Спектр непрямого магнетоэкситона

© Н.Е. Капуткина, Ю.Е. Лозовик*

Московский институт стали и сплавов,
117936 Москва, Россия
* Институт спектроскопии Российской академии наук,
142092 Троицк, Россия

(Получена 12 января 1998 г. Принята к печати 5 февраля 1998 г.)

Рассмотрен двумерный экситон с пространственно разделенными электронами и дырками в связанных квантовых ямах и в вертикально связанных квантовых точках в поперечном магнитном поле для широкого диапазона характерных величин задачи — расстояния между ямами или точками d и магнитного поля H. Найдены законы дисперсии $E_{nm}(P)$ в связанных квантовых ямах при различных d и H (P — сохраняющийся в магнитном поле магнитный импульс вдоль ям). Спектры вычислены с использованием численной диагонализации гамильтониана на различных базисах — кулоновском или Ландау (выбор базиса контролируется величиной эффективного магнитного поля). Асимптотические зависимости энергий (по d, H, P) определены аналитически. С ростом импульса P спектр экситона в слабых фиксированных H перестраивается от кулоновского к магнитному и представляет собой при больших P зоны, примыкающие к уровням Ландау. Рассмотрена также задача о пространственно разделенных электроне и заряженной примеси в связанных квантовых ямах.

1. Введение

В последнее время активно ведутся экспериментальные исследования системы непрямых экситонов (экситонов с пространственно разделенными электронами и дырками) в связанных квантовых ямах (СКЯ), а также в двойных и связанных квантовых точках, в частности, во внешнем поперечном магнитном поле (см. [1–13]).

Анализ физических свойств электронно-дырочных систем в связанных квантовых ямах [14,15], в частности, в поперечном магнитном поле [16–21], обнаруживает весьма интересные коллективные свойства и ряд различных фаз. В частности, интересной возможностью являлось бы прямое наблюдение предсказанной в [14] сверхтекучести непрямых экситонов, проявляющейся как существование незатухающих электрических токов в каждой из квантовых ям (см. также [15,21,22]), а также в интересных квазиджозефсоновских явлениях [23–25]. Возможность наблюдения этих фаз определяется соотношением времени жизни экситона и временем установления равновесия (время жизни должно быть значительно больше времени релаксации). Для электрона и дырки, локализованных в разных квантовых ямах, перекрытие волновых функций мало, что уменьшает вероятность взаимной аннигиляции. Приложение электрического поля, перпендикулярного слоям электронов и дырок, также уменьшает скорость рекомбинации, уменьшая перекрытие волновых функций. Магнитное поле влияет на время жизни, на коэффициент диффузии [4–6] и на спектр фотолюминесценции экситонов (см. [1–13]). Наблюдаемые эффекты трактовались как сверхтекучесть непрямых экситонов.

В этой связи представляется интересным подробно рассмотреть изолированный экситон с пространственно разделенными электронами и дырками (непрямой экситон) в поперечном магнитном поле. Задача о двумерном ($2D$) экситоне в сильном магнитном поле была рассмотрена в [16] для прямого экситона и в [14,15] для непрямого экситона. Но в вышеуказанных работах рассматривались в основном лишь асимптотические случаи очень сильных магнитных полей, когда кулоновское взаимодействие можно рассматривать как малое возмущение.

Далее мы рассмотрим общую задачу о пространственно разделенном $2D$ экситоне во внешнем поперечном магнитном поле для широкого диапазона величины магнитного поля H и межъямных расстояний d; найдем законы дисперсии $E_{nm}(P)$ в СКЯ при различных d и H (P — сохраняющийся в магнитном поле магнитный импульс вдоль ям). С ростом величины эффективного магнитного поля (см. далее) спектр энергий меняется от водородоподобного спектра при $H = 0$ к эквидистантным уровням Ландау. Отметим, что эффективное магнитное поле увеличивается с ростом не только внешнего поля H, но с ростом и d и P (для $H \neq 0$).

Мы также рассмотрим задачу о пространственно разделенном экситоне в вертикально связанных квантовых точках с параболическим удерживающим потенциалом.

Для расчета мы используем диагонализацию точного гамильтониана на различных базисах.

2. Пространственно разделенный $2D$ экситон в поперечном магнитном поле

Рассмотрим пространственно разделенные электрон e и дырку h на различных плоскостях во внешнем поперечном магнитном поле. Модель справедлива для малых толщин квантовых ям $D \ll a^*$, где $a^* = \frac{\hbar\varepsilon}{2m^*e^2}$ — радиус двумерного экситона на одной плоскости в отсутствие поля, ε — диэлектрическая проницаемость,[1] $m^* = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$ — приведенная масса, $m_{e,h}^*$ — эффективные массы электрона и дырки. Исходя из аксиальной симметрии задачи используем симметричную калибровку векторного потенциала $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{Hr}}{2}$.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$\left[\frac{1}{2m_e^*}\left(-i\hbar\nabla_e + \frac{e}{c}A_e\right)^2 + \frac{1}{2m_h^*}\left(-i\hbar\nabla_h - \frac{e}{c}A_h\right)^2 - \frac{e^2}{\varepsilon\left((\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)^2 + d^2\right)^{1/2}}\right]\psi = E\psi, \quad (1)$$

где d — расстояние между слоями электронов и дырок (ширина барьерного слоя в связанных квантовых ямах), $\mathbf{r}_{e,h}$ — координаты электрона и дырки вдоль квантовых ям. Роль двумерного импульса экситона в магнитном поле играет сохраняющаяся величина — магнитный импульс, оператор которого

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla_e + \frac{e}{c}(\mathbf{A}_e - \mathbf{A}_h) - \frac{e}{c}[\mathbf{H}, \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h] \quad (2)$$

$\hat{P}$ коммутирует с гамильтонианом (см. [16,26,27]). Закон сохранения P связан с инвариантностью системы относительно одновременной трансляции e и h и калибровочного преобразования.

Сделаем замену координат, выделив центр тяжести экситона $\mathbf{R} = \frac{m_e}{m_e+m_h}\mathbf{r}_e + \frac{m_h}{m_e+m_h}\mathbf{r}_h$ и координату относительного движения электрона и дырки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$.

Тогда $\hat{P} = -i\hbar\nabla_p - \frac{e}{2c}[\mathbf{H}, \mathbf{r}]$. Собственными функциями для оператора $\hat{P}$ являются

$$\psi_p(\mathbf{r}_e\mathbf{r}_h) = \psi_p(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \exp\left\{\left(iP + \frac{e}{2c}[\mathbf{H}, \mathbf{r}]\frac{R}{\hbar}\right)\right\}\psi_p(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\hat{P}\psi_p = P\psi_p.$$

Вводя $M = m_e^* + m_h^*$ и $\gamma = \frac{m_h^* - m_e^*}{m_h^* + m_e^*}$, запишем уравнение для относительного движения электрона и дырки в виде

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla\mathbf{r} + \frac{ie\hbar}{2m^* c}\gamma H[\mathbf{r}, \nabla\mathbf{r}] + \frac{e^2}{8m^* c^2}[\mathbf{H}, \mathbf{r}]^2 + \frac{e^2}{m^* c}[\mathbf{P}, \mathbf{H}]r - \frac{e^2}{\varepsilon\left(r^2 + d^2\right)^{1/2}} + \frac{P^2}{2M}\right\}\psi_p(\mathbf{r}) = E\psi_p. \quad (4)$$

С использованием преобразования (см. [16,27])

$$\psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0)\exp\left(\frac{i\gamma\mathbf{rP}}{2\hbar}\right);$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{c}{eH^2}[\mathbf{H}, \mathbf{P}]; \qquad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0 \quad (5)$$

уравнение для относительного движения электрона и дырки принимает вид

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla\rho + \frac{ie\hbar}{2m^* c}\gamma H[\rho\nabla] + \frac{e^2}{8m^* c^2}H^2\rho^2 - \frac{e^2}{8m^* c^2}H^2\rho^2 - \frac{e^2}{\varepsilon\left((\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0) + d^2\right)^{1/2}}\right\}\Phi(\boldsymbol{\rho}) = E\Phi(\boldsymbol{\rho}). \quad (6)$$

Введем следующие единицы энергии, длины, циклотронной частоты и магнитного поля

$$E_0 = \frac{2m^* e^4}{\varepsilon^2\hbar^2}; \qquad r_0 = \frac{\hbar^2\varepsilon}{2m^* e^2};$$

$$\omega_{c_0} = \frac{2m^* e^4}{\varepsilon^2\hbar^3}; \qquad H_0 = \frac{2(m^*)^2 e^3}{\varepsilon^2\hbar^3}c \quad (7)$$

(единицы измерения энергии и длины отвечают энергии связи и радиусу двумерного экситона). Проводя обезразмеривание, представим вышеприведенное уравнение в виде

$$\left[\Delta\rho - i\gamma\omega_L\frac{\partial}{\partial\Theta} - \frac{\omega_L^2}{4}\rho^2 + \left(\left(\frac{1}{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0}\right)^2 + d^2\right)^{1/2} + E\right]\Phi(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (8)$$

где $\omega_L = \frac{\omega_c}{2}$ — ларморова частота. В наших единицах магнитная длина есть $r_H = \sqrt{\frac{1}{\omega_L}}$.

Данное уравнение может быть решено численно разложением по подходящему базису функций, дающему быструю сходимость при заданном соотношении параметров задачи. В эффективно слабом магнитном поле при одновременно весьма малых параметрах H (или ω_L), d, P (или ρ_0), т.е. малой величине $\omega_L(d^2 + \rho_0^2 + 1)$, подходящим базисом будет базис водородоподобных (для 2D случая — двумерных) функций. В эффективно сильном магнитном поле (при больших величинах $H(\omega_L)$, либо d, либо ρ_0) подходящим базисом будет базис функций, формально совпадающих с волновыми функциями заряженной частицы в магнитном поле. Реально такой базис подходит для промежуточных магнитных полей, а особенно хорошо — для эффективно связанных. В пределе сверхсильных магнитных полей и при $d = 0$ наши результаты совпадают с результатами работы [16].

Для слабых магнитных полей подходящим базисом будет базис функций, близких к собственным функциям уравнения

$$\left[\Delta\rho + E_{0_{nm}} + \frac{1}{\left((\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0)^2 + d^2\right)^{1/2}}\right]f_{nm}(\boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (9)$$

Сделаем замену

$$f_{nm}(\boldsymbol{\rho}) = \chi_{nm}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0) = \chi_{nm}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

[1] Мы полагаем одинаковыми диэлектрические проницаемости слоев с носителями заряда (e и h) и барьерного слоя. В действительности, для реальных полупроводниковых гетероструктур диэлектрические проницаемости используемых в них материалов близки, но не совпадают.

Исходя из симметрии задачи положим $\chi_{nm}(\mathbf{r}) = e^{im\Theta} \times \Phi_{nm}(r)A_{nm}$, где

$$\frac{\partial^2\Phi_{nm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{nm}}{\partial r} + \left(E_{0_{nm}} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{(r^2+d^2)^{1/2}}\right)\Phi_{nm} = 0. \quad (11)$$

В случае больших межслоевых расстояний $d \gg 1$ задача сводится к осцилляторной задаче. Собственные функции имеют тот же вид, что и магнитные функции:

$$\Phi_{nm}(r) = A_{nm}L_n^{|m|}\left(\frac{\omega_d}{2}r^2\right)e^{-\frac{\omega_d}{2}\frac{r^2}{2}}r^{|m|};$$

$$A_{nm} = \left(\frac{1}{\pi}\frac{n!}{(n+|m|)!}\left(\frac{\omega_d}{2}\right)^{\frac{|m|+1}{2}}\right)^{1/2}, \quad (12)$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega_L^2 + 2/d^3}$.

Собственные энергии

$$E_{nm_0} = 2\omega_d\left(n + \frac{|m|+1}{2}\right) - \gamma m\omega_L - 1/d. \quad (13)$$

Данный результат справедлив не только для эффективно слабых магнитных полей (когда $\omega_L^2 \ll 1/d^3$ и $\omega_d \sim \sqrt{1/2d^3}$), но и для произвольных магнитных полей (в приближении $d \gg 1$ — см. далее).

При малых d поле дольше остается эффективно слабым. Для вычислений используется разложение по базису водородоподобных функций.

Система собственных функций

$$\Phi_{mn}(r) = C_{nm}e^{-\sqrt{|E_{0_n}|}r}\left(\sqrt{|E_n|}\right)^{|m|+1/2}r^{|m|} \times \sum_{s=0}^{n-|m|}A_s\sqrt{|E_{0_n}|^s}r^s, \quad (14)$$

где $A_0 = 1$, $A_s = A_{s-1}\frac{2(S+|m|-n-1)}{S(S+2|m|)}$, $S > 0$; C_{nm} — нормировочный коэффициент.

Собственные значения энергии:

$$E_{0_n} = -\frac{1}{4(S+|m|+1/2)^2} = -\frac{1}{4(n+1/2)^2}, \quad (15)$$

где $n = S + |m| = 0, 1, 2\ldots$.

Энергия зависит от единственного квантового числа $n = S + |m|$.

Рассмотрим влияние слабого магнитного поля — эффект Зеемана для $2D$ экситона. В 1-м порядке теории возмущений по $V_{00} = \frac{\omega_c^2}{4}\left(r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0\cos\Theta\right)$ имеем $\langle 00|V_{00}|00\rangle = \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 2\rho_0$. При $\rho_0 = 0$ ($P = 0$) поправка обращается в нуль.

Первая поправка к уровню с квантовыми числами $m = 0$ $n = 0$ ($n_1 = 1$) имеет минимум по ρ_0, т.е. по магнитному импульсу P, при $\rho_0 = 0$ (минимум при $\rho_0 = 0$ имеет место для основного состояния и для сильных полей). В слабых магнитных полях поправка к водородоподобным уровням энергии $\langle nm|V_{00}|nm\rangle \sim a_1\omega_c^2 + a_2P\omega_c$, т.е. для малых импульсов энергии квадратичны по магнитному полю ω_c, а для больших — линейны.

Численный диагонализацией гамильтониана на базе двумерных водородоподобных функций, отвечающих кулоновскому взаимодействию электрона и дырки, определяется с высокой точностью спектр энергии экситона в слабом магнитном поле H. Результатам расчета отвечает левая часть (рис. 1), соответствующая не очень большим P.

С ростом d при фиксированном H магнитное поле становится эффективно более сильным (по сравнению с взаимодействием e и h) и удобнее использовать базис частиц в магнитном поле. Магнитное поле становится эффективно более сильным и при больших магнитных импульсах $P(\rho_0)$ из-за возрастания среднего расстояния e и h вдоль слоя $\rho_{eh} \sim P$.

В случае эффективно сильных магнитных полей (а также, как показывают численные расчеты, и в случае промежуточных магнитных полей) подходящим оказывается базис собственных функций, определяемых уравнением

$$\left[\Delta_\rho + E_{0_{nm}} - i\gamma\omega_L\frac{\partial}{\partial\Theta} - \frac{\omega_L^2}{4}\rho^2\right]f_{nm}(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (16)$$

где ω_L — ларморова частота.

Система собственных функций имеет вид

$$f_{nm}(\boldsymbol{\rho}) = e^{im\Theta}L_n^{|m|}\left(\frac{\omega_L}{2}\rho^2\right)e^{-\frac{\omega_L}{2}\frac{\rho^2}{2}}\rho^{|m|} \times \left(\frac{1}{\pi}\frac{n!}{(n+|m|)!}\left(\frac{\omega_L}{2}\right)^{|m|+1}\right)^{1/2}. \quad (17)$$

Соответствующие собственные энергии есть

$$E_{0_{nm}} = 2\omega_L\left(n + \frac{|m| - \gamma m + 1}{2}\right), \quad (18)$$

где $n = 0, 1, 2\ldots$ $m = 0, \pm1, \pm2\ldots$ (при $\gamma = 1$ они совпадают со спектром Ландау).

Собственные функции задачи формально совпадают с волновыми функциями одной заряженной частицы в магнитном поле, а уровни энергии в отличие от задачи для одной частицы расщепляются (если $\gamma \neq 1$) по квантовому числу m. Невозмущенный спектр системы f_{nm} полностью дискретен, но уровни энергии вырождены по $\mathbf{P}$ (по ρ_0).

При эффективно весьма сильных магнитных полях для оценки энергетического спектра (и волновых функций) можно ограничиться учетом переходов между уровнями с одинаковой симметрией. Тогда энергетические уровни определяются из условия $\sum_n (E_0)_{nm} - E)\delta_{nn'} + V^m_{nn'} = 0$, где

$$V^m_{nn'} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m|)!}}$$

$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\binom{n+|m|}{n-i}\binom{n'+|m|}{n'-j}$$

$$\times \int \frac{e^{-t}t^{i+j+|m|}}{\left(d^2 + \left(\sqrt{t}\sqrt{2/\omega_L} + \rho_0\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\times K\left(\left(\frac{4\rho_0\sqrt{2/\omega_L}\sqrt{t}}{d^2 + \left(\rho_0 + \sqrt{2\omega_L}\sqrt{t}\right)^2}\right)^{1/2}\right)dt, \qquad (19)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

$V^m_{nn'}$ отвечает возбуждениям с переходами на уровни с одинаковой симметрией — с одинаковым квантовым числом m. Отметим, что мы не ограничиваемся первой поправкой по теории возмущений для кулоновского взаимодействия, хотя в пределе сверхсильных полей уже результаты расчета в 1-м порядке теории возмущений дают хорошую точность результатов и верные асимптотические зависимости (при $d \to 0$, см. результаты [16,17]). Мы же можем не пренебрегать переходами между уровнями, что распространяет область применимости используемого метода и на промежуточные магнитные поля.

В общем случае мы должны учеть переходы на уровни с разной симметрией $m \neq m'$, которым отвечают матричные элементы

$$V^{mm'}_{nn'} = -\sqrt{\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m'|)!}}\,\frac{1}{\pi}$$

$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\binom{n+|m|}{n-i}\binom{n'+|m'|}{n'-j}$$

$$\times \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-t}t^{i+j+\frac{|m|+|m'|}{2}}\,dt\,e^{i(m-m')\Theta}d\Theta}{\left(d^2+\rho_0^2+\left(\frac{2}{\omega_L}\right)t+2\rho_0\left(\sqrt{\frac{2}{\omega_L}}\right)\sqrt{t}\cos\Theta\right)}. \qquad (20)$$

Таким образом, численной диагонализацией гамильтониана на базе соответствующих магнитных функций f_{nm} можно получить энергетические спектры пространственно разделенного экситона для широкого диапазона магнитных полей $\mathbf{H}$ и расстояний d между слоями e и h.

На рис. 1 показана зависимость энергии нижнего уровня от импульса P (закон дисперсии) для слабого магнитного поля $H = 0.1$ для различных d. С ростом P энергетические уровни стремятся к уровням типа Ландау с магнитном поле (см. (18)). То же происходит и с ростом расстояния d. Итак с ростом поля H, и с ростом расстояния d, и с ростом импульса P происходит перестройка спектра от водородоподобного к магнитному.

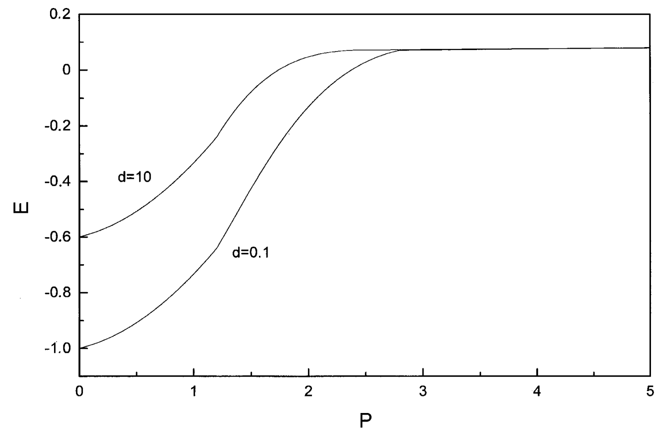

Рис. 1. Дисперсионные зависимости $E(P)$ основного состояния магнитоэкситона для межслоевых расстояний $d = 0.1$, 10; при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 0.1$, $\gamma = 0$.

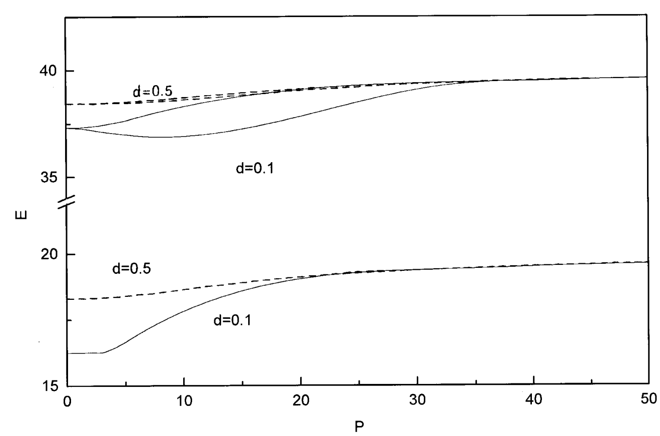

Рис. 2. Дисперсионные зависимости $E(P)$ для нижних уровней энергетического спектра магнетоэкситона для межслоевых расстояний $d = 0.1$, 0.5; при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 10$, $\gamma = 0$.

Законы дисперсии $E(P)$ для нижних уровней спектра пространственно разделенного экситона в магнитном поле, полученные методом численной диагонализации гамильтониана в сильном магнитном поле H на соответствующем базисе, представлены на рис. 2. Спектр состоит из зон, примыкающих к соответствующему уровню Ландау (n, m) и возникающих при непрерывном изменении магнитного импульса P (величины ρ_0). С ростом H энергия растет, с ростом d — стремится к уровням Ландау. С ростом эффективного магнитного поля (с ростом H и (или) d) указанные энергетические зоны сжимаются и все сильнее отделяются друг от друга, и спектр приближается к невозмущенному спектру f_{nm} — системе уровней Ландау (о вырожденных уровнях — см. далее).

Для основного состояния с соответствующими квантовыми числами ($n = 0$, $m = 0$) имеется единственный экстремум (минимум) при $\rho_0 = 0$. Для уровней энергии,

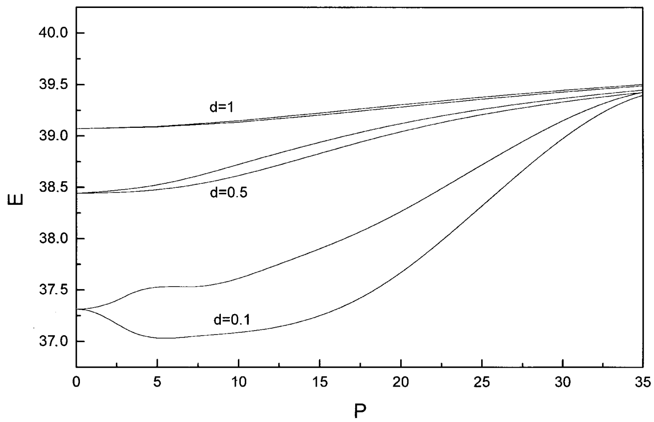

Рис. 3. Дисперсионные зависимости $E(P)$ для энергии первого вырожденного состояния магнетоэкситона для межслоевых расстояний $d = 0.1, 0.5, 1$; при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 10$, $\gamma = 0$. Видно исчезновение "ротонного" минимума с ростом d.

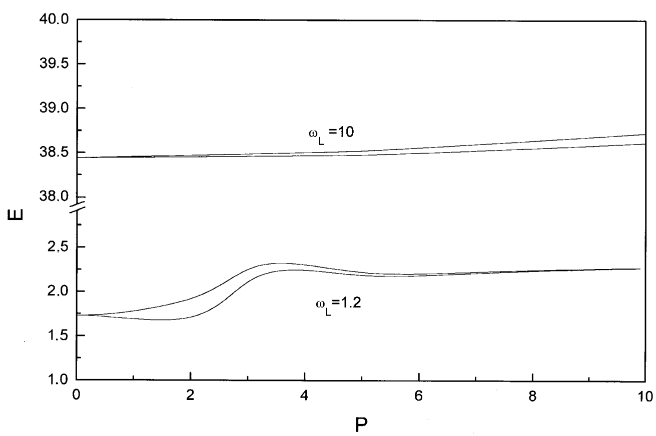

Рис. 4. Дисперсионные зависимости $E(P)$ для энергии первого вырожденного состояния магнетоэкситона для межслоевых расстояния $d = 0.5$, при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 1.2, 10$, $\gamma = 0$. Видно исчезновение "ротонного" минимума с ростом ω_L.

отвечающих возбужденным состояниям могут существовать и другие (боковые) экстремумы, в частности минимумы. При d, отличном от нуля, с ростом эффективного магнитного поля, т. е. с ростом отношения $d/r_H = d\sqrt{\omega_L}$, боковые минимумы и максимумы становятся все более пологими и, наконец, исчезают. Для уровня с квантовыми числами $n = 0$, $m = 1$ выполаживание и исчезновение бокового минимума с ростом d и с ростом H (и, следовательно, с ростом d/r_H) представлено на рис. 3 и 4.

Матричные элементы, соответствующие переходам с одинаковой симметрией, дают основной вклад для малых ρ_0 и имеют экстремум при $\rho_0 = 0$ $(P = 0)$. Поэтому дисперсионные кривые имеют экстремум при $\rho_0 = 0$ $(P = 0)$.

В случае больших импульсов $P \gg 1$ $(\rho_0 \gg 1)$ поправка к энергии

$$E^{(1)}_{nm} = V^{nm}_{nm}(P, d)$$
$$= -\sqrt{\omega_L}\left[\frac{\sqrt{\omega_L}}{P} + \frac{\left(\langle\rho^2\rangle_{nm} - 2d^2\right)\omega_L}{4}\left(\frac{\omega_L}{P}\right)^3\right],$$

где характерный размер волновой функции заряженной частицы в магнитном поле $\langle\rho^2\rangle_{nm} \sim r_H^2 = \frac{1}{\omega_L}$ для небольших n и m.

В сильных магнитных полях основной вклад в собственные значения энергий дают уровни с одинаковой симметрией, поскольку $V^{mm'}_{nn'} \ll V^{mm}_{nn'}$ $m \neq m'$. Соответствующие матричные элементы

$$V^m_{nn'} \to -\frac{\delta_{nn'}}{\sqrt{\rho_0^2 + d^2}} \quad \text{при} \quad \rho_0 \neq 0 \quad \text{или} \quad d \neq 0.$$

Роль малого параметра здесь играет магнитная длина $\frac{1}{\sqrt{\omega_L}} = r_H$.

Для основного состояния $n = 0$, $m = 0$, если ρ_0 или межслоевое расстояние d существенно превышает магнитную длину r_H, то поправка к энергии уровня Ландау $E^1_{00} \approx V^{00}_{00} \approx -\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+d^2}}\left(1 - \frac{1}{\rho_0^2+d^2}r_H^2\right)$. Если же оба d и $\rho_0 \ll r_H$, то поправка к энергии $E^1_{00} \approx V^{00}_{00} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{r_H}$. В случае $\rho_0 = 0$, $d = 0$, энергия $E_{00} = E_{0_{00}} + V^{00}_{00} = \omega_L - \sqrt{\pi/2}\sqrt{\omega_L}$.

Хотя абсолютное значение поправки растет с ростом поля как $\sqrt{\omega_L}\left(\frac{1}{r_H}\right)$, не его относительная величина $\frac{|V^{00}_{00}|}{E_{0_{00}}}$ падает как $\frac{1}{\sqrt{\omega_L}}(r_H)$.

Для $d \neq 0$ и $\rho_0 \neq 0$, начиная с некоторых значений для ларморовой частоты магнитного поля ω_L, таких, что $r_H \ll \max(d, \rho_0)$, матричный элемент $V^{00}_{00} \approx -\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+d^2}}\left(1 - \frac{1}{\rho_0^2+d^2}r_H^2\right)$. Поправка растет с ростом магнитного поля, но ее относительная величина $\frac{V^{00}_{00}}{E_{0_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+d^2}}r_H^2\left(1 - \frac{1}{\rho_0^2+d^2}\right)$ падает как r_H^2 (как $\frac{1}{\omega_L}$).

С ростом H, так же как и с ростом P или d, падает относительный вклад кулоновского взаимодействия и, соответственно, уровни становятся все ближе к уровням Ландау.

При малых же значениях "магнитных" членов в $\hat{H}$ по сравнению с кулоновским взаимодействием картина близка к кулоновской задаче — спектр похож на спектр двумерного атома водорода.

При $\gamma = 0$, т. е. $m_e = m_h$,

$$E_{0_{nm}} = \frac{\omega_c}{2}(2n + |m| + 1) = \omega_L \cdot k,$$

где $k = 2n + |m| + 1$ $k = 1, 2 \ldots$. Энергия $E_{0_{nm}}$ зависит только от квантового числа k и k-й невозмущенный уровень k-кратно вырожден. Кулоновское взаимодействие снимает это вырождение при ненулевом импульсе $P \neq 0$ $(\rho_0 \neq 0)$. В результате появляются законы дисперсии $E(P)$.

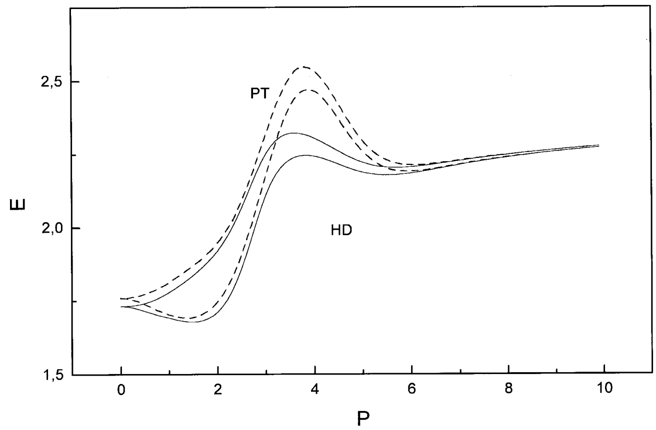

Рис. 5. Сравнение дисперсионных зависимостей $E(P)$ для энергии первого вырожденного состояния магнетоэкситона для межслоевого расстояния $d = 0.5$, при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 1.2$, $\gamma = 0$, полученных по теории возмущений по кулоновскому взаимодействию (кривые PT) и численной диагонализацией гамильтониана (кривые HD)

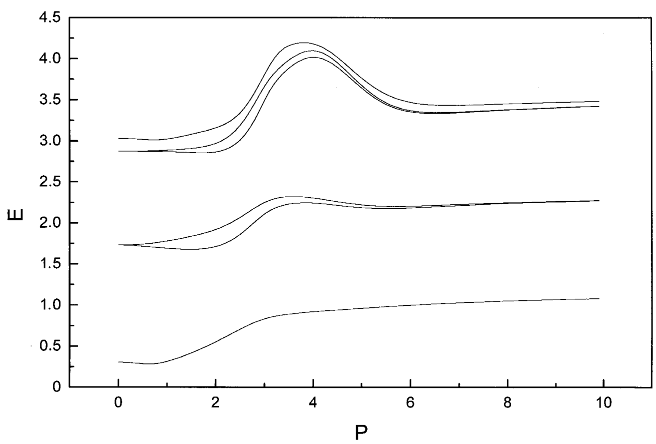

Рис. 6. Дисперсионные зависимости $E(P)$ для нижних энергетических уровней магнетоэкситона для межслоевого расстояния $d = 0.5$, при ларморовой частоте магнитного поля $\omega_L = 1.2$, $\gamma = 0$.

Основной уровень $n = 0$, $|m| = 0$ $(k = 1)$ невырожден, а более высокие уровни вырождены. Законы дисперсии при $\rho_0 \neq 0$ с учетом волнового взаимодействия приведены на рис. 5 и 6. Уровень невозмущенной (в пренебрежении кулоновским взаимодействием) задачи с $k = 2$ $(n = 0, |m| = 1)$ двукратно вырожден по квантовому числу $m (m = \pm 1)$. Для случая сверхсильных магнитных полей оценить расщепление можно, решая секулярное уравнение. Находим $E_{k=2} = E_{0_{k=2}} \pm E_{1_{k=2}}$, где $E_{0_{k=2}} = 2\omega_L + V_{01}^{01}(\rho_0, d)$; $E_{1_{k=2}} = -\frac{1}{(1/2)_2} \int\limits_0^\infty e^{-t} t \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right)^{1/4} P^2_{-1/2} \left(\frac{a/b}{\sqrt{a/b - 1}} \right) dt$, где $P^2_{-1/2}(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

С ростом эффективного магнитного поля расщепление уменьшается. При $P \to \infty$ $(\rho_0 \to \infty)$ или $d \to \infty$ расщепление $E_{1_{k=2}} \to 0$. При $\rho_0 \ll 1$ имеем

$$E_{1_{k=2}} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}\omega_L} \cdot \frac{\omega_L}{16} \left[\left(3 + 6d^2\omega_L + d^4\omega_L^2\right) e^{\frac{d^2\omega_L}{2}} \right.$$
$$\left. \times \operatorname{erfc}\left(d\sqrt{\frac{\omega_L}{2}} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(5 + d^2\omega_L\right) d\sqrt{\frac{\omega_L}{2}} \right] \rho_0^2.$$

Для более высоких уровней законы дисперсии представлены на рис. 6.

Рассмотрим случай бесконечно тяжелой дырки $\gamma = 1 (m_h \gg m_e)$. При $P = 0$ имеется совпадение уровней энергии примесного состояния и экситона (для пространственно разделенного случая $d \neq 0$, с зарядом примеси $+e$):

$$E_{0_{nm}} = 2\omega_L \left(n + \frac{|m| - \gamma m + 1}{2} \right) = \omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| - m}{2} \right).$$

Уровни энергии $E_{0_{nm}}$ бесконечно кратно вырождены. Кулоновское взаимодействие снимает вырождение $P = 0 \to \rho_0 = 0$ $V_{nm}^{mm'} = 0$ для $m \neq m'$. Система уравнений расщепляется на подсистемы. Переходы между уровнями с разной симметрией не дают вклада в энергию. Для $P = 0$ необходимо учитывать лишь взаимодействие уровней с одинаковой симметрией. Матричный элемент $V_{00}^m = \left(\frac{\omega_L}{2}\right)^{1+|m|} d^{2|m|} \psi \left(|m|, |m| + 3/2, \frac{d^2\omega_L}{2} \right)$. Уровень с $n = n' = 0$ приобретает тонкую структуру из-за расщепления по $|m|$.

Для эффективно больших расстояний d, таких, что $\frac{d^2\omega_L}{2} \gg 1$ $(d \gg r_H)$, матричный элемент $V_{00}^m \approx -\frac{1}{d} \left[1 - \frac{|m|+1}{d^2\omega_L} \right]$. Уровень с $n = 0$ — основной уровень сдвинется вниз на величину $\frac{1}{d}$, и тонкая структура уровня растет кверху с ростом $|m|$ эквидистантно $\left(\approx \frac{|m|}{d^3\omega_c} \right)$.

Для эффективно малых расстояний d, таких, что $\frac{d^2\omega_L}{2} \ll 1$ $(d \ll r_H)$, получим $V_{00}^m \approx -\sqrt{\frac{\omega_L}{2}} \frac{|m| - 1/2}{|m|!} \left[|m| - 1/2 - \frac{d^2\omega_L}{4} \right]$. Тонкая структура сгущается снизу вверх к невозмущенному уровню.

С ростом квантового числа m мы можем оценить соответствующие энергетические уровни через матричные элементы $V_{00}^m \to -\sqrt{\frac{\omega_L}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|m|}} - \frac{\omega_L d^2}{4|m|^{3/2}} \right) \to -\frac{1}{\sqrt{|m|}}$ $|m| \to \infty$.

Для случая примеси с зарядом $Z \neq 1$ во все вышеприведенные формулы войдет множитель Z: $V_{nn'}^m|_{Z \neq 1} = V_{nn'}^m|_{Z=1} \cdot Z$.

Для рациональных $\gamma = \frac{P}{q}$ уровни энергии без учета кулоновского взаимодействия $E_{0_{nm}}$ и $E_{0_{n'm'}}$ будут совпадать, если

$$\frac{2(n - n') - |m'| + |m|}{m - m'} = \gamma = \frac{P}{q},$$

$$P = 2(n - n') + |m| - |m'|, \qquad q = m - m'.$$

Такие квазивырождения являются случайными совпадениями значений уровней, не отражающими внутреннюю симметрию задачи. Поскольку наш метод допускает учет смешивания уровней с различными квантовыми числами, такие квазивырождения не ограничивают его применения (в отличие от построения 1-го порядка теории возмущений по кулоновскому взаимодействию как, например, в [16]).

Учет толщины пленок для достаточно тонких пленок в случае сильных магнитных полей закон дисперсии несколько изменяет количественно, но не качественно, причем с ростом импульса это изменение уменьшается (см. также [26,28]).

Имеется разумное согласие результатов расчета численной диагонализацией гамильтониана на соответствующем базисе и полученных в эксперименте (см. [4–6,8,9]).

3. Непрямой экситон в связанных квантовых точках

Экспериментально реализуется ситуация с локализацией экситона в квантовой яме [8,29], связанное с шероховатостью поверхности раздела и рассматриваемой как "естественная" квантовая точка. Возможна также локализация экситона и в искуственной квантовой точке или в вертикально связанных квантовых точках. В этой связи мы в данной работе исследуем энергетический спектр непрямого $2D$ экситона в следующей модели, описывающей вышеупомянутые экспериментальные реализации: электрон e и дырка h с эффективными массами m_e^* и m_h^*, находятся в разделенных барьером шириной d двух вертикально связанных двумерных квантовых точках, описывающихся, соответственно, параболическими потенциалами $U = \alpha_e r_e^2$ и $U = \alpha_h r_h^2$ ($\mathbf{r}_e$, $\mathbf{r}_h$ — двумерные радиус-вектора e и h вдоль плоскости квантовых точек) (мы используем единицы параметра крутизны α_0 удерживающего потенциала: $\alpha_0 = \frac{E_0}{r_0^2}$).

Сделав замену координат, выделив движение центра тяжести $\mathbf{R} = \mu_e \mathbf{r}_e + \mu_h \mathbf{r}_h$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$, преобразуем уравнение Шредингера к виду

$$\Bigg[\mu_e\mu_h\Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\mathbf{r}} + E + \frac{i\gamma\omega_c m}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_r} - \left(\alpha_e + \alpha_h + \frac{\omega_c^2}{4}\right)R^2 - \left(\mu_h^2\left(\alpha_e + \frac{\omega_c^2}{4}\right) + \mu_e^2\left(\alpha_h + \frac{\omega_c^2}{4}\right)\right)r^2 + \frac{1}{(r^2+d^2)^{1/2}} - 2\bigg(\frac{\omega_c^2}{4}(\mu_h - \mu_e) + \mu_h\alpha_e - \mu_e\alpha_h\bigg)\mathbf{rR}\Bigg]\psi = 0. \qquad (21)$$

Для упрощения рассмотрим случай $\frac{\omega_c^2}{4}(\mu_h - \mu_e) + \mu_h\alpha_e - \mu_e\alpha_h = 0$. Это равенство имеет место, например, для одинаковых квантовых точек и $\mu_e = \mu_h$. Тогда оказывается возможным разделить движение центра тяжести экситона и относительное движение электрона и дырки. Положим $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_R(\mathbf{R})\psi_r(\mathbf{r})$. В результате получаем систему уравнений:

$$\left(\Delta_{\mathbf{R}} + \frac{E_R}{\mu_e\mu_h} - \alpha_1 R^2\right)\psi_R = 0, \qquad (22)$$

$$\left(\Delta_{\mathbf{r}} + E_r - \alpha_2 r^2 + \frac{1}{(r^2 + d^2)^{1/2}}\right)\psi_r = 0, \qquad (23)$$

$$E = E_R + E_r + \frac{i\gamma\omega_c m}{2}, \qquad (24)$$

где $\alpha_1 = \frac{\alpha_e+\alpha_h}{\mu_e\mu_h} + \frac{\omega_c^2}{4}$, $\alpha_2 = \mu_h^2\alpha_e + \mu_e^2\alpha_h + \frac{\omega_c^2}{16}$.

Таким образом, уравнение (22) для центра масс в рассматриваемом случае имеет вид уравнения для гармонического осциллятора. Его решения для энергии центра масс E_R и собственных функций ψ_R есть

$$E_{R_{nm}} = 4\alpha_1^{1/2}\left(n + \frac{|m| + 1}{2}\right), \qquad (25)$$

$$\psi_{R_{nm}} = \left(\frac{n!}{\pi(|m| + n)!}(\alpha_r)^{|m|+1}\right)^{1/2} \times R^{|m|}e^{-\sqrt{\alpha_1}R^2/2}L_n^{|m|}\left(\sqrt{\alpha_1 R^2}\right)e^{im\theta}. \qquad (26)$$

Уравнение для относительного движения (23) отличается от уравнения для центра масс (22) учетом межэлектронного взаимодействия. В соответствии с симметрией задачи волновая функция относительного движения может быть представлена в виде $\psi_r(\mathbf{r}) = f_m(r)\exp(im\theta)$, где $m = 0, \pm 1\ldots$; радиальная функция $f_m(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \left(E_r - \alpha_2 r^2 + \frac{1}{(r^2+d^2)^{1/2}} - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0. \qquad (27)$$

Разложим $f_m(r)$ по базису собственных функций задачи без кулоновского взаимодействия электронов $f_m = \Sigma_n C_{nm} f_{nm}$, где $f_{nm} = \left(\frac{n!}{(|m|+n)!}\alpha_2^{|m|+1}\right)^{1/2} r^{|m|} \times e^{-\sqrt{\alpha_2}r^2/2}L_n^{|m|}\left(\sqrt{\alpha_2}r^2\right)$. Методом численной диагонализации гамильтонианан на базисе этих функций мы найдем решение уравнения (27). Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\det\{V_{nn'}^m + \delta_{nn'}(\varepsilon_{nm} - E_r)\} = 0, \qquad (28)$$

где

$$\varepsilon_{nm} = 4\sqrt{\alpha_2}\left(n + \frac{|m| + 1}{2}\right); \qquad (29)$$

$$V_{nn'}^m = \left(\frac{n!n'!}{(n + |m|)!(n' + |m|)!}\right)^{1/2} \times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'}\frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\binom{n + |m|}{n - i}\binom{n' + |m|}{n - j} \times \alpha_2^{(|m|+i+j+1)/2}\Gamma(i+j+|m|+1)d^{2(i+j+|m|+1/2)} \times \Psi(i+j+|m|+1, i+j+|m|+3/2; \sqrt{\alpha_2}d^2). \qquad (30)$$

Зависимости нижних уровней энергии E_r от параметра α_2 приведены на рис. 7. Значения энергетических уровней монотонно возрастают с ростом α_2.

Когда α_2 достаточно велико (случай сильного удерживающего потенциала или большого межслоевого расстояния), межэлектронное взаимодействие мало в сравнении с другими параметрами и энергии относительного движения E_r асимптотически стремятся к уровням энергии (29) двумерного гармонического осциллятора, т. е. линейны по $\sqrt{\alpha_2}$. Это видно на рис. 7.

Зависимости низколежащих уровней энергии от межслоевого расстояния d приведены на рис. 8. Вклад кулоновского взаимодействия в энергию убывает с ростом d, и уровни энергии асимптотически стремятся к ε_{nm} (29).

Зависимости нижних уровней энергии относительного движения от магнитного поля представлены на рис. 9. Значения энергий возрастают с ростом поля, асимптотически стремясь к $2\sqrt{\alpha_2'}(2n+|m|+1)+\gamma\omega_c m$. В пределе сверхсильного магнитного поля уровни энергий асимптотически стремятся к уровням Ландау, как и

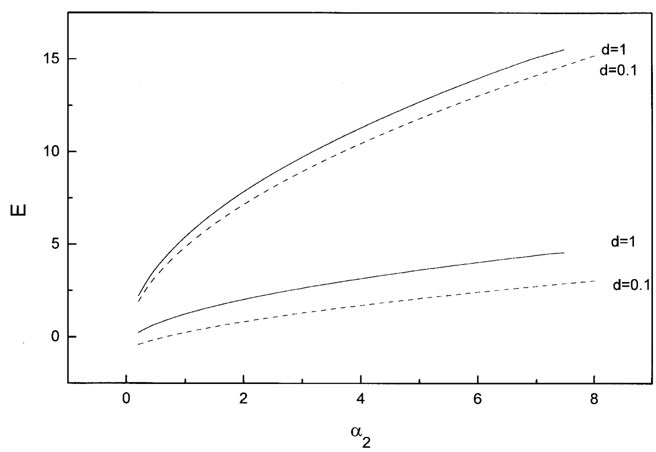

Рис. 7. Зависимости нижних уровней энергии E_r для пространственно разделенного экситона в связанных квантовых точках от параметра удерживающего потенциала α_2.

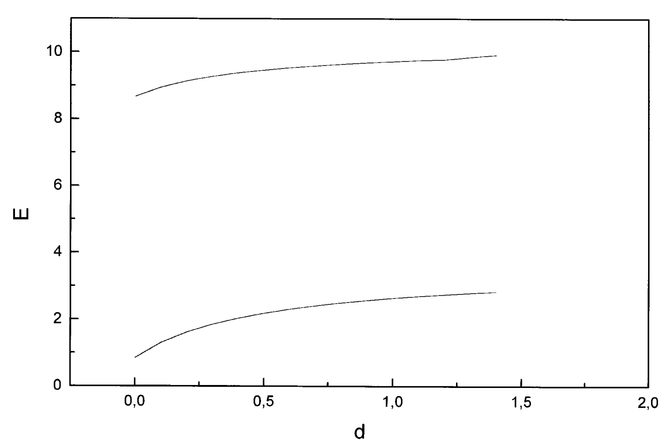

Рис. 8. Зависимости низколежащих уровней энергии от межслоевого расстояния d.

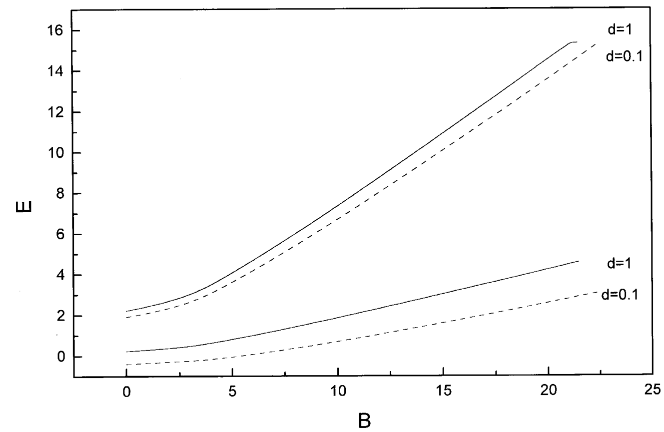

Рис. 9. Зависимости нижних уровней энергии относительного движения пространственно разделенного экситона в связанных квантовых точках от магнитного поля B при $\alpha_2 = 0.2$.

в случае отсутствия параболической зависимости для удерживающего потенциала (например, модели "жестких стенок") (см. [16,17,28]).

Для больших межслоевых расстояний d имеет место асимптотическая зависимость для значений энергии: $d \to \infty, E \sim 2\sqrt{\alpha_2'}(2n+|m|+1)+\gamma\omega_c m - 1/d + 1/\left(\sqrt{\alpha_2'}\right)$.

В случае малых d при $d \to 0$ матричный элемент

$$V^m_{nn'} \to -\left(\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m|)!}\sqrt{\alpha_2'}\right)^{1/2}$$

$$\times \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'}\frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\binom{n+|m|}{n-i}\binom{n'+|m|}{n'-j}$$

$$\times \Gamma\left(i+j+|m|+\frac{1}{2}\right).$$

Значение $d = 0$ отвечает случаю одной квантовой ямы с двумя носителями (см. [30]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, ИНТАС и программой "Физика твердотельных наноструктур".

Работа Н.Е. Капуткиной поддержана программой ISSEP для аспирантов.

Список литературы

[1] T. Fukuzawa, E.E. Mendez, J.M. Hong. Phys. Rev. Lett., **64**, 3066 (1990); J.A. Kash, M. Zachav, E.E. Mendez, J.M. Hong, T. Fukuzawa. Phys. Rev. Lett., **66**, 2247 (1991).
[2] U. Sivan, P.M. Solomon, H. Strikman. Phys. Rev. Lett., **68**, 1196 (1992).
[3] K. Brunner, G. Abstreiter, G. Böhm, G. Tränkle, G. Weiymann. Phys. Rev. Lett., **73**, 1138 (1994).
[4] A. Zrenner, L.B. Butov, M. Hang, G. Abstreiter, G. Böhm, G. Weiymann. Phys. Rev. Lett., **72**, 3382 (1994).

[5] L.B. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, G. Böhm, G. Weiymann. Phys. Rev. Lett., **73**, 304 (1994).
[6] L.B. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, A.V. Petinova, K. Eberl. Phys. Rev. B, **52**, 12 153 (1995).
[7] S.P. Cheng, S. Kono, B.D. McCombe, I. Lo. W.C. Mitcel, G.E. Stuts. Phys. Rev. Lett., **74**, 450 (1995).
[8] В.Д. Кулаковский, Л.В. Бутов. УФН, **165**, 229 (1995).
[9] M. Bayer, V.B. Timofeev, T. Gutbrod, A. Forchel, R. Steffen, S. Oshinno. Phys. Rev. B, **52**, R11 623 (1995).
[10] M. Bayer, A. Schmidt, A. Forchel, F. Faller, T.L. Reineeke, P.A. Knipp, A.A. Dremin, V.D. Kulakovskii. Phys. Rev. Lett., **74**, 3439 (1995).
[11] M. Bayer, V.B. Timofeev, F. Faller, T. Gutbrod, A. Forchel. Phys. Rev. B, **54**, 8799 (1996).
[12] А.И. Филин, В.Б. Тимофеев, С.И. Губарев, Д. Биркедаль, Дж.М. Хван. Письма в ЖЭТФ, **65**, 623 (1997).
[13] Е.С. Москаленко, А.Л. Жмодиков, В.В. Криволапчук, Д.А. Мазуренко, И.К. Полетаев, С.Т. Фоксон, Т.С. Чонг. *Полупроводники-97* (М., ФИАН, 1997) с. 246.
[14] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Письма в ЖЭТФ, **22**, 556 (1975).
[15] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. ЖЭТФ, **71**, 1167 (1976).
[16] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ, **80**, 1488 (1981); ЖЭТФ, **82**, 1188 (1982).
[17] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ, **78**, 1167 (1980).
[18] D.S. Chemla, J.B. Stark, W.H. Knox. In: *Ultrafast Phenomena* VIII, ed. by J.-L. Martin et al. (Springer 1993) p. 21.
[19] А.Б. Дзюбенко, Ю.Е. Лозовик. ФТТ, **25**, 1519 (1983); ФТТ, **26**, 51 540 (1983).
[20] A.B. Dzuybenko, Yu.E. Lozovik. J. Phys., **24**, 415 (1991).
[21] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман, В.Г. Цветус. Письма ЖЭТФ, **66**, 332 (1997).
[22] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман. ЖЭТФ, **111**, 1879 (1997).
[23] А.В. Ключник, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ, **76**, 670 (1979).
[24] Yu.E. Lozovik, A.V. Klyuchnik. J. Phys. C, **11**, L483 (1978).
[25] Yu.E. Lozovik, A.V. Poushnov. Phys. Lett. A, **194**, 105 (1994).
[26] Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский. ЖЭТФ, **112**, 1791 (1997).
[27] Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. ЖЭТФ, **53**, 717 (1967).
[28] Yu. Lozovik, A.M. Ruvinsky. Phys. Lett. A, **227**, 271 (1997).
[29] Г.С. Геворкян, Ю.Е. Лозовик. ФТТ, **27**, 1800 (1985).
[30] N.E. Kaputkina, Yu.E. Lozovik. (to be published).

Редактор В.В. Чалдышев

Spectrum of indirect magnetoexciton

N.E. Kaputkina, Yu.E. Lozovik*

Moskow Institute of Steel and Alloys,
117936 Moscow, Russia
* Institute of Spectroscopy,
Russian Academy of Sciences,
142092 Troitsk, Russia

E-mail: nataly@trf.misa.ac.ru
E-mail: lozovik@isan.msk.su