

01;05

Кинетика необратимого распространения тепловой неустойчивости при неоднородном распределении температуры в поперечном сечении сверхпроводящего композита

© В.Р. Романовский

Российский научный центр "Курчатовский институт",
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 27 июня 1997 г.)

В рамках модели сплошной среды исследованы условия необратимого распространения нормальной зоны вдоль комбинированного сверхпроводника с учетом его поперечной теплопроводности в предположении равномерного распределения тока по сечению провода. Выполненные численные эксперименты для токонесущего элемента круглого сечения в зависимости от интенсивности охлаждения и поперечных размеров сопоставлены с известными результатами одномерной теории. Показано, что одномерная теория по отношению к двумерной приводит к заниженным значениям скорости тепловой неустойчивости. В наибольшей степени размерный эффект видоизменяет условия распространения нормальной зоны при увеличении коэффициента теплоотдачи. В основе этой закономерности лежит увеличение температуры в центре провода при ее одновременном уменьшении на поверхности, в результате которого средняя по сечению композита температура с увеличением его радиуса увеличивается.

Обеспечение условий устойчивой работы токонесущих элементов (ТНЭ) сверхпроводящих магнитных систем является одной из основных проблем технической сверхпроводимости. Их формулировка основывается на исследовании процессов, происходящих в ТНЭ в результате возникновения и развития неустойчивостей различной природы. Существенную роль в понимании физических особенностей этих явлений играет теория тепловой стабилизации [1,2]. Ее основные положения были сформулированы в рамках простейших одномерных моделей. Это позволило получить основные критерии устойчивости сверхпроводящего состояния, в частности такие, как условие стационарной стабилизации [3], теорему равных площадей [4]. Кроме этого, в одномерном приближении были выведены аналитические выражения для расчета скорости нормальной зоны в случае ее необратимого распространения по сверхпроводнику [5–7], проведен анализ устойчивости сверхпроводящего состояния ТНЭ к тепловым возмущениям в зависимости от длительности и протяженности источников внешнего тепловыделения [8,9], определены критические энергии допустимых возмущений при варьировании коэффициента заполнения композита сверхпроводником [10], его свойств, индукции внешнего магнитного поля и температуры хладагента [11,12]. Однако в одномерных моделях из внимания опускается специфика развития нормальной зоны в композите, обусловленная наличием поперечного теплового потока [13,14]. Другим не очевидным на первый взгляд фактором, от которого зависят условия тепловой стабилизации ТНЭ, является изменение температуры поверхности ЭНС [15]. Поэтому дальнейшее развитие теории тепловой стабилизации должно основываться на решении проблем, учитывающих многомерный характер протекающих процессов. С этой точки зрения в настоящей работе исследованы особенности необрати-

мого распространения тепловой неустойчивости вдоль композита.

Рассмотрим охлаждаемый сверхпроводящий композит круглого сечения с равномерно распределенным по сечению током, находящийся в постоянном внешнем магнитном поле и помещенный в хладагент с заданной температурой T_0 . Опишем изменение его теплового состояния в рамках модели сплошной среды с усредненными по температуре параметрами с помощью двумерного уравнения вида [2]

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{I^2}{S^2} \rho(T),$$

$$t > 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < r < r_0. \quad (1)$$

Здесь c — объемная теплоемкость композита; λ_x , λ_r — коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях; I — ток; S — площадь поперечного сечения; $\rho(T)$ — эффективное сопротивление композита

$$\rho(T) = \rho_0 \begin{cases} 1, & T > T_{CB}, \\ \frac{T - T_C}{T_{CB} - T_C}, & T_C \leq T \leq T_{CB}, \\ 0, & T < T_C = T_{CB} - (T_{CB} - T_0) \frac{I}{I_C}, \end{cases}$$

где ρ_0 — удельное электросопротивление матрицы, T_{CB} — критическая температура сверхпроводника при нулевом токе в заданном магнитном поле, I_C — критический ток композита при температуре хладагента.

При задании необходимых начального и граничных условий будем исходить из следующих предположений. Пусть в начальный момент времени в результате действия симметричного относительно начала координат равномерно распределенного по сечению тепловыделения локальный участок композита мгновенно нагревался

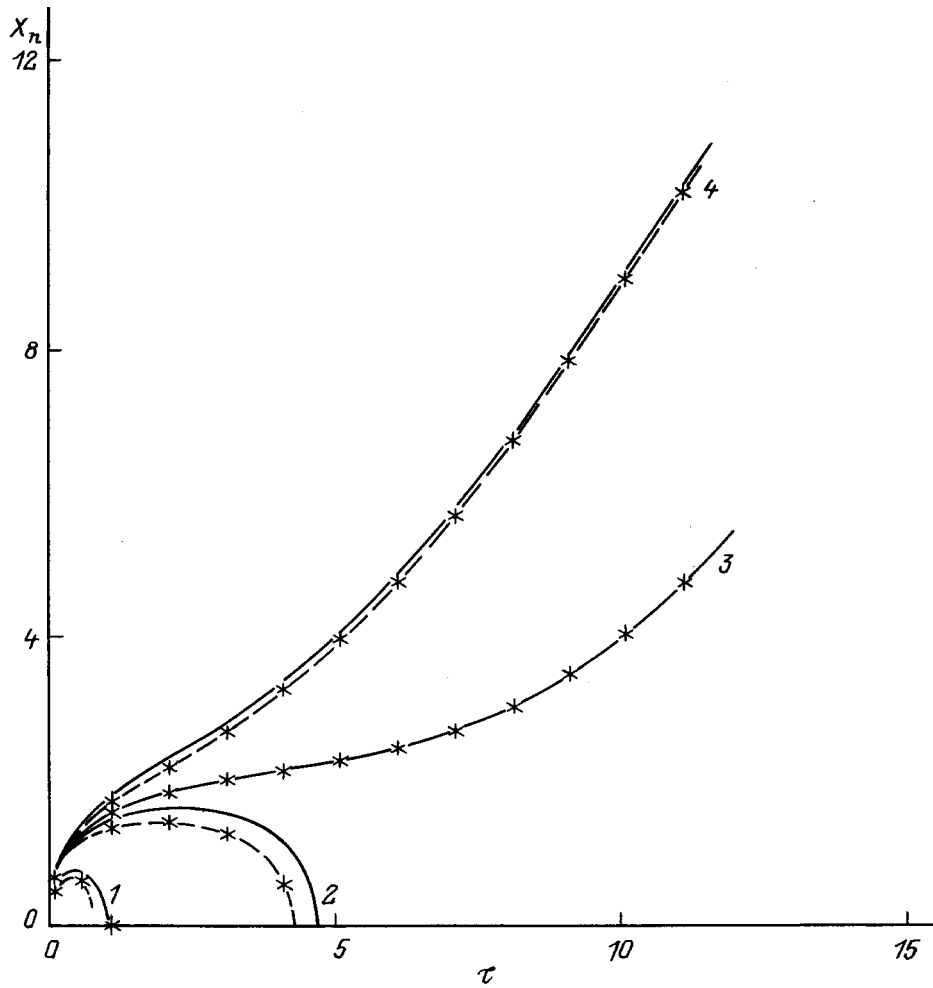


Рис. 1. Распространение нормальной зоны в сечениях $R = 0$ (—) и $R = R_0$ (—*—) при действии возмущений с энергией, близкой к критической. Θ_i : 1 — 1, 2 — 1.6, 3 — 1.7, 4 — 2.

до температуры выше критической T_C . Подобное изменение теплового состояния может происходить при действии многочисленных необратимых механических нагрузок, которым подвержены ТНЭ. При этом учтем, что тепловое состояние концевых областей не будет оказывать влияние на формирование тепловой волны в композите, если общая протяженность композита во много раз превышает так называемую MPZ-длину [2]. Предположим также, что на поверхности композита имеет место теплообмен с постоянным коэффициентом теплоотдачи h , а торцевые поверхности цилиндра поддерживаются при температуре хладагента.

Согласно выше изложенным предположениям, начально-краевые условия имеют вид

$$T(x, r, 0) = \begin{cases} T_1 = \text{const}, & 0 \leq x \leq x_1, \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ T_0, & x > x_1, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=l} = T_0, \quad \lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} + h(T - T_0)|_{r=r_0} = 0. \quad (2)$$

Введем безразмерные переменные

$$X = x/L_x, \quad R = r/L_r, \quad i = I/I_C,$$

$$\tau = \lambda_x t / (cL_x^2), \quad \Theta = (T - T_0) / (T_{CB} - T_0),$$

где

$$L_{x,r} = (\lambda_{x,r} S^2 (T_{CB} - T_0) / I_C^2 \rho_0)^{1/2},$$

которые позволяют упростить проводимый анализ, используя обобщенные переменные, не зависящие от коэффициента теплоотдачи [16]. После подстановки новых переменных в уравнение (1) и условия (2) получим

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + i^2 \begin{cases} 1, & \Theta > 1, \\ \frac{\Theta - 1 + i}{i}, & 1 - i \leq \Theta \leq 1, \\ 0, & \Theta < 1 - i, \end{cases}$$

$$\Theta(X, R, 0) = \begin{cases} \Theta_1, & 0 \leq X \leq X_1, \quad 0 \leq R \leq R_0, \\ 0, & X > X_1, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \quad \Theta \Big|_{X=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \beta \Theta \right|_{R=R_0} = 0, \quad (3)$$

где $L = l/L_x$, $R_0 = r_0/L_r$, $X_1 = x_1/L_x$, а параметр

$$\beta = \frac{hS}{I_C} \sqrt{\frac{T_{CB} - T_0}{\lambda_r \rho_0}}$$

является безразмерным коэффициентом теплоотдачи. Он связан с так называемым параметром тепловой стабилизации α (параметр Стекли)

$$\alpha = \frac{I_C^2 \rho_0}{hpS(T_{CB} - T_0)}$$

соотношением

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \frac{S}{pL_r}$$

(p — охлаждаемый периметр).

Задача (3) позволяет исследовать основные физические особенности кинетики нормальной зоны с учетом размерного эффекта. Для ее решения в силу кусочно-линейной зависимости эффективного удельного сопротивления композита от температуры использовался метод конечных разностей. При численном определении скорости распространения тепловой неустойчивости вдоль композита в виде характерной температурной волны учитывались качественные особенности ее формирования [16].

Во-первых, во внимание принималось, что температурная волна образуется при действии теплового возмущения, энергия которого выше некоторого порогового значения, описывающего верхнюю границу допустимых возмущений. В качестве иллюстрации на рис. 1 приведены кривые, показывающие изменение во времени протяженности нормальной зоны в центральной части композита и на его поверхности, определяемой из уравнения $\Theta(X_n, R, \tau) = 1 - i$, для различных начальных температур участка композита, находящегося в нормальном состоянии. Расчет проводился для следующих параметров: $L = 100$, $\beta = 0.1$, $i = 0.9$, $R_0 = 2$, $X_1 = 1$. Видно, что в рассматриваемом случае тепловая неустойчивость приобретает необратимый характер при $\Theta_1 > 1.7$.

Во-вторых, поскольку скорость температурной волны не зависит от характера начального возмущения, то при численном определении ее скорости совокупность критических параметров X_1 и Θ_1 может быть произвольной. На рис. 2 построены соответствующие зависимости изменения во времени протяженности нормальной зоны в случае ее необратимого распространения вдоль композита при $L = 100$, $\beta = 0.1$, $i = 0.9$, $R_0 = 2$, $\Theta_1 = 1$ и различных значениях начальной протяженности нормальной зоны. Он наглядно демонстрирует

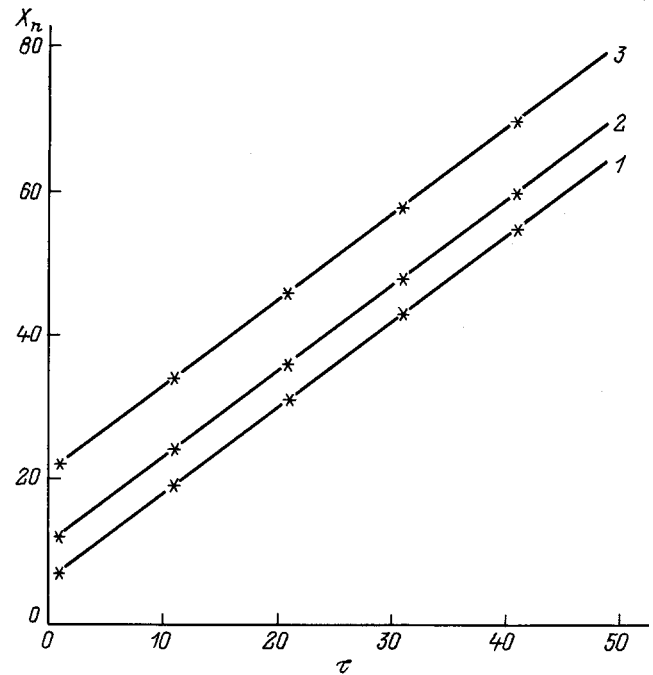


Рис. 2. Распространение нормальной зоны в сечениях $R = 0$ (—) и $R = R_0$ (—*—) при действии закритических возмущений. X_1 : 1 — 5, 2 — 10, 3 — 20.

формирование тепловой волны и ее распространение с одной и той же скоростью для различных значений X_1 , когда последняя практически не зависит от местоположения точки в радиальном направлении, в которой определяется скорость.

В-третьих, для полного исключения влияния переходного процесса, предшествующего формированию тепловой волны, ее скорость определялась только после того, как распределение температуры по сечению композита в его наиболее нагретой части практически не изменялось со временем (рис. 3). Другими словами, во внимание принимались состояния, достаточно удаленные от начального момента времени, которые асимптотически близки к квазистационарному распределению температуры тепловой волны.

Отмеченные особенности позволяют не только уменьшить ошибку численного определения скорости тепловой неустойчивости на основе решения нестационарного уравнения теплопроводности, но и избежать априорного задания температуры поверхности композита.

На рис. 4 построены безразмерные скорости распространения тепловой неустойчивости как функции транспортного тока, вычисленные для различных условий охлаждения и двух характерных значений радиуса провода: термически тонкого ($R_0 = 1$, рис. 4, а) и термически массивного ($R_0 = 10$, рис. 4, б). Здесь же пунктиром приведены результаты соответствующих расчетов по одномерной модели [16].

Как и следовало ожидать, скорость тепловой волны в теплоизолированном композите ($\beta = 0$) не зави-

сит от его поперечного размера, так как при этом тепловое состояние ТНЭ по сечению однородно. В то же время отличие в значениях скорости нормальной зоны, рассчитанной по одномерной и двумерной моделям для охлаждаемых композитов, зависит от величины β , его поперечных размеров. Так, зависимость $V(i)$ для термически тонкого провода в двумерном приближении незначительно превышает соответствующие значения, полученные по одномерной модели в широком диапазоне изменения тока. Однако у термически массивных ТНЭ наблюдается существенное расхождение между одномерной и двумерной теориями. Данное отличие может иметь не только количественный характер, но и качественный в силу значительного увеличения расчетных двумерных значений скорости нормальной зоны. В результате перехода от одномерной модели к двумерной диапазон токов с отрицательными значениями скоростей, соответствующих стабильным сверхпроводящим состояниям, значительно уменьшается. Поэтому если переходные процессы в массивном ТНЭ исследовались на основе одномерных моделей, в частности определялись его устойчивые состояния к произвольным возмущениям (в областях $V < 0$), то в реальных условиях для данных параметров он может находиться в метастабильном состоянии ($V > 0$).

В основе отмеченных закономерностей лежит соответствующее изменение теплового состояния композита в его поперечном сечении, которое не учитывается в одномерной теории. При увеличении β и прежде всего при улучшении теплоотдачи распределение температуры в поперечном сечении становится более неравномерным. В результате этого температура в центральной части

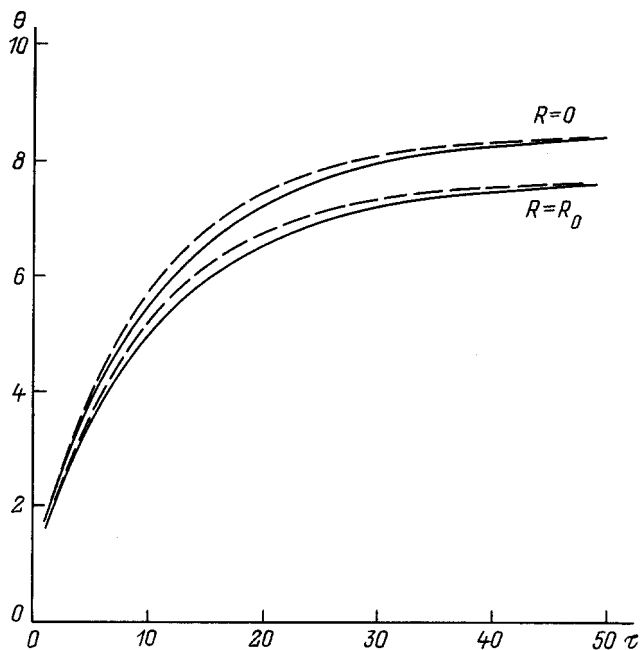


Рис. 3. Увеличение температуры композита в сечении $X = 0$. $X_1 = 5$ (—) и $X_1 = 20$ (----).

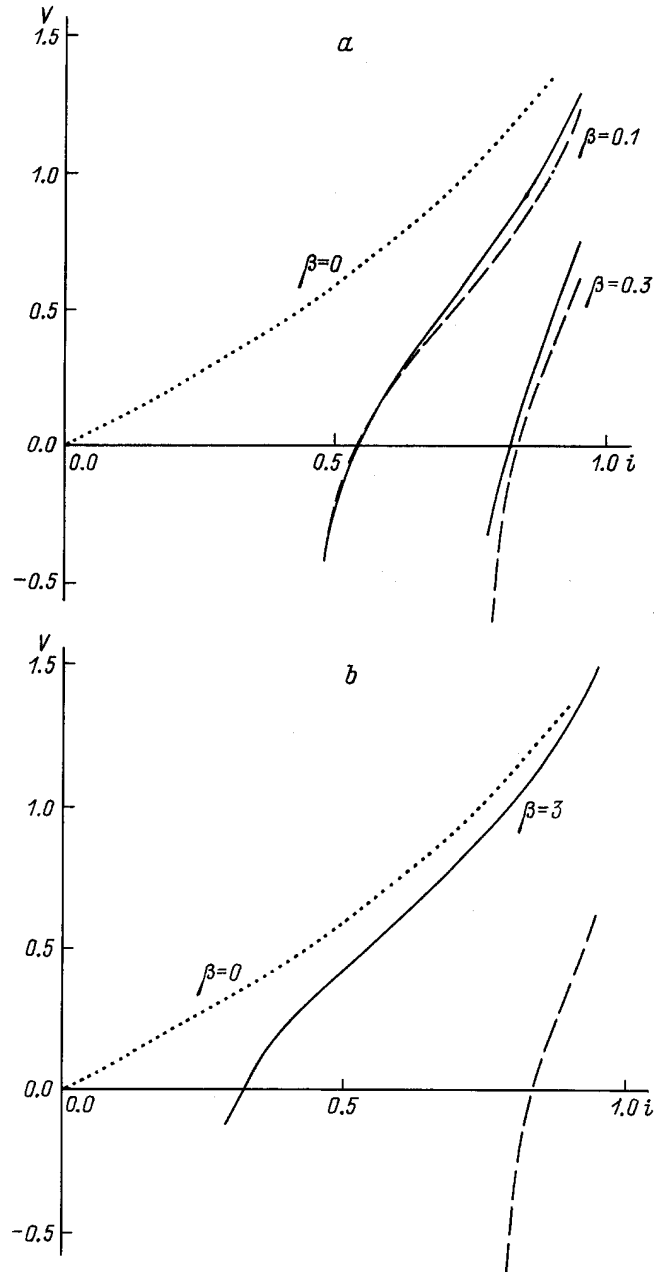


Рис. 4. Зависимость скорости нормальной зоны от тока, вычисленная по одномерной (----) и двумерной моделям.

массивного композита увеличивается, а на поверхности уменьшается (рис. 3). Поэтому, несмотря на то что в двумерной модели в отличие от одномерной имеет место кондуктивный поток тепла в поперечном направлении, средняя температура в наиболее нагретой части увеличивается. Для более строгого доказательства этого факта рассмотрим задачу

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\Theta_{\max}}{dR} \right) + i^2 = 0,$$

$$\frac{d\Theta_{\max}}{dR} + \beta \Theta_{\max} \Big|_{R=R_0} = 0,$$

описывающую распределение температуры в поперечном сечении композита, находящегося в нормальном состоянии по истечению большого промежутка времени. Ее решением является зависимость вида

$$\Theta_{\max}(R) = \frac{i^2 R_0}{2\beta} (1 + \beta R_{0/2}) - \frac{i^2 R^2}{4},$$

с помощью которой легко определить среднюю по сечению температуру

$$\langle \Theta \rangle = \frac{1}{S} \int_S \Theta_{\max} ds = i^2 (\alpha + R_{0/8}^2).$$

Далее выражение показывает, что по сравнению с соответствующим одномерным значением, равным αi^2 , учет размерного эффекта приводит при увеличении R_0 к монотонному увеличению $\langle \Theta \rangle$. В соответствии с этим и происходит видоизменение зависимости $V(i)$.

Таким образом, двумерный расчет кинетики тепловой неустойчивости вдоль композита показывает, что одномерная теория занижает значения скорости необратимого распространения нормальной зоны. В основе данного отличия лежит увеличение средней температуры композита в его наиболее нагретой части. В наибольшей степени данное отличие будет иметь место у хорошо охлаждаемых массивных токонесущих элементов. Это необходимо учитывать при разработке крупных сверхпроводящих магнитов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-03527).

Список литературы

- [1] *Альтов В.А., Зенкевич В.Б., Кремлев М.Г., Сычев В.В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
- [2] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
- [3] *Stekly Z.J.J., Zar J.L.* // IEEE Trans. Nuclear Sci. 1965. Vol. 12. N 3. P. 367–372.
- [4] *Maddock B.J., James G.B., Norris W.T.* // Cryogenics. 1969. Vol. 9. N. 8. P. 261–273.
- [5] *Cherry W.H., Gittleman J.I.* // Sol. St. Electr. 1960. Vol. 1. N 4. P.287–305.
- [6] *Keilin V.E., Klimenko E.Yu., Kremlev M.G. et al.* // Les Champs magnetiques Intenses. CNRS. Paris, 1967. P. 231–236.
- [7] *Turck B.* // Cryogenics. 1980. Vol. 20. N 3. P. 146–150.
- [8] *Keilin V.E., Romanovsky V.R.* // Cryogenics. 1982. Vol. 22. N 6. P. 313–317.
- [9] *Романовский В.Р.* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1984. N 4. С. 115–119.
- [10] *Romanovskii V.R.* // Cryogenics. 1985. Vol. 25. N 6. P. 327–333.
- [11] *Romanovskii V.R.* // Cryogenics. 1988. Vol. 28. N 11. P. 756–761.
- [12] *Романовский В.Р.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 1. С. 41–47.

- [13] *Романовский В.Р.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 4. С. 31–36.
- [14] *Романовский В.Р.* // Изв. АН СССР. Энергетика. 1992. № 2. С. 129–135.
- [15] *Романовский В.Р.* // ДАН СССР. 1993. Т. 330. № 3. С. 304–307.
- [16] *Романовский В.Р.* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1986. № 1. С. 104–109.