

Исследование нелинейной динамики переноса в компенсированном полупроводнике при низкотемпературном электрическом пробое путем компьютерного моделирования

© К.М. Джандиери, В.С. Качлишвили

Тбилисский государственный университет, Факультет физики,
380028 Тбилиси, Грузия

(Получена 12 мая 1996 г. Принята к печати 7 февраля 1998 г.)

Исследуется возможность хаотического поведения тока в частично компенсированном полупроводнике при низкотемпературном электрическом пробое путем компьютерного моделирования. Рассматривается влияние случайных флуктуаций параметров или же переменных математической модели, а также влияние каких-либо периодических наводок на плотность тока в полупроводнике. В результате получены различные картины хаотических колебаний тока, в том числе переход в хаотический режим через удвоение периода, характерное для сценария Фейгенбаума.

1. Хорошо известно, что нестабильность электронного переноса в полупроводниках проявляется в виде периодических, квазипериодических и хаотических колебаний тока. Исследования в этой области физики полупроводников особенно интенсивно развиваются за последние 15 лет. Эксперименты проводились на различных материалах: Si, InSb, GaAs, Ge (см. обзор [1]), CdS [2] и т. п. Для наблюдения хаотических колебаний в некоторых случаях понадобились дополнительные условия эксперимента, такие как включение магнитного поля, подсветка образца и др. Среди этих исследований особое место занимает исследование спонтанных осцилляций в области электрического пробоя, когда лавинообразное увеличение концентрации свободных носителей приводит к резкому изменению проводимости образца. При этом рассматривается как низкотемпературный, так и пробой зона-зона. Для этих случаев имеются теоретические работы, предсказывающие нелинейное, или, в частности, хаотическое поведение тока в полупроводниках (см., например, [3-5]).

В работе [6] мы исследовали вопрос о возникновении незатухающих колебаний тока в частично компенсированном, пространственно гомогенном полупроводнике при низкотемпературном электрическом пробое. На основе математической модели, включающей в себя уравнения, описывающие генерационно-рекомбинационные процессы, диэлектрическую релаксацию электрического поля и запаздывание электронной температуры относительно изменения электрического поля, было получено необходимое и достаточное условие возникновения незатухающих колебаний вследствие бифуркаций Хопфа. На основе анализа этого условия был получен критерий, из которого видно, какие именно механизмы рассеяния и какие значения параметров системы (таких как концентрация основной примеси, степень компенсации, время запаздывания электронной температуры, сопротивление нагрузки и т. д.) благоприятны для возникновения регулярных или даже хаотических колебаний в системе (для хаотичности наше условие необходимое, но не достаточное).

В настоящей работе, используя результаты работы [6], путем компьютерного моделирования исследуется возможность появления хаотического поведения системы в зависимости от ее параметров. При машинных расчетах применялся метод Рунге-Кутты для решения системы дифференциальных уравнений отмеченной выше математической модели:

$$\frac{dn}{dt} = -n^*a(z)x^2 + [b(z) - 2a(z)n^*]x + \frac{d}{n^*} + b(z) - a(z)n^*, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = BL \left[\frac{\zeta}{E^*} - 1 - y - \frac{e\mu(z)SR}{L} n^*(1+x)(1+y) \right], \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left[1 + z - \frac{\vartheta_0(y)}{\vartheta^*} \right], \quad (3)$$

где

$$x = \frac{n - n^*}{n^*}, \quad y = \frac{E - E^*}{E^*}, \quad z = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta^*}.$$

Здесь n является концентрацией свободных электронов, E — напряженность электрического поля вдоль образца, μ — подвижность свободных электронов $\mu = \mu_0\vartheta^{-1/2}$, где $\mu_0 \approx 8 \cdot 10^8 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; $\vartheta = T_e/T$, где T_e — электронная температура, T — температура решетки; ϑ_0 — стационарное значение ϑ . Согласно работам [4,6], возникновению незатухающих колебаний способствует насыщение дрейфовой скорости. Исходя из этого для ϑ_0 мы берем следующее выражение:

$$\vartheta_0(E) = \alpha E^2,$$

где $\alpha \approx 1.4 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{В}^2$ (при $\vartheta \sim E^2$, $\mu \sim E^{-1}$ и $v = \mu E = \text{const}$). Параметры n^* , E^* и ϑ^* являются равновесными значениями соответствующих величин; $a = A_I + B_T$, $b = -\gamma - B_T N_d c + A_I N_d (1 - c)$, $\gamma = j\sigma + A_T$, $d = \gamma N_d (1 - x)$, $j\sigma$ и A_T — темпы световой и тепловой генерации с донорных уровней, $c = N_A/N_d$ — степень компенсации образца; N_d и N_A — концентрация доноров и акцепторов соответственно; A_I

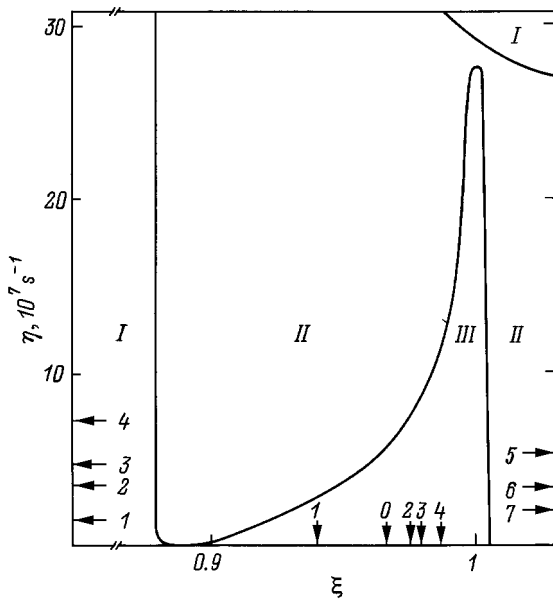


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма на плоскости (ξ, η) для следующих значений параметров системы: $c = 0.9$; $N_d = 10^{14} \text{ см}^{-3}$; $\tau = 4 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $\gamma = 10^3 \text{ с}^{-1}$. Пробивное значение электрического поля $E_B \approx 11.92 \text{ В/см}$. Стрелками с цифрами у оси абсцисс отмечены значения ξ_i , $0 \leq i \leq 4$; стрелками у осей ординат — значения η_i , $1 \leq i \leq 7$. Физический смысл ξ_i , η_i — см. в тексте.

и B_T — коэффициенты ударной ионизации и тепловой рекомбинации. Для коэффициентов ударной ионизации мы пользуемся результатами работы [7], где A_I вычислялось в приближении электронной температуры, используя сечение Дравина, а для коэффициента тепловой рекомбинации — результаты работы [8], где B_T вычислялось с помощью исправленной каскадной теории Лекса. С целью минимализации затрат машинного времени мы берем аппроксимированные выражения

$$A_I = C_1 \vartheta \exp(-C_2/\vartheta^2) \quad \text{и} \quad B_T = C_3/\vartheta^2.$$

где $C_1 \approx 3.4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}$, $C_2 \approx 250$, $C_3 \approx 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3/\text{с}$ (ориентируемся на $n\text{-Ge}$), которые хорошо описывают реальные зависимости в окрестности точки пробоя. Параметр $\zeta = \mathcal{E}/L$, где \mathcal{E} — эдс батареи постоянного тока, а L — длина образца вдоль тока; S — поперечное сечение образца; R — сопротивление нагрузки, включенной последовательно с образцом; $B = 4\pi/\varepsilon SR$, где ε — диэлектрическая проницаемость образца.

Компьютерное моделирование включало в себя два этапа: на первом этапе устанавливалась бифуркационная диаграмма (рис. 1). В роли бифуркационных параметров выступали $\xi = E^*/E_B$, где E_B — пробивное значение напряженности электрического поля, и величина $\eta = 4\pi L/\varepsilon SR$. На этой диаграмме выделяется участок точек седло-фокусного типа (участок III), который соответствует возникновению незатухающих колебаний. На втором этапе решалась система уравнений (1)–(3) и на основе полученных временных зависимостей $x(t)$,

$y(t)$ и $z(t)$ исследовалась временная эволюция поведения плотности тока.

На втором этапе рассматривается нелинейное поведение полупроводника при низких температурах в случае присутствия подсветки. Как было установлено нами в работе [6], включение подсветки значительно расширяет область незатухающих колебаний по электрическому полю. Значения небифуркационных параметров приведены на рис. 1, где область I соответствует точкам типа устойчивого узла, область II — точкам типа устойчивого фокуса (т.е. затухающим колебаниям в системе).

Бифуркационные параметры изменялись таким образом, чтобы величина ζ оставалась неизменной. Между параметрами η , E^* и ζ существует следующая зависимость:

$$\eta \sim \mu(\vartheta^*) n^* E^* / (\zeta - E^*).$$

В частности, их изменение связывалось с изменением сопротивления нагрузки при фиксированном значении внешней эдс. В таких условиях при постепенном увеличении ξ имела место следующая градация поведения системы: в начале (при значении $\xi = \xi_1 \approx 0.94$, см. рис. 1, которому для постоянного значения $\zeta = 86 \text{ В/см}$ соответствует $\eta = \eta_1 \approx 1.48 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$) в системе наблюдались периодические колебания тока (рис. 2, *a*). С увеличением ξ , при значении $\xi = \xi_2 \approx 0.975$ (соответственно $\eta = \eta_2 \approx 3.73 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$) происходило удвоение периода (рис. 2, *b*). С последующим увеличением ξ , при значении

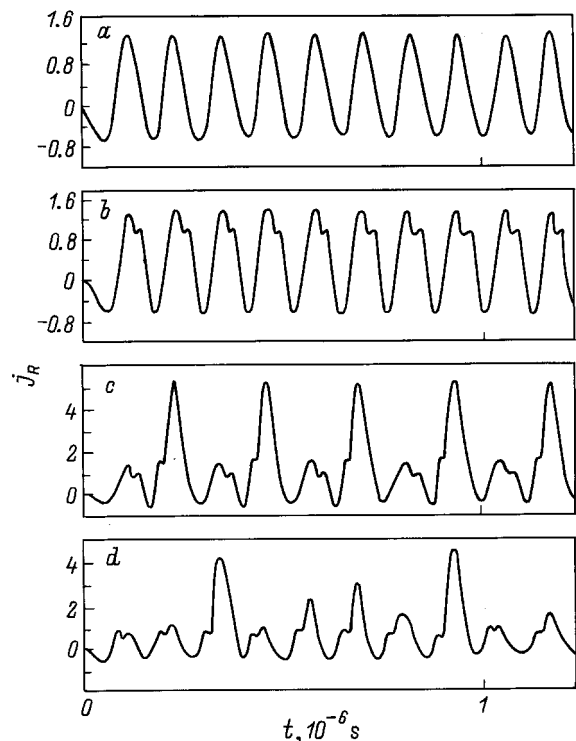


Рис. 2. Зависимости величины $j_R = (j - j^*)/j^*$ от времени t (j^* — равновесное значение плотности тока). Небифуркационные параметры те же, что и на рис. 1. Значения бифуркационных параметров приведены в тексте.

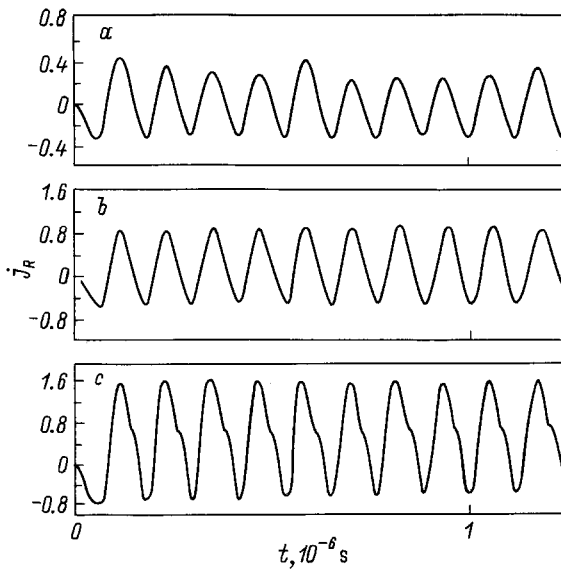


Рис. 3. Зависимости $j_R(t)$ в случае, когда на параметры R , ζ и γ наводилась 4%-я случайная флуктуация при следующих значениях бифуркационных параметров: $\xi = \xi_0 \approx 0.965$; $a - \eta = \eta_5 \approx 5.43 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$, $b - \eta = \eta_6 \approx 3.41 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$, $c - \eta = \eta_7 \approx 2.05 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$.

$\xi = \xi_3 \approx 0.978$ (соответственно $\eta = \eta_3 \approx 4.71 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$) наблюдалась картина, характерная для учетверения периода (рис. 2, *c*), и т.д. И наконец, при $\xi = \xi_4 \approx 0.987$ (соответственно $\eta = \eta_4 \approx 7.38 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$) имели место хаотические незатухающие колебания. Таким образом, получалась традиционная картина перехода в хаотический режим через удвоение периода, характерная для сценария Фейгенбаума. Обсуждаемые здесь значения ζ_i и η_i отмечены стрелками с номерами на рис. 1.

Далее мы исследовали влияние на динамику системы малых случайных изменений параметров системы или же самих переменных x , y и z на каждом шагу итерационных вычислений. Кроме того, с целью изучения влияния каких-либо периодических наводок к параметрам системы добавлялись периодические составляющие с малой амплитудой. Соответствующие результаты приведены на рис. 3–5.

(I). 4%-я случайная флуктуация наводилась на параметры R , ζ и γ . Результаты, полученные для этого случая (равно как и в двух последующих случаях), соответствуют изменению параметра η при фиксированном значении $\xi = \xi_0 \approx 0.965$ в рамках указанной на бифуркационной диаграмме области III. (Конечно, из-за флуктуации R флуктуирует и η . Однако из-за малости этой флуктуации рассмотренные нами значения η не перекрывают друг друга). Градация соответствующего временного поведения относительной величины плотности тока дается на рис. 3. В отличие от результатов, приведенных на рис. 2, хаотичность поведения системы носит тем более выраженный характер, чем ближе величина η к бифуркационному значению. При уменьшении η

возрастает амплитуда колебаний и одновременно хаотичность становится все менее заметной, а ниже значения $\eta = \eta_6 \approx 3.41 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ практически исчезает вовсе — наблюдаются регулярные колебания. С последующим уменьшением η , при значении $\eta = \eta_7 \approx 2.05 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$, наблюдается тенденция удвоения периода.

(II). Случайным 4%-м флуктуациям подвергались переменные x , y и z . Здесь хаотичность носит гораздо более выраженный характер (рис. 4). При тех значениях η , когда в предыдущем случае наблюдалось удвоение периода, здесь получаем четко выраженный хаос (рис. 4, *c*).

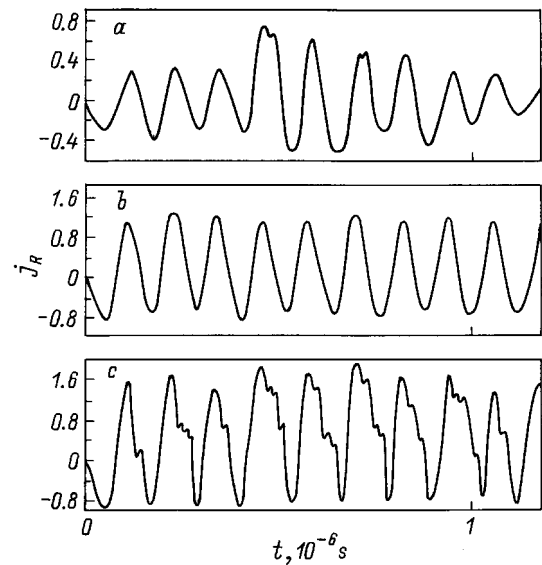


Рис. 4. Зависимости $j_R(t)$ в случае, когда случайным 4%-м флуктуациям подвергались переменные x , y , z . Значения параметров те же, что и на рис. 3.

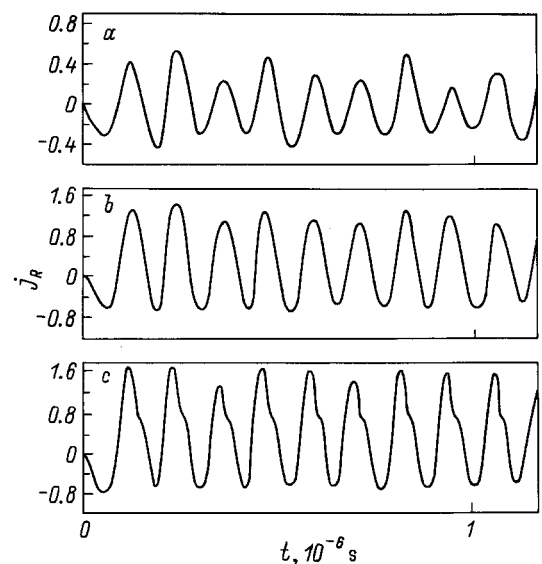


Рис. 5. Зависимости $j_R(t)$ для случая, когда к параметру ζ добавлялась синусоидальная составляющая, амплитуда которой составляла 4% от значения ζ . Значения параметров те же, что и на рис. 3.

(III). К параметру ζ добавлялась синусоидальная составляющая, амплитуда которой составляла 4% от значения ζ . Здесь тоже хаотичность носила тем более выраженный характер, чем ближе была величина η к бифуркационному значению. При уменьшении η возрастала амплитуда колебаний, и хаотичность становилась все менее заметной (рис. 5, *b*). С последующим уменьшением η наблюдалась тенденция удвоения периода (рис. 5, *c*). Надо отметить, что характер хаотичного поведения в значительной степени зависит от частоты периодической составляющей. Когда указанная частота совпадала с собственной частотой системы, наблюдалась картина, подобная биениям. Это обстоятельство может навести на мысль, что имеет место простое наложение регулярных колебаний, но в действительности это не так, поскольку на такой картине точное повторение значений амплитуд не имеет места.

Таким образом, для вышеприведенных случаев были получены различные картины возникновения хаотических колебаний в частично компенсированном полупроводнике при низкотемпературном электрическом пробое, в том числе и переход в хаотический режим через удвоения периода, характерный для сценария Фейгенбаума. На наш взгляд, этот последний случай вызывает особый интерес, поскольку он имел место только тогда, когда шаг итерационных вычислений не был меньше определенного значения $\Delta t_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ с.

Вычисления проводились для двух различных точностей представления чисел в ЭВМ (сохраняя соответственно 7 и 17 десятичных цифр). Изменение точности не привело к качественным изменениям в поведении системы, а численные изменения также были незначительными. Из этого следует, что изменение поведения системы вследствие уменьшения шага итерации связано не с точностью представления чисел в ЭВМ, а только с величиной шага. Несмотря на то что значение $\Delta t_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ с намного меньше характерных времен уравнений нашей математической модели, результаты вычисления, полученные при таком шаге, не соответствуют реальности (точнее, они не являются решением нашей системы дифференциальных уравнений), поскольку при уменьшении шага вдвое наблюдается качественно другая картина поведения системы, а дальнейшее уменьшение шага практически не изменяет указанную картину (т.е. можно считать, что результаты вычисления, полученные при шаге $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ с, соответствуют точному решению нашей математической модели). В связи с этим представляется интересным выяснить, каким образом и при каких обстоятельствах можно получить картину, аналогичную рис. 2 при шаге $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ с, т.е. соответствующую точному решению наших дифференциальных уравнений.

На рис. 6, *a* и *b* представлены фазовые портреты системы на плоскостях (x, z) и (x, y) , полученные для тех же значений параметров, что и на рис. 2, но при шаге итерации $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ с. На рис. 6, *c* дается наиболее интересный фрагмент фазового портрета на

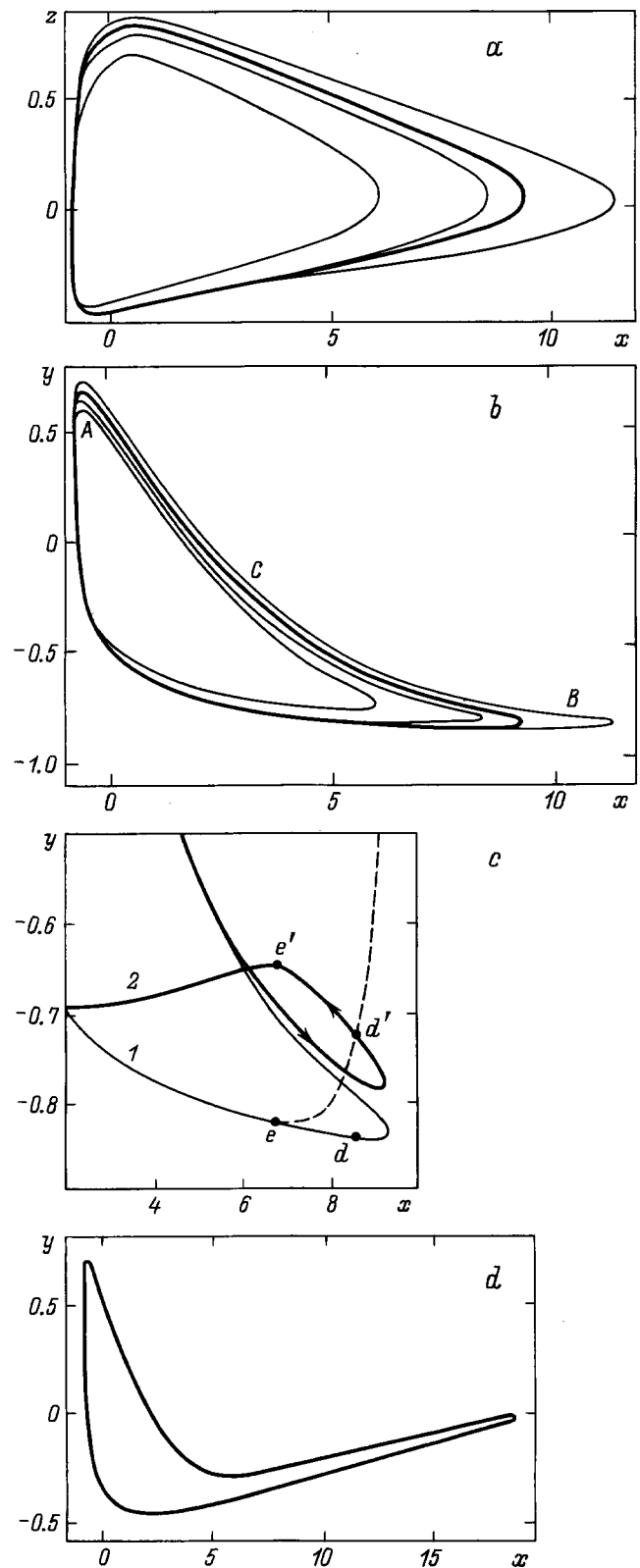


Рис. 6. Фазовые портреты на плоскостях (x, y) и (x, z) . На рис. *a* и *b* жирная кривая соответствует стационарной циклической траектории, а тонкие кривые — нестационарным, квазциклическим траекториям. (Остальные объяснения в тексте).

плоскости (x, y) , полученного при шаге $\Delta t_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ с (кривая 2). Его остальная часть качественно не отличается от рис. 6, *b*. (Для сравнения на рис. 6, *c* кривая 1 представляет проекцию стационарной траектории, соответствующей шагу Δt_1). Фазовые портреты на плоскости (x, z) , полученные при шагах Δt_0 и Δt_1 , практически не отличаются друг от друга на каждом участке фазовой траектории.

Как видно из рис. 6, фазовые траектории вытягиваются вдоль положительных значений x , т.е. колебания концентрации сильно ангармоничны (что вызвано стремительным ростом концентрации свободных носителей вблизи точки пробоя). В окрестности точки *A* (рис. 6, *b*) траектории расположены предельно близко друг к другу и небольшие отклонения переменных от их значений могут вызвать перескоки на соседнюю нестационарную квазициклическую траекторию. В результате, в зависимости от знака отклонений, происходит сильное смещение точки *B*, соответствующей максимуму x , вправо или влево и одновременное смещение соответственно вниз или вверх. Исходя из этого флуктуации и случайные внешние воздействия могут вызвать хаотические колебания концентрации свободных носителей и электрического поля с резко выраженными изменениями амплитуд. Это особенно заметно для колебаний концентрации (так, например, однократное 0.5%-е отклонение n от его значения в окрестности точки *A* изменяет амплитуду колебания на 3%, 1%-е — на 5%, 5%-е — на 25% и т.д.). Амплитуда колебаний ϑ практически не изменяется, а относительное изменение амплитуды колебания E того же порядка, что и изменение амплитуды колебания n , из-за малости значения самого E (в окрестности точки *B* значение u близко к -1).

В колебаниях плотности тока аналогичная картина не наблюдается. Это главным образом вызвано тем, что минимуму и максимуму колебания j_R на фазовом портрете соответствуют окрестности точек *A* и *C* (см. рис. 6, *b*), которые вследствие случайных отклонений значительных изменений не испытывают. Величина j_R заметно не изменяется и в окрестности точки *B*, поскольку, согласно вышесказанному, значение z не меняется, а изменение n частично компенсируется изменением E . Таким образом, в условиях данной задачи колебания плотности тока по сравнению с колебаниями n и E должны быть более устойчивыми к случайным внешним воздействиям и флуктуациям.

Обратимся теперь к рисунку 6, *c*, на котором изображена петлеобразная проекция фазовой траектории на плоскости (x, y) , полученной при шаге $\Delta t_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ с (кривая 2). Она связана с ошибками вычисления в окрестности точки *B* и, следовательно, не может соответствовать реальности, но такую траекторию можно получить и при точном решении (при шаге $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$) с помощью целенаправленного внешнего воздействия на систему, а точнее, целенаправленного изменения u . Сравнение кривых 1 и 2 наглядно демонстрирует вышесказанное. Действительно, фазовые траектории, которым

на плоскости (x, y) соответствуют кривые 1 и 2, в основном отличаются друг от друга значениями u (напомним, что проекции фазовых траекторий на плоскости (x, z) , полученных при шагах Δt_0 и Δt_1 , практически идентичны), причем это различие одного и того же знака (положительно). Кроме этого, если, например, в точке *d* значению u придать приращение, соответствующее переходу от точки *d* в точку *d'*, то на протяжении примерно двух шагов итерации $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ с фазовая точка, двигаясь по нестандартной траектории (штриховая кривая), вновь вернется на кривую 1 в точке *e* (соседней к точке *d*), которая характеризуется теми же значениями x и z , что и точка *e'* на кривой 2, являющаяся в свою очередь соседней к точке *d'*, т.е. полученной от *d'* вследствие одного шага итерации $\Delta t_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ с. Поэтому для перехода от точки *e* в точку *e'* достаточно придать приращение только значению u в точке *e* и т.д. Придавая соответствующие приращения к u на каждом шагу итерации в области, соответствующей образованию петли, можно получить фазовую траекторию, аналогичную траектории 2 при шаге итерации $\Delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ с. Физически этому соответствует сложное модулирование внешней эдс, но оказалось, что применение такой сложной модуляции не обязательно. Достаточно значению u придавать постоянные положительные отклонения, что равносильно добавлению к правой части уравнения у ступенчатой функции, которая в указанной области равна определенной постоянной величине ($\approx 3 \cdot 10^7$), а в остальной области равна 0. Физически этому соответствует добавление к внешней эдс прямоугольных импульсов, величина которых составляет примерно 10% от значения эдс. В таких условиях малые случайные отклонения способны вызвать хаотические колебания величины j_R , аналогичные колебаниям, представленным на рис. 2.

Хаотические колебания j_R с еще более сильно выраженным изменением амплитуды вследствие флуктуации можно получить с помощью такого воздействия на систему, которое обеспечило бы перемещение точки максимума j_R в окрестности точки *B* и одновременное движение этих точек по направлению положительных значений u как можно близко к 0. Расчеты показали, что для этого достаточно прибавить к правой части уравнения релаксации u слагаемого, пропорционального $(x + 1)^2 / (y + 1)$. Соответствующая картина фазового портрета дается на рис. 6, *d* для значения коэффициента пропорциональности порядка $2.5 \cdot 10^6$. Физически это можно осуществить, если при положительных значениях j_R к внешней эдс добавить колоколообразный импульс, высота которого в 3–4 раза больше значения эдс, а ширина приблизительно равна половине периода колебаний ($5 \cdot 10^{-8}$ с). Более того, заменяя колоколообразный импульс соответствующим треугольным импульсом, получаем качественно аналогичную картину фазового портрета, т.е. аналогичную картину хаотических колебаний в полупроводнике.

Список литературы

- [1] R.P. Huebener, J. Parisi, J. Feinke. Appl. Phys. A, **48**, 107 (1989).
- [2] L.L. Golik, M.M. Gutman, V.E. Paskeev. Phys. St. Sol. (b), **162**, 199 (1990).
- [3] E.Echoll. Appl. Phys., **48**, 95 (1989).
- [4] Э.С. Качлишвили, И.Д. Кезерашвили. ФТП, **24**, 1106 (1990).
- [5] В.В. Владимиров, В.Н. Горшков. ФТП, **14**, 417 (1980); В.В. Владимиров, П.М. Головинский, В.Н. Горшков. ФТП, **15**, 40 (1981); В.В. Владимиров, В.Н. Горшков, В.К. Малютенко. ФТП, **26**, 1580 (1992).
- [6] К.М. Jandieri, Z.S. Kachlishvili. Bull. Georgian Acad. Sci., **154** (1), 61 (1996); **154** (2), 208 (1996).
- [7] Z.S. Kachlishvili. Phys. St. Sol. (b), **48**, 65 (1971).
- [8] Т.О. Гегечкори, В.Г. Джакели. Сообщ. АН ГССР, **3**, 565 (1981).

Редактор Т.А. Полянская

Investigation of nonlinear behaviour of compensated semiconductor at low-temperature electric breakdown on the basis of computer modeling

K.M. Jandieri, Z.S. Kachlishvili

Tbilisi State University
380028 Tbilisi, Georgia

Abstract The possibility of a disorderly behaviour of partially compensated n -Ge at low-temperature electric breakdown is investigated on the basis of computer modeling. The influence of random fluctuations of system parameters, and the variables of our mathematical model alongside with some periodic disturbances that may affect the behaviour of semiconductor are considered. In this way different pictures of random oscillations are obtained, including the transition into a disorderly state via the period doubling, which is characteristic of Feigenbaum scenario.