01

О мере упорядоченности движения и неравновесных фазовых переходах в автоколебательной системе релаксационного типа

© А.С. Рудый

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 22 апреля 1996 г.)

Рассматривается открытая термодинамическая система, ее состояние определено одномерным температурным полем $T(x,t)$ и тепловым потоком $I(x,t)$, на которые наложена нелокальная нелинейная внешняя связь. На основании результатов динамического анализа рассчитано изменение энтропии Клаузиуса и ее производства при возбуждении в системе автоколебаний. В качестве меры упорядоченности движения предложено использовать относительное приращение полной энтропии системы, нормированной на ее полное производство. Во второй части работы прослежена аналогия между формализмом бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа и теории фазового перехода Ландау–Гинзбурга. Показано, что на начальной стадии автоколебаний условие фазовой согласованности, определяющее амплитуду колебаний в рамках формализма Андронова–Хопфа, из-за флуктуаций температуры теряет смысл. В этом случае амплитуду следует рассматривать как параметр порядка, а действительное состояние системы определять из требования минимума нелинейной части приращения производства энтропии. Предложенный подход позволяет описывать переходные режимы и качественно объясняет "жесткую" и "мягкую" бифуркации как неравновесные фазовые переходы первого и второго рода.

1. Одной из задач теории самоорганизации нелинейных процессов в открытых динамических системах является выбор фундаментальных количественных характеристик упорядоченности движения [1]. Сравнительный анализ различных критериев упорядоченности содержится в работе [2]. В частности, для систем томсоновского типа (осцилляторных систем с диссипативной нелинейностью) мерой порядка служит энтропия Больцмана

$$S(t) = -k_B \int f(X,t) \ln f(X,t) dX + S_0,$$

где $f(X,t)$ — одночастичная функция распределения, X — набор определяющих состояние системы переменных [3].

Как показано в [4], нормированная на энергию энтропия автоколебательной системы уменьшается при переходе через порог генерации и может служить критерием самоорганизации (S-теорема Климонтовича).

Одним из видов самоорганизации в открытых динамических системах являются автоколебания. В работах по самоорганизации автоколебания рассматриваются преимущественно как упорядоченное состояние систем томсоновского типа. Значительно меньше внимания уделяется исследованию автоколебаний в распределенных системах релаксационного типа и практически не рассматриваются открытые релаксационные системы с недиссипативной нелинейностью. В то же время процессы самоорганизации в подобных системах в силу специфики методов, используемых при их описании, требуют детального рассмотрения.

В подавляющем большинстве случаев достаточным уровнем описания движения открытой релаксационной системы является макроскопический уровень, т. е. ее математическая модель имеет вид детерминированной системы параболических уравнений. Рассмотрим наиболее простой случай, когда движение в динамической системе определяется только диффузией теплоты. Энтропию такой детерминированной системы было бы естественно вычислять как энтропию Клаузиуса $S = \int(\delta Q/T) + S_0$. В связи с этим возникает вопрос, будет ли энтропия Клаузиуса такой же мерой порядка для системы релаксационного типа, как энтропия Больцмана для томсоновской системы. Ниже исследуется эволюция энтропии и ее производства в распределенной автоколебательной системе релаксационного типа при изменении управляющего параметра. Приведенные расчеты основываются на результатах анализа математической модели системы, выполненного в работе [5].

2. Удобным объектом для изучения процессов самоорганизации в релаксационных системах является математическая модель устройства стабилизации температуры, схема которого приведена на рис. 1. В подобных устройствах все элементы, за исключением объекта управления (в данном случае диэлектрической среды *1*), можно считать сосредоточенными, а математическую модель системы свести к краевой задаче нестационарной теплопроводности. Для простоты предположим, что неоднородное температурное поле системы одномерно и запишем краевую задачу теплопроводности в виде

$$\dot{T}(x,t) = aT''(x,t), \qquad T(0,t) = 0, \qquad (1,2)$$

$$T'(x,t)\big|_{x=1} = f[\beta - T(x_0,t)] \cdot \sigma[\beta - T(x_0,t)]. \qquad (3)$$

Необходимо подчеркнуть, что в системе (1)–(3) какая-либо самоорганизация возможна только за счет самовоздействия единственной степени свободы, осуществляемого через внешнюю обратную связь. Ее моделирует

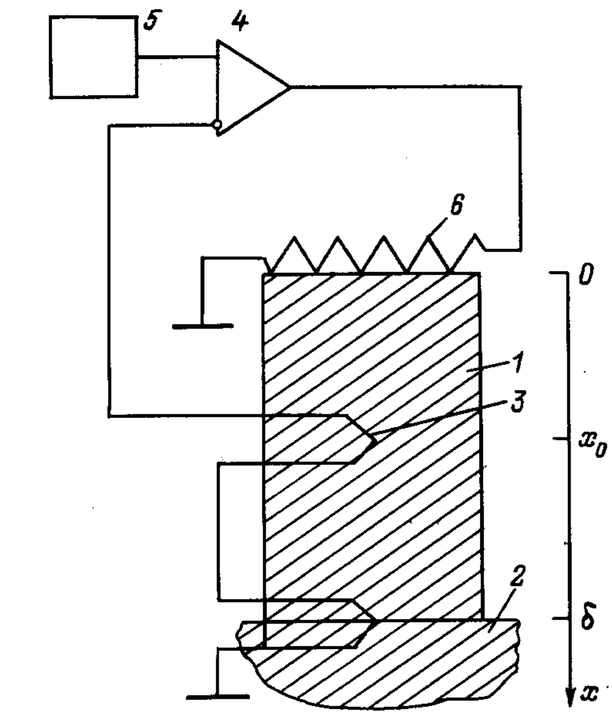

Рис. 1. Система стабилизации температуры. *1* — управляемый объект, *2* — термостат, *3* — дифференциальная термопара, *4* — регулятор, *5* — источник опорного напряжения, *6* — нагреватель.

нелокальное граничное условие (3), задающее тепловой поток на границе $x = 1$ как функцию температуры во внутренней точке x_0. Здесь $f[\beta - T(x_0, t)]$ — некоторая гладкая функция температуры, вогнутая во всей области определения, что является необходимым условием существования стационарных состояний; σ — функция Хевисайда, отсекающая от f ветвь положительной обратной связи, отвечающей положительному аргументу f; β — константа. Такая модель обратной связи позволяет охватить практически все случаи пропорционального регулирования температуры.

В работе [5], где задача (1)–(3) исследовалась для случая квадратичной нелинейности функции f, было показано, что все параметры, определяющие глубину отрицательной обратной связи, можно сгруппировать в один безразмерный параметр A. Существует некоторое (критическое) значение $A \equiv A_c < 0$, такое что при $A > A_c$ система локально экспоненциально устойчива и находится в стационарном состоянии

$$\bar{T}(x) = Cx, \tag{4}$$

где C — отвечающий условию $A < 0$ корень уравнения

$$C = F(1 - Cx). \tag{5}$$

При $A < A_c$ состояние равновесия теряет устойчивость, а в его окрестности появляется устойчивое периодическое решение

$$T(x,t) = C(\varepsilon)x + \frac{2}{f''}\Big\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}\Big[V_1(x)\exp(i\omega(\varepsilon)t)$$

$$+ V_1^*(x)\exp(-i\omega(\varepsilon)t)\Big] + \frac{\varepsilon}{b_2}\,\frac{2|V_1(x_0)|^2}{1 - A_c}x$$

$$+ \frac{\varepsilon}{b_2}\Big[V_2(x)\exp(i2\omega(\varepsilon)t)$$

$$+ V_2^*(x)\exp(-i2\omega(\varepsilon)t)\Big]\Big\}. \tag{6}$$

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\omega_c}{1 + (c_2/b_2)\varepsilon}.$$

Здесь $f'' = \left[\partial^2 f/\partial T^2\right]\big|_{T=Cx_0}$; $\varepsilon = (A - A_c)/A_c$ — надкритичность системы; $V_1(x) = [\mathrm{sh}\,\sqrt{\omega_c/2a}(1+i)x]$ — пространственная часть решения линеаризованной краевой задачи (1)–(3); $\omega(\varepsilon)$ и ω_c — частоты автоколебаний нелинейной и линейной систем соответственно; c_2 и b_2 — ляпуновские коэффициенты, вычисляемые методом, изложенным в работе [5].

Результаты [5] легко обобщаются на случай нелинейности любого вида, если только f — глобально вогнутая гладкая функция, удовлетворяющая условию $f'(0) = 0$. Тогда f можно разложить в ряд Тейлора по степеням осциллирующей компоненты температуры

$$f\left[\beta - \bar{T}(x_0) - \tilde{T}(x_0,t)\right] = C(\varepsilon) + \frac{A}{x_0}\tilde{T}(x_0,t)$$

$$+ f''\frac{\tilde{T}^2(x_0,t)}{2!} + f'''\frac{\tilde{T}^3(x_0,t)}{3!}\ \ldots + \tag{7}$$

и далее проводить нелинейный анализ, следуя приведенному в [5] алгоритму. Если в дополнение к квадратичной нелинейности в условии (7) учесть кубические члены разложения f, то общий вид решения задачи (1)–(3) не изменяется, однако динамика системы может претерпеть существенные изменения. Производная f''' может быть как положительной, так и отрицательной величиной, поэтому коэффициент b_2 может оказаться величиной любого знака. Если $b_2 > 0$, то в системе (1)–(3) имеет место мягкая бифуркация рождения цикла (6). При $b_2 < 0$ автоколебания возникают "жестко" и асимптотика (6) периодического решения имеет смысл только в докритической области, где ей соответствует неустойчивый предельный цикл.

Приведенные выше выражения для температурного поля позволяют вычислить энтропию системы S и производство энтропии P и проследить их эволюцию при возбуждении автоколебаний. Поскольку температурное поле, а следовательно, S и P определяются надкритичностью управляющего параметра A, далее исследуется зависимость S и P от параметра ε при изменении последнего от -1 до 0 при жесткой и от $\varepsilon = -1$ до $-0 < \varepsilon \ll 1$ при мягкой бифуркации рождения цикла.

3. Как отмечалось при построении математической модели (1)–(3), единственным распределенным (накопительным) элементом в приведенной на рис. 1 системе является диэлектрическая среда *1*. Пусть вся энергия, поступающая в систему в виде джоулева тепла, выделяется в бесконечно тонком слое на поверхности $x = \delta$, а нижняя поверхность имеет температуру термостата T_0. Тогда избыточная по отношению к энтропии термостата S_0 энтропия системы S будет заключаться и производиться только внутри распределенного элемента *1* и на его поверхности. Введем обозначение $s(x,t) = dS/dV$ для плотности отклонения энтропии среды от S_0 при некотором распределении температуры $T(x,t) + T_0$. Будучи аддитивной функцией состояния, плотность энтропии может быть вычислена как результат обратимого процесса, совершенного над элементарным объемом dV, в данном случае изотермическим слоем толщины dx и площади V (напомним, что высота элемента *1* равна единице)

$$s(x,t) = \int\limits_{T_0}^{T_0+T(x,t)} c_v \frac{dT}{T} = c_v \ln[1 + \Theta(x,t)]. \qquad (8)$$

Здесь c_v — объемная теплоемкость, $\Theta(x,t) = T(x,t)/T_0$ — нормированная температура. С учетом (8) уравнение баланса энтропии преобразуется в уравнение диффузии

$$\dot{s}(x,t) = as''(x,t) + \frac{a}{c_v}[s'(x,t)]^2, \qquad (9)$$

где нелинейный член — плотность источников или локальное производство энтропии.

Соотношение (8) позволяет найти точное значение полной энтропии стационарного состояния

$$\bar{S} = V\int\limits_0^1 s(x)dx = C_p\left\{\left[1 + \frac{1}{\bar{\Theta}(1)}\right] \times \ln\left[1 + \bar{\Theta}(1)\right] - 1\right\}, \qquad (10)$$

а также оценить ее изменение при возбуждении автоколебаний. Для этого подставим $\Theta(x,t) = \bar{\Theta}(x) + \tilde{\Theta}(x,t)$ в (8), а полученное выражение представим в виде

$$s(x,t) = c_v \ln\left[1 + \bar{\Theta}(x)\right] + c_v \ln\left[1 + \frac{\tilde{\Theta}(x,t)}{1 + \bar{\Theta}(x)}\right]. \qquad (11)$$

Приращение плотности энтропии при возбуждении автоколебаний

$$\Delta s(x,t) = c_v\left[\frac{\tilde{\Theta}(x,t)}{1 + \bar{\Theta}(x)} - \frac{1}{2}\,\frac{\tilde{\Theta}^2(x,t)}{\left[1 + \bar{\Theta}(x)\right]^2} + \ldots\right] \qquad (12)$$

будем характеризовать при помощи среднего за период $\Pi(\varepsilon)$ значения плотности энтропии $\langle\Delta s(x,t)\rangle_{\Pi(\varepsilon)}$. Воспользовавшись решением (6) и вычислив средние значения $\tilde{\Theta}$ и $\tilde{\Theta}^2$ с точностью до членов порядка ε

$$\langle\tilde{\Theta}(x,t)\rangle_{\Pi(\varepsilon)} = \frac{2}{f''T_0}\,\frac{\varepsilon}{b_2}\,\frac{2|V_1(x_0)|^2}{1 - A_c}x,$$

$$\langle\tilde{\Theta}^2(x,t)\rangle_{\Pi(\varepsilon)} = \frac{4}{(T_0 f'')^2}\,\frac{\varepsilon}{b_2}\,2|V_1(x)|^2, \qquad (13)$$

а затем подставив их в (12), получим

$$\langle\Delta s\rangle_{\Pi(\varepsilon)} = \frac{4\varepsilon}{b_2 f''}\,\frac{c_v}{[1 + \bar{\Theta}(x)]T_0} \times \left[\frac{|V_1(x_0)|^2}{1 + |A_c|}x - \frac{1}{f''}\,\frac{|V_1(x)|^2}{[1 + \bar{\Theta}(x)]T_0}\right]. \qquad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что приращение плотности энтропии при возбуждении автоколебаний может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Знак приращения полной энтропии, вычисляемой как объемный интеграл от (14), существенным образом зависит только от координаты датчика температуры x_0 и квадратичной нелинейности системы, характеризуемой параметром f''. Очевидно, что для слабо нелинейной системы ($f'' \ll 1$) возбуждение автоколебаний всегда будет сопровождаться понижением полной энтропии системы.

В открытой термодинамической системе баланс энтропии определяется потоками энтропии на границах и ее производством внутри системы. Покажем, что понижение энтропии при $f'' \to 0$ не связано с уменьшением ее производства, а, напротив, происходит на фоне роста производства энтропии. Полное производство энтропии тепловым потоком выразим из (9) через скорость изменения полной энтропии и разность ее потоков на границах. Прибавив к получаемому выражению производство энтропии источником тепла, найдем полное производство энтропии в системе

$$P = I_s(0) + \frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}, \qquad (15)$$

где $I_s(0) = V\lambda\Theta'(x,t)\big|_{x=0}$ — поток интропии в термостат, $\tilde{S}$ — осциллирующая компонента полной энтропии.

Среднее за период значение полного производства энтропии

$$\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)} = V\lambda\left[\bar{\Theta}' + \langle\tilde{\Theta}'(0)\rangle_{\Pi(\varepsilon)}\right] = \frac{V\lambda}{T_0}\left[C(\varepsilon) + \frac{2}{f''}\,\frac{\varepsilon}{b_2}\,\frac{2|V_1(x_0)|^2}{1 + |A_c|},\right] \qquad (16)$$

зависящее только от стационарной компоненты теплового потока, при возбуждении автоколебаний возрастает на величину $\langle\tilde{\Theta}'(0)\rangle_{\Pi(\varepsilon)}$, определяемую добавкой к стационарной температуре в решении (7). Таким образом, при уменьшении f'' и сохранении прочих параметров полное производство энтропии в системе возрастает.

Из сопоставления (14) и (16) следует, что с уменьшением нелинейности системы ее энтропия убывает, в то время как полное производство энтропии возрастает. Другими словами, упорядоченность открытой системы растет при увеличении проходящего через нее потока энтропии. Очевидно, что адекватно судить о степени упорядоченности по изменению энтропии можно только при условии ее постоянного производства. В этом случае имеет смысл нормировать среднее значение полной энтропии системы $\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}$ на среднее значение ее производства, а в качестве меры упорядоченности движения взять относительное приращение нормированного среднего значения

$$\mathrm{So} = \frac{\Delta\left(\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}/\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}\right)}{\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}/\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}} \approx \frac{\Delta\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}}{\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}} - \frac{\Delta\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}}{\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}}, \qquad (17)$$

где приближенное равенство имеет место при малых изменениях S и P.

В частности, для степени упорядоченности автоколебательного состояния относительно стационарного имеем

$$\mathrm{So} \approx \frac{\langle S\rangle_{\Pi(\varepsilon)}}{\bar{S}_c} - \frac{\langle P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}}{\bar{P}_c}, \qquad (18)$$

где $\bar{S}_c$ и $\bar{P}_c$ — критические значения энтропии и ее производства в стационарном состоянии. Очевидно, что So будет одновременно и критерием упорядоченности движения. Например, из двух автоколебательных состояний с одинаковым значением энтропии более упорядоченным является состояние с большим производством энтропии, т.е. с меньшим значением So.

4. В соответствии с известным принципом И. Пригожина [6] действительное стационарное состояние открытой термодинамической системы характеризуется минимальным локальным производством энтропии по отношению к возможным стационарным состояниям. Аналитическое выражение этого принципа для системы с N степенями свободы, в которой часть термодинамических сил X_j, $j = 0, 1, \ldots, k$ фиксирована, имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial X_i} = 0, \qquad (19)$$

где X_i — нефиксированные термодинамические силы.

В стационарном состоянии у системы (1)–(3) реализована только одна степень свободы, т.е. состояние полностью определено, если задана одна термодинамическая переменная $T' = C(\varepsilon)$. Согласно [7], для системы с одной степенью свободы возможны два случая: 1) $k = 1$ — состояние системы полностью определено внешней силой; 2) $k = 0$ — система замкнута, а ее энтропия максимальна. Их можно классифицировать по де Грооту как стационарные состояния первого и нулевого порядка соответственно. Третий случай, не подпадающий под эту классификацию и рассматриваемый в настоящей работе, имеет место в системах с внешней связью (например, вида (5)). Очевидно, что в последнем случае действительное состояние не будет каким-либо образом выделено по признаку энтропии или ее производства по отношению к другим стационарным состояниям, поскольку однозначно определяется уравнением (5). Тем не менее при отклонении от стационарного состояния под действием какой-либо внешней силы система будет стремится вернуться в него, т.е. будет устойчива в смысле принципа Ле-Шателье.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, нелокальное граничное условие (5) преобразуем к виду

$$I(t) - \varphi[I_0 - I(t)] = 0, \qquad (20)$$

где $I = \lambda V T'$, $I_0 = \beta\lambda V/x_0$.

Предположим, что в результате действия внешней термодинамической силы ΔX^{ext} в системе создается дополнительный тепловой поток ΔI^{ext}. Результирующее изменение потока ΔI определяется из условия связи

$$I + \Delta I = \varphi(I_0 - I - \Delta I) + \Delta I^{\mathrm{ext}}. \qquad (21)$$

Учитывая только линейный по потоку член в разложении функции управляющего воздействия, получим следующее соотношение:

$$\Delta I = \frac{1}{1-A}\Delta I^{\mathrm{ext}}, \qquad (22)$$

являющееся аналитическим выражением принципа Ле-Шателье. Соотношение (22) легко преобразуется в выражение

$$\frac{dP}{dX^{\mathrm{ext}}} = \frac{1}{1-A}\,\frac{dP^{\mathrm{ext}}}{dX^{\mathrm{ext}}}, \qquad (23)$$

согласно которому скорость изменения производства энтропии при изменении внешней термодинамической силы в системе со связью в $1 - A$ раз меньше, чем в системе без обратной связи, и стремится к нулю при $A \to -\infty$.

5. Как известно, существует аналогия между равновесными фазовыми переходами и процессами самоорганизации в открытых термодинамических системах, которые получили название неравновесных фазовых переходов [8]. К их числу относятся автоколебания в системах томсоновского типа, поскольку для их поддержания необходим приток энергии извне, и, следовательно, автоколебательная система неравновесна [3]. Покажем, что процесс возбуждения автоколебаний в распределенной системе релаксационного типа также полностью укладывается в схему неравновесного фазового перехода.

Проведем некоторые аналогии между фазовыми переходами в конденсированных средах и в рассматриваемой системе. Гидродинамической моде конденсированной системы в данном случае соответствует неустойчивая мода

$$T(x,t) = \xi V(x)\exp[i\omega(\varepsilon)t], \tag{24}$$

амплитуда которой определяется комплексным параметром порядка ξ. Выбор управляющего параметра также достаточно очевиден: приведенной температуре в теории Ландау $\tau = (T - T_c)/T_c$ следует поставить в соответствие надкритичность системы $\varepsilon = (A - A_c)/A_c$.

Отметим, что в общем случае концепция фазовых переходов Ландау не дает адекватного описания картины неравновесного фазового перехода. Современная теория неравновесных фазовых переходов, как следует из ее краткого очерка, приведенного в обзоре [9], отличается от первоначальной концепции Ландау тем, что оперирует как минимум тремя дополнительными степенями свободы, соответствующими управляющему параметру, сопряженному полю и параметру порядка. Собственно переход, понимаемый как пространственно-временна́я эволюция гидродинамической моды, амплитуда которой определяется параметром порядка, является результатом конкуренции двух видов обратной связи, а именно положительной обратной связи параметра порядка с управляющим параметром и отрицательной обратной связи параметра порядка с сопряженным ему полем. Последняя реализует принцип Ле-Шателье. Квазистатический фазовый переход Ландау имеет место, когда параметр порядка пропорционален полю, а управляющий параметр от параметра порядка не зависит [9]. В данном случае по причинам, обсуждаемым ниже, предполагается, что управляющий параметр, а следовательно, и надкритичность ε от параметра порядка не зависят.

Пусть $\varepsilon > 0$, и в системе установились колебания температуры $\tilde{T}(x,t)$. Запишем периодическое решение задачи (1)–(3) в общем виде

$$\begin{aligned}\tilde{T}(x,t) = {} & \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|^{2n} \bar{T}_{2n}(x) \\ & + \frac{2}{f''}\left[\xi V_1(x)\exp(i\omega t) + \xi^* V_1^*(x)\exp(-i\omega t)\right] \\ & + \left[\xi^2 V_2(x)\exp(i2\omega t) + \xi^{*2} V_2^*(x)\exp(-i2\omega t)\right] \\ & + |\xi|^2\left[\xi W_1(x)\exp(i\omega t) + \xi^* W_1^*(x)\exp(-i\omega t)\right] \\ & + |\xi|^2\left[\xi V_3(x)\exp(i3\omega t) + \xi^* V_3^*(x)\exp(-i3\omega t)\right] + \ldots,\end{aligned} \tag{25}$$

где сумма в правой части (25) учитывает генерируемые нелинейностью добавки к стационарной температуре, определяемые на каждом четном шаге алгоритма [5]; $V_1(x) = [\mathrm{sh}\sqrt{\omega_c/2}(1+i)x]$ — пространственная часть решения линеаризованной краевой задачи (1)–(3).

Используя разложение (7), подставим (25) в условие (3) и усредним последнее по периоду колебаний

$$\begin{aligned}\left(|\xi|^2 \bar{T}_2'(x) + \sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}_{2n}'(x)\right)_{x=1} = {} & \frac{A_c}{x_0}|\xi|^2 \bar{T}_2(x_0) \\ & + \frac{A_c}{x_0}\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}_{2n}(x_0) + \frac{A_c}{x_0}\varepsilon\Delta\bar{T}(x_0) \\ & + \frac{f''}{2}\Big\{\Delta\bar{T}^2(x_0) + |\xi|^2\frac{8}{f''^2}|V_1(x_0)|^2 \\ & + |\xi|^4\frac{4}{f''}\left[W_1(x_0)V_1^*(x_0) + W_1^*(x_0)V_1(x_0)\right] \\ & + 2|\xi|^4|V_2(x_0)|^2 + \ldots\Big\} + \frac{f'''}{3\cdot 2}\Big\{\Delta\bar{T}^3(x_0) \\ & + \Delta\bar{T}\frac{24}{f''^2}|\xi|^2|V_1(x_0)|^2 + |\xi|^4\frac{12}{f''^2}\left[V_2(x_0)V_1^{*2}(x_0)\right. \\ & \left. + V_1^2(x_0)V_2^*(x_0)\right] + \ldots\Big\}.\end{aligned} \tag{26}$$

В условии (26) уравняем члены при $|\xi|^2$, что с учетом $\bar{T}_2(x_0)/x_0 = \bar{T}_2'(x_0)$ даст

$$\bar{T}_2' = \frac{2}{f''}\,\frac{2|V_1(x_0)|^2}{1 + |A_c|}. \tag{27}$$

Это решение совпадает с полученным в [5], в чем можно убедиться, сопоставляя (27) с добавкой к стационарной температуре в (6).

Для перехода от динамического описания к термодинамическому методу обратимся к алгоритму построения асимптотики периодического решения в теореме Андронова–Хопфа. На определенном этапе этого алгоритма нелинейная задача (1)–(3) преобразуется в рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач с нелокальными условиями обратной связи. Этим условиям должны удовлетворять амплитуда и фаза решения каждой из задач последовательности. Амплитуда колебаний находится из условия разрешимости, которое вытекает из условия для комплексной амплитуды третьей задачи последовательности.

Если и далее следовать динамическому методу, то в соответствии с формализмом теоремы Андронова–Хопфа надкритичность системы ε необходимо разложить в ряд по степеням ξ и, приравняв в (26) оставшиеся члены с одного порядка малости, выразить $T_{2n}(x)$ через высшие моменты колебаний температуры в точке x_0. Параметр ξ при этом, естественно, останется неизвестным, поскольку определяется на нечетных шагах алгоритма. Однако и это будет показано ниже, в окрестности точки бифуркации система не является полностью детерминированной и амплитуду колебаний следует искать, руководствуясь иными соображениями.

Предположим, что $0 < \varepsilon \ll 1$, причем система близка к критической точке настолько, что амплитуда колебаний второй гармоники в точке x_0 сравнима с флуктуациями температуры. Тогда условие для комплексной амплитуды третьей задачи последовательности теряет смысл. Одновременно отпадает необходимость учета обратной связи параметра порядка с управляющим параметром, поскольку эта связь реализуется через колебания основной частоты, входящие в нелинейность и неоднородность третьей задачи последовательности. В этом случае амплитуду колебаний следует рассматривать как параметр порядка, т. е. как дополнительную степень свободы, относительно которой система может совершать виртуальные перемещения. При этом действительное состояние будет определено минимумом функционала некоторого термодинамического потенциала, природа которого вытекает из условия (26). Чтобы последняя стала более очевидной, подвергнем это условие некоторым преобразованиям.

Произведем в (26) следующие замены

$$\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\frac{\bar{T}_{2n}(x_0)}{x_0}\to\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}'_{2n}(x_0)\to\Delta\bar{T}'(x_0)$$

и, воспользовавшись равенством $\Delta\bar{T}'(x_0)=\Delta\bar{T}'(1)$, перенесем $-|A_c|\Delta\bar{T}'(1)$ в левую часть условия. Принимая во внимание, что $\Delta\bar{T}'(1)=\Delta\bar{T}'(0)$, а $\Delta\bar{T}'(0)=(T_0/V\lambda)\Delta\bar{I}_s(0)=(T_0/V\lambda)\langle\Delta P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}$, получим

$$\begin{aligned}\langle\Delta P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}=\frac{V\lambda}{T_0(1+|A_c|)}\Bigg(&\frac{A_c}{x_0}\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}_{2n}(x_0)\\&+\frac{f''}{2}\Bigg\{\Big[\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}_{2n}(x_0)\Big]^2+|\varepsilon|^4\frac{4}{f''}\big[W_1(x_0)V_1^*(x_0)\\&+W_1^*(x_0)V_1(x_0)\big]+2|\xi|^4|V_2(x_0)|^2+\dots\Bigg\}\\&+\frac{f'''}{3\cdot 2}\Bigg\{|\xi|^2\frac{24}{f''^2}|V_1(x_0)|^2\sum_{n=2}^{\infty}|\xi|^{2n}\bar{T}_{2n}(x_0)\\&+|\xi|^4\frac{12}{f''2}\big[V_2(x_0)V_1^{*2}(x_0)\\&+V_1^2(x_0)V_2^*(x_0)\big]+\dots\Bigg\}\Bigg).\end{aligned}\tag{28}$$

Таким образом, потенциалом, определяющим действительное состояние системы, является производство энтропии, а точнее, добавка к производству энтропии, обусловленная высшими моментами колебаний температуры. Примечательно, что принцип минимального производства энтропии выполняется одновременно с принципом Ле-Шателье. Действительное приращение производства энтропии оказывается в $1+|A_c|$ раз меньше, чем производство энтропии возмущающим тепловым потоком (правая часть соотношения (28)).

Сгруппировав в правой части (28) члены при одинаковых степенях ξ и учитывая, что $\Delta\bar{T}_2(x_0)/x_0=f''|V_1(x_0)|^2/(1+|A_c|)$, приходим к следующему соотношению между приращением производства энтропии и параметром порядка

$$\langle\Delta P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}=-a\varepsilon|\xi|^2+B|\xi|^4,\tag{29}$$

где

$$a=\frac{V\lambda}{T_0}\,\frac{|A_c|}{(1+|A_c|)^2}\,\frac{2}{f''}2|V_1(x_0)|^2,$$

$$\begin{aligned}B=\frac{V\lambda}{T_0(1+|A_c|)}\Bigg(&\frac{f''}{2}\bar{T}_2^2(x_0)+f''|V_2(x_0)|^2\\&+2\left[W_1(x_0)V_1^*(x_0)+W_1^*(x_0)V_1(x_0)\right]+\frac{4f'''}{f''^3}\frac{4|V_1(x_0)|^4}{1+|A_c|}\\&+\frac{f'''}{f''^2}2\left[V_2(x_0)V_1^{*2}(x_0)+V_1^2(x_0)V_2^*(x_0)\right]\Bigg).\end{aligned}\tag{30}$$

Отметим, что здесь значение коэффициента B не определено и можно лишь поставить вопрос о корректности его оценки при помощи решений, полученных в рамках динамического подхода. Величина параметра порядка определяется требованием экстремума приращения производства энтропии

$$|\xi|^2=\frac{a\varepsilon}{2B}.\tag{31}$$

Очевидно, что из периодических решений, удовлетворяющих условию экстремума (31), орбитально устойчивым будет решение, отвечающее минимуму производства энтропии.

В общих чертах картина перехода выглядит следующим образом. Колебания основной частоты, удовлетворяющие условию обратной связи, порождают колебания высших гармоник, вторые и высшие моменты которых, а также высшие моменты основной частоты создают дополнительные потоки, производящие дополнительную энтропию. Амплитуда колебаний устанавливается такой, чтобы производство энтропии $\langle\Delta P\rangle_{\Pi(\varepsilon)}$ было минимально. Разумеется, картина меняется, как только надкритичность достигает величины, при которой выполняется условие фазовой согласованности для третьей гармоники. Несмотря на ограниченность этой схемы требованием малой надкритичности, на качественном уровне описания она приводит к тем же результатам, что и динамический метод.

6. Релаксация несохраняющихся параметров порядка, к числу которых относится и температура, к равновесному значению описывается эволюционным уравнением Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-\frac{\delta\Phi}{\delta\xi},\tag{32}$$

где τ — "медленное" время; Φ — функционал термодинамического потенциала, имеющего минимум в равновесном состоянии [8,9].

Поскольку в рассматриваемом случае таким функционалом является полное производство энтропии(29), правая часть уравнения (32) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*}\langle \Delta P \rangle_{\Pi(\varepsilon)} = -a\varepsilon\xi + 2B|\xi|^2\xi, \tag{33}$$

где комплексная амплитуда ξ — функция "медленного" времени.

Подставляя (33) в (32) и производя нормировку $\xi = \psi/\sqrt{2B}$, приходим к следующему виду уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = a\varepsilon\psi - |\psi|^2\psi. \tag{34}$$

Его решение

$$|\psi(\tau)|^2 = \frac{a\varepsilon}{1 + (a\varepsilon/|\psi_0|^2 - 1)\exp(-2a\varepsilon\tau)}, \tag{35}$$

где $\psi_0 = \psi(0)$, описывает переходные процессы в рассматриваемой автоколебательной системе.

Выражения (31), (35) позволяют на качественном уровне объяснить мягкую и жесткую бифуркации цикла. Действительно, в зависимости от соотношения между f'' и f''' коэффициент B может быть как положительной, так

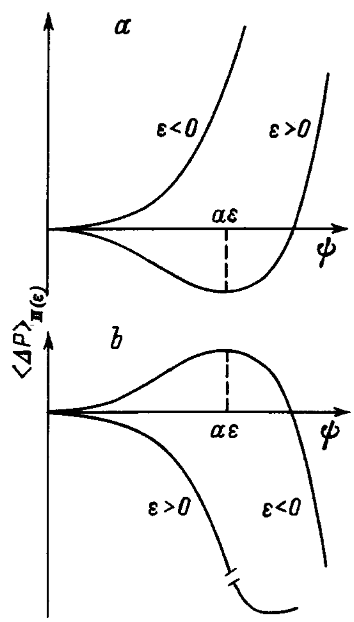

Рис. 2. Зависимость приращения производства энтропии от параметра порядка ψ. При $B > 0$ (a) равновесное значение параметра порядка $|\psi|^2 = a\varepsilon$ определяется минимумом кривой $\langle \Delta P(\psi) \rangle_{\Pi(\varepsilon)}$, а модуль параметра порядка — гладкая функция надкритичности системы ε. При $B < 0$, $\varepsilon < 0$ (b) стационарное состояние ($\psi = 0$) метастабильно, т.е. при достаточно сильном возмущении система может перейти в более устойчивое колебательное состояние. Если $B < 0$, то при переходе через точку бифуркации параметр порядка меняется скачком, что интерпретируется как неравновесный фазовый переход первого рода.

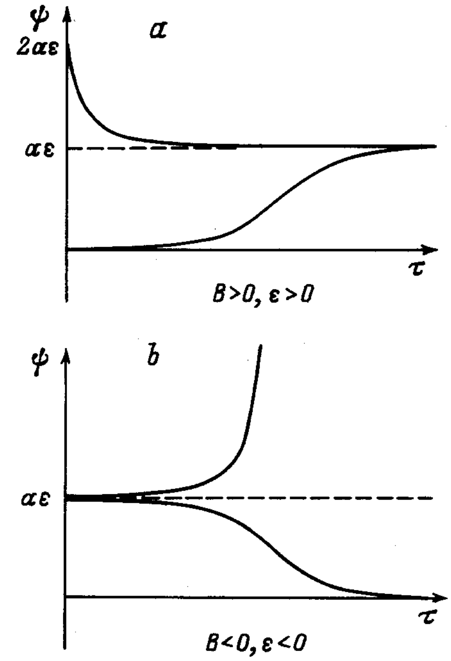

Рис. 3. Приблизительный вид временнóй зависимости параметра порядка при различных начальных условиях. a — устойчивый цикл, b — неустойчивый цикл.

и отрицательной величиной. Графики зависимости приращения производства энтропии от параметра порядка показаны на рис. 2. Если $B > 0$, то, согласно (31), устойчивый предельный цикл существует в закритической области, т.е. при $\varepsilon > 0$. Процесс установления предельного цикла описывается выражением (35), в котором следует положить $\psi_0 = \delta$, где δ — величина флуктуации параметра порядка. Очевидно, что в этом случае предельный цикл является аттрактором, т.е. фазовые траектории из различных начальных состояний стремятся к равновесному значению параметра порядка $|\psi|^2 = a\varepsilon$ (рис. 3, a).

Если $B < 0$, то (31) справедливо только при $\varepsilon < 0$, а соответствующий предельный цикл неустойчив. При $\varepsilon \to 0$ из области отрицательных значений неустойчивый цикл стягивается в точку равновесия, которая при этом теряет устойчивость. В этом случае при переходе системы через точку бифуркации автоколебания возникают жестко, а их амплитуда в рамках рассматриваемой модели бесконечна. Для количественной характеристики временнóй зависимости параметра порядка при $B < 0$, $\varepsilon < 0$ в выражении (35) необходимо изменить только знак показателя экспоненты. Пусть $B < 0$, $\varepsilon < 0$, а система смещена от состояния равновесия в результате флуктуации параметра порядка. Положив в (35) $|\psi_0|^2 = a|\varepsilon| \pm \delta$, где $\delta \ll a|\varepsilon|$, после очевидных преобразований получим

$$|\psi(\tau)|^2 \approx \frac{a|\varepsilon|}{1 \mp (\delta/a|\varepsilon|)\exp(2a|\varepsilon|\tau)}. \tag{36}$$

Как и ожидалось, данный цикл неустойчив (рис. 3, b) и при любом сколь угодно малом отклонении от равновесного значения параметра порядка автоколебания либо затухают, либо их амплитуда бесконечно растет.

В реальной системе амплитуда колебаний всегда ограничена какой-либо сильной нелинейностью, которой на рис. 2, b соответствует глобальный минимум производства энтропии. Например, в рассматриваемой системе это напряжение питания, ограниченность которого не отражена в модели (1)–(3). Поэтому после перехода через точку бифуркации система оказывается в новом устойчивом состоянии. Но если при мягком режиме возбуждения автоколебаний параметр порядка гладкая функция ε, то при жестком режиме он меняется скачком. Таким образом, жесткую и мягкую бифуркации можно интерпретировать как неравновесные фазовые переходы первого и второго рода.

7. Результаты исследования эволюции энтропии релаксационной системы с внешней нелинейной связью при изменении управляющего параметра в окрестности точки бифуркации позволяют сделать следующие выводы. При возбуждении автоколебаний приращение энтропии тем меньше, чем больше поток энтропии, создаваемый внешним источником. Мерой упорядоченности движения такой системы может служить относительное приращение энтропии Клаузиуса, нормированной на ее полное производство. В докритической области рассматриваемая система устойчива в смысле Ле-Шателье, т. е. при бесконечно малом отклонении от состояния равновесия под действием внешней силы в ней возникают потоки, ослабляющие результат действия этой силы. В закритической области принцип Ле-Шателье дополняется принципом минимального производства энтропии, согласно которому амплитуда колебаний температуры устанавливается такой, что добавка к производству энтропии, создаваемая высшими моментами колебаний температуры, минимальна. Этот принцип, сформулированный в предположении, что управляющий параметр не зависит от параметра порядка, позволяет рассматривать процесс упорядочения движения как квазистатический фазовый переход. В частности, в рамках этого предположения можно интерпретировать жесткую и мягкую бифуркации как неравновесные фазовые переходы первого и второго рода, а для описания переходных процессов использовать эволюционное уравнение Гинзбурга–Ландау.

Список литературы

[1] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с.
[2] *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение, структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: Наука, 1990. 317 с.
[3] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
[4] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 23. С. 1412–1416.
[5] *Rudyi A.S.* // Int. J. Thermophys. 1993. Vol. 14. N 1. P. 159–172.
[6] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
[7] *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
[8] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
[9] *Олемский А.И., Коплык И.В.* // УФН. 1995 Т. 165. № 10. С. 1106–1144..