5, 10 и 20 mrad. Для той же системы на рис. 3 (штриховые линии) приведены решения уравнения (16) при изменении тока; угол пучка на выходе сохранен равным 10 mrad. Полученные по этим решениям осевые распределения потенциала и соответствующие им огибающие пучка приведены на рис. 5. На рис. 6 представлены

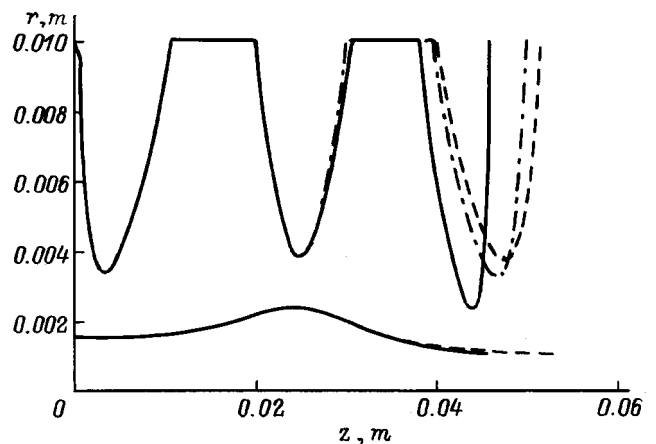


Рис. 4. Профили электродов, формирующие пучок с радиусом 1 mm и угловой огибающей 20 mrad (—), 10 mrad (- - -), 5 mrad (- · -).

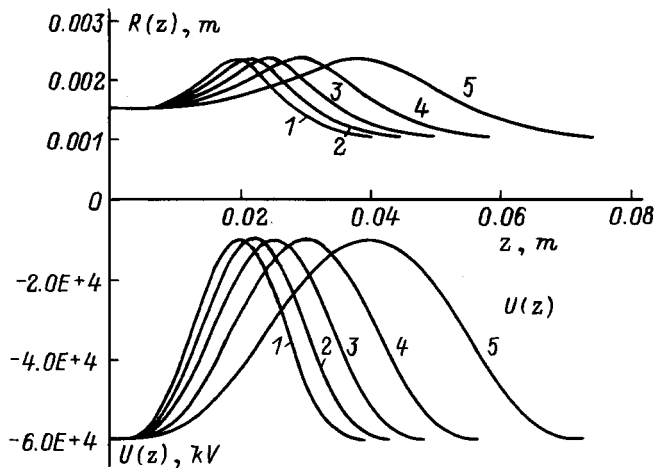
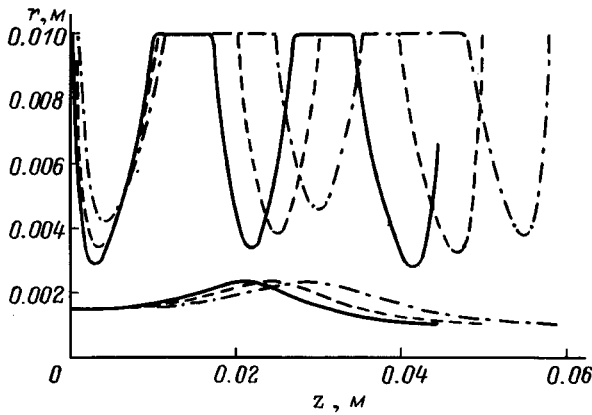


Рис. 5. Изменение осевого распределения потенциала и хода огибающей при изменении тока пучка. 1–5 — 50, 40, 30, 20, 10 мА соответственно.



**Рис. 6.** Геометрия линз, осуществляющих одинаковое преобразование пучка при токах 20 (---), 30 (- - -), 40 мА (—).

профили электродов, позволяющие осуществить одно и то же преобразование радиуса пучка и угла наклона при токах 20, 30, 40 мА без изменения напряжения на электродах.

Естественно, далеко не каждая математическая реализация функции связи реализуема физически. Предлагаемый подход позволяет удовлетворить формальным образом только ряду ограничений, накладываемых на управление. Физическая реализуемость управления может быть улучшена надлежащей коррекцией функции связи в первую очередь путем изменения огибающей пучка, на поведение которой накладывается гораздо меньше ограничений. Еще более универсальной видится следующая процедура, сочетающая преимущества масштабного преобразования с возможностями явного задания управления: 1) определить базовую функцию связи путем решения обычного уравнения огибающей с физически реализуемым управлением; 2) если выбранное управление не обеспечивает необходимого преобразования пучка, осуществить коррекцию функции связи с целью придания ей требуемых краевых значений; 3) с помощью обобщенного уравнения масштабного преобразования найти управление, математически реализующее откорректированную функцию связи; 4) если полученное управление не реализуемо физически, заменить его на ближайшее допускающее такую реализацию и вернуться к пункту 1.

## Заключение

Представленное преобразование позволяет использовать единый подход к решению задач согласования пучка в устройствах различных типов. Оно основано на введении функции связи, изначально определяющей соответствие между зависимыми переменными обычного уравнения огибающей и являющейся инвариантом преобразования. Свойства особенностей основного уравнения преобразования позволяют формализовать процесс проектирования (настройки) пучковых систем по

оптическим характеристикам первого порядка с учетом температуры частиц и их объемного заряда.

С помощью полученного уравнения во многих случаях возможно масштабирование уже спроектированных систем; перепроектирование их на новое значение тока, эмиттанса, энергии пучка, при изменении сорта частиц; проведение анализа реализуемости ограничений на интенсивность силового поля, апертуру канала, его длину и т. д. В связи с этим становится актуальной задача разработки каталога эталонных (базовых) функций связи, соответствующих типовым преобразованиям пучка в оптических элементах. Изложенный подход может быть использован для решения других краевых задач динамики.

## Список литературы

- [1] Swain G., Busch P., Burns M. // Proc. of the 1989 IEEE Part. Accel. Conf. Chicago: IL, 1989. P. 598.
- [2] Yudin I.P. // Proc. of the 1993 IEEE Part. Accel. Conf. Washington: D.C., 1993. P. 191.
- [3] Lee-Whiting G.E., Bezic N. // NIM. 1969. Vol. 71. N 1. P. 61.
- [4] Takayama K. // PA. 1987. Vol. 21. N 3–4. P. 259–267.
- [5] Picht J. // Einführung in die Theorie der Elektronenoptik. 2<sup>nd</sup> ed. Leipzig, 1957. P. 137–150.
- [6] Тарантин Н.И. Магнитные статические анализаторы заряженных частиц. Поля и линейная оптика. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 31–36.
- [7] Зуев Ю.В. Препринт НИИЭФА. № П-0940. М.: ЦНИИ-Атоминформ, 1995.