

Сверхсвечение поляритонов в ограниченных одномерных кристаллах с увеличивающейся длиной: переход от димера к бесконечному кристаллу

© О.А. Дубовский

Физико-энергетический институт Российской академии наук,
249020 Обнинск, Калужская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 18 мая 1998 г.)

Получены решения дисперсионных уравнений для поляритонных состояний в ограниченных одномерных кристаллах произвольной длины. Прослежены возникновение и эволюция радиационных и нерадиационных поляритонных ветвей при изменении длины от двух мономеров до предельных длин, при которых спектр уже существенно не меняется. Найдены зависимости частот и радиационных ширин от волнового вектора поляритона при различных ориентациях дипольного момента квантового перехода. Прослежено развитие эффекта "superradiance" при увеличении длины кристалла. Отмечены некоторые ранее неизвестные существенные особенности поляритонного спектра, в частности затухание традиционно называемой нерадиационной ветви вследствие торцевого излучения.

Излучение спектра поляритонов (смешанных состояний экситон Френкеля + фотон) в одномерных и двумерных кристаллах впервые проводились в теоретических работах [1–3]. При этом был предсказан эффект сильного радиационного затухания поляритонных состояний. Этот эффект был впоследствии действительно обнаружен экспериментально в двумерных кристаллах [4,5] и в настоящее время известен как эффект "superradiance" [6,7]. Отметим, что для двумерных кристаллов при развитии теории [1–3] не было остroжненных принципиального характера. Однако для поляритонов в одномерных кристаллах оставался открытым один вопрос. Сложное, существенно нелинейное дисперсионное уравнение для комплексных частот и волновых векторов поляритонов включает соответствующий интеграл по волновым векторам фотонов, который для двумерных кристаллов сходится, однако для одномерных кристаллов в области больших волновых векторов фотонов логарифмически расходится. В [1–3] с определенным обоснованием производилось обрезание этого интеграла на волновых векторах, отвечающих границе зоны Бриллюэна. Между тем отмеченная расходимость при больших волновых векторах фотонов связана с взаимодействием диполей и электрического поля на близких расстояниях, самодействием дипольных осцилляторов, взаимодействующих с собственным электрическим полем. Это самодействие ранее в явном виде не выделялось, все вычисления [1–3] велись в волновом Фурье-представлении для одномерных кристаллов бесконечной длины, расчет соответствующих диполь-дипольных сумм был затруднителен.

В настоящее время проводятся теоретические и экспериментальные исследования поляритонных спектров в низкоразмерных ограниченных кристаллах типа J -агрегатов, сверхрешеток, полимерных цепочек и т.д. [6–9]. Поляритонный спектр кристаллической пластины конечной толщины с произвольным числом мономолекулярных кристаллических плоскостей изучался

в [8–10]. В [10] была прослежена вся эволюция поляритонного спектра при увеличении толщины пластины от одной двумерной плоскости до трехмерного кристалла.

Современные средства вычислительной техники дают отсутствовавшую ранее возможность прямого вычисления соответствующих диполь-дипольных сумм, Фурье-образы которых входят в сложное нелинейное дисперсионное уравнение, и эти же средства дают возможность прямого решения дисперсионного уравнения с помощью соответствующего программного обеспечения. Это позволяет провести логическое продолжение [10], и проследить эволюцию поляритонного спектра уже в одномерной системе от отдельного мономера к димеру, далее к цепочке ограниченной длины и как предел к бесконечному одномерному кристаллу.

В настоящей работе найден спектр поляритонов в одномерных кристаллах конечной длины при учете самодействия дипольных осцилляторов, кулоновского взаимодействия их в неволновой зоне, взаимодействия в пограничной зоне и запаздывающего взаимодействия в волновой зоне. Расчеты проводились для цепочек с возрастающим числом N мономеров в кристалле при максимальном $N = 70$. Эти расчеты подтвердили, вопервых, как и следовало ожидать, существование обнаруженного ранее эффекта "superradiance", позволив вместе с тем проследить его возникновение и развитие. При увеличении N радиационное уширение поляритонных термов с максимальным затуханием первоначально возрастает как N_γ , где γ — полуширина линии излучения изолированного мономера, а затем выходит на асимптотику $\sim \gamma\pi c/\omega_0 a$, где ω_0 — частота собственных колебаний в изолированном мономере, a — постоянная кристалла. Поскольку $\omega_0 a/c \ll 1$, уширение существенно превышает γ , а для двумерных кристаллов уширение $\sim (c/\omega_0 a)^2$, т.е. еще больше, что и является эффектом "superradiance".

В то же время расчеты выявили обстоятельства, на которые ранее не обращалось внимание. Ранее расчеты

спектров поляритонов с использованием различных приближений, например, в изотропных трехмерных кристаллах, типа среднего и эффективного поля, давали широкий разрывный диапазон частот поляритонных поперечных волн $0 < \omega < \omega_t$, $\omega_l < \omega$, где $\omega_t, \omega_l (\omega_t < \omega_l)$ — полюса и нули функции $\varepsilon(\omega)$ диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = (\omega^2 - \omega_t^2)/(\omega^2 - \omega_l^2)$, определяющей дисперсионную зависимость волнового вектора k от частоты $k^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2$ [11]. При этом спектр поляритонов имеет две ветви, и каждому волновому вектору отвечают две частоты. Проведенные в данной работе расчеты показали, что в одномерных кристаллах с фиксированным направлением дипольного момента перехода каждому волновому вектору отвечает одна частота либо радиационной ($\omega > kc$), либо нерадиационной ($\omega < kc$) ветви. В одномерных кристаллах с близким к ортогональному наклону дипольного момента к кристаллической оси частоты поляритонов, и радиационных, и нерадиационных, сосредоточены в неразрывной, сплошной полосе $\omega_0 - |w| < \omega < \omega_0 + |w|$, где w определяется характерной энергией кулоновского диполь-дипольного взаимодействия $\hbar w$. При увеличении $N = 2, 3, 4 \dots$ из двух поляритонных термов с различным затуханием при $N = 2$ (димер) в этой ограниченной неразрывной полосе развиваются стыкующиеся системы с возрастающим числом N упорядоченных по k термов в радиационной ($\omega > kc$, "superradiance") и традиционно называемой нерадиационной ($\omega < kc$) областях, имеющих различную зависимость затухания от k . При уменьшении угла наклона диполей к оси происходит изменение знаков эффективных масс при малых волновых векторах и на границе зоны Бриллюэна. При больших углах первая отрицательная, вторая положительная, при малых углах — наоборот. В одномерных кристаллах с близким к нулевому наклону с увеличением $N = 2, 3, 4 \dots$ от $N = 2$ два терма также эволюционируют в систему N упорядоченных по k термов с выделением стыкующихся на световой оси радиационной и нерадиационной ветвей. Однако частота и затухание радиационной ветви при малых k резко уменьшаются с уменьшением наклона, частота выходит из указанной выше полосы и стремится к области нулевых частот. При максимальном по вычислительным возможностям $N = 70$ для нулевого наклона наблюдалась только нерадиационная ветвь, и вопрос о существовании радиационной ветви при нулевом наклоне остается открытым.

Отметим одно важное обстоятельство. Во всех расчетах, начиная от малых $N = 2$ и до максимальных N , не наблюдалось двух термов радиационной и нерадиационной ветвей с разными частотами и совпадающими или достаточно близкими волновыми векторами, т.е. не наблюдалось прохождение радиационной ветви над нерадиационной, как это полагалось ранее. Каждому волновому вектору соответствовала одна частота либо радиационной, либо нерадиационной ветви. Аналогичная ситуация при определенной фиксации дипольного момента отмечалась для двумерного кристалла [10]. В

трехмерных же изотропных кристаллах с двумя стандартного вида, одна над другой, поляритонными ветвями при каждом k реализуются, по-видимому, аналогичные отмеченные выше для одномерного кристалла соответствующие ситуации с ортогональным и нулевым наклоном, поскольку трижды вырожденный дипольный переход имеет "все направления" дипольного момента. В одномерных кристаллах такая же ситуация может наблюдаться только в том случае, когда возбужденное состояние дважды вырождено, и дипольный момент имеет две возможных ориентации. Отметим, что расчеты показали наличие конечного радиационного затухания $\sim \gamma/2$ у традиционно называемой нерадиационной ветви в области фазовой плоскости $\omega < kc$. Это связано с отсутствующей у модельного бесконечного кристалла возможностью торцевого излучения в соответствующие полусферы у ограниченного одномерного кристалла. Отметим, что в середине зоны Бриллюэна это затухание имеет явный минимум. Следует также отметить, что установление точного вида поляритонных дисперсионных кривых имеет важное значение при изучении взаимодействия поляритонов с фононами, кинетики переноса энергии электронного возбуждения [11].

Классические уравнения движения с частотой ω системы дипольных осцилляторов в узлах n с зарядом e , смещением \mathbf{r}_n и массой легкой частицы μ имеют вид [12]

$$(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma_0\omega_0)p_n^i = \frac{e^2}{2\pi^2\mu} \int dq \frac{q^i q^j - (\omega^2/c^2)\delta_{ij}}{q^2 - (\omega^2/c^2) - i\epsilon} \times \sum_{m \neq n} p_m^j \exp[iq^1(n-m)];$$

$$i, j = 1, 2, 3; \quad \epsilon \rightarrow +0. \quad \mathbf{p}_n = e\mathbf{r}_n. \quad (1)$$

В (1) $\gamma_0 = e^2\omega_0^2/3\mu c^3$ — собственная радиационная полуширина, указание направления обхода полюсов $\epsilon \rightarrow +0$ выделяет запаздывающее взаимодействие, q^1 — компонента вектора $\mathbf{q}(q_1, q^2, q^3)$ вдоль оси кристалла. Величина γ_0 определяется мнимой частью классической функции Грина $(k^2 - (\omega^2/c^2) - i\epsilon)^2$, входящей в правую часть (1). Эта конечная мнимая часть члена самодействия ($n = m$) дает собственное радиационное затухание, расходящаяся же действительная часть ("ультрафиолетовая катастрофа" включена в полевую массу. Проведя интегрирование по \mathbf{q} в (1), можно получить стандартные соотношения для энергии взаимодействия диполей с выделением членов, определяющих мгновенное кулоновское взаимодействие на близких расстояниях, взаимодействие в промежуточной зоне и запаздывающее взаимодействие в волновой зоне. Для изотропного трехмерного кристалла из (1) с использованием стандартного представления δ -функций легко получается приведенное выше дисперсионное уравнение для поперечных волн.

В рамках квантовой теории излучения для определения поляритонного спектра необходимо провести диагонализацию соответствующего квадратичного гамильтониана системы экситоны Френкеля + поперечные фотоны [2], причем для экситонов в узельном представлении.

Трансляционное движение экситонов и их взаимодействие с поперечными фотонами определяется матричным элементом P оператора дипольного момента соответствующего квантового перехода из основного $|0\rangle$ в возбужденное с энергией $\hbar\omega_0$ состояния $|f\rangle$ изолированного мономера $P = |\langle f|er|0\rangle| = e(\hbar/2\mu\omega_0)^{1/2}$. Не приводящаяся вследствие громоздкости процедура диагонализации квадратичного гамильтониана [2] приводит после интегрирования по волновым векторам фотонов с отвечающим запаздыванию обходом полюсов к следующей, соответствующей (1), системе секулярных уравнений для энергии $\hbar\omega$ и волновой функции ψ_n поляритонов в одномерном ограниченном кристалле из N мономеров ($n = 1, 2, 3, \dots, N$):

$$(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0)\psi_n = \frac{2\omega_0|P|^2}{\hbar a^3} \times \sum_{m \neq n} \left[\left(\frac{1}{|n-m|^3} - \frac{i\omega a/c}{|n-m|^2} \right) (1 - 3\cos^2\theta) - \frac{(\omega a/c)^2}{|n-m|} (1 - \cos^2\theta) \right] \exp\left[i\frac{\omega a}{c}|n-m|\right] \psi_m, \quad (2)$$

где θ — угол наклона диполя к оси кристалла, полуширина $\gamma = 2|P|^2\omega_0^3/3\hbar c^3$. В правой части (2) первый член ($|n-m|^{-3}$) представляет мгновенное диполь-дипольное кулоновское взаимодействие на близких расстояниях в неволновой зоне, второй член ($|n-m|^{-2}$) учитывает взаимодействие в пограничной зоне, третий член ($|n-m|^{-1}$) — запаздывающее взаимодействие в волновой зоне.

Собственные ортонормированные функции в системе N узлов имеют вид

$$\psi_n(k_j) = \left(\frac{2}{N+1} \right)^{1/2} \sin(k_j n); \quad k_j = \frac{\pi j}{N+1}; \quad j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2), последующее умножение на $\psi_n(k_j)$ и суммирование по n приводят к следующему дисперсионному уравнению:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0) = \frac{4\omega_0|P|^2}{\hbar a^3(N+1)} \times \sum_{n \neq m} \left[\left(\frac{1}{|n-m|^3} - \frac{i\omega a/c}{|n-m|^2} \right) \times (1 - 3\cos^3\theta) - \frac{(\omega a/c)^2}{|n-m|} (1 - \cos^2\theta) \right] \times \exp\left(i\frac{\omega a}{c}|n-m|\right) \sin(k_j n) \sin(k_j m). \quad (4)$$

Частота ω входит в дисперсионное уравнение (4) весьма сложным образом, и точные комплексные затухающие решения $\omega = \omega_j = \omega'_j - i\omega''_j$ с действительной

ω'_j и мнимой ω''_j частями при всех, в том числе больших, N оказалось возможным определить из двух связанных уравнений для действительной и мнимой части (4) лишь при использовании мощного РС Pentium с соответствующим программным обеспечением. Отметим, что в сложном уравнении (4) аналитически вычисляются лишь бесконечные по n суммы величин $\sin(kn)/n$, $\cos(kn)/n^2$, $\sin(kn)/n^3$, частично входящие в (4) и только при $N \rightarrow \infty$ [13]. Из сумм величин $\cos(kn)/n$, $\sin(kn)/n^2$, $\cos(kn)/n^3$, также входящие в (4), только первая вычисляется аналитически, вторая является уже не табулированной функцией Лобачевского, а третья вообще не имеет аналитического представления [13]. Поэтому и многократные суммирование в (4), включенные еще и в программную процедуру решения нелинейного относительно ω уравнения, возможны в настоящее время только численно.

Для реальных оптических материалов параметр $\omega_0 a/c$ очень мал и составляет величины $\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ [2]. Поэтому наиболее интересные особенности поляритонных ветвей наблюдаются при волновых векторах $k_0 \sim \omega_0/c \sim 10^{-3} - 10^{-4}/a$, гораздо меньших границы зоны Бриллюэна π/a . Для проявления поведения радиационной ветви [1] необходимо, чтобы в область $0 < k_j < k_0$ попало хотя бы два поляритонных терма из N эквидистантно по k расположенных термов. Из этого условия $\pi/(N_c+1) = \omega_0 a/c$ определяется критическое $N_c \sim 3 \cdot 10^3$. При таком большом N время расчетов сильно возрастает и на имеющемся РС нереально. Однако такие расчеты и не нужны, поскольку все особенности поляритонного спектра отчетливо прослеживаются для кристаллов с меньшим N . В реальном режиме времени на имеющемся РС Pentium возможны расчеты с $N_r \leq 10^2$. При этом, очевидно, для адекватности представления о поляритонном спектре необходимо и большее значение базового параметра $\omega_0 a/c \sim \pi/N_r \sim 0.03$. С целью изучения поведения радиационной ветви хотя бы по 5–10 термам для расчетов спектров поляритонов при увеличении N от $N = 2$ до N_r в дальнейшем расчеты проводились для значения $\omega_0 a/c = 0.3$. Величина дипольного момента перехода $|P|$, определяющего взаимодействие экситонов и фотонов, выбрана из близкого к экспериментальному отношения ширины и энергии экситонной зоны $|P|^2/\hbar\omega_0 a^3 = 0.1$.

На рис. 1 в фазовой плоскости ω, k представлена эволюция с ростом N поляритонного спектра кристаллов с близким к ортогональному наклону дипольного момента к оси кристалла $\theta = \pi/3$. На рис. 1, а представлен спектр поляритонов для $N = 2$. Видны два терма: оба в нерадиационной области правее световой оси $\omega = kc$ (штриховая линия). Термы ω_j по аналогии с представлением экспериментальных данных изображены вертикальными отрезками при абсциссе $k_j a$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N$), центрированными на $\omega'_j a/c$ с длиной отрезка равной $(\omega''_j a/c)^{1/2}$. Корневое представление затухания использовано для того, чтобы различающиеся на порядки частоты

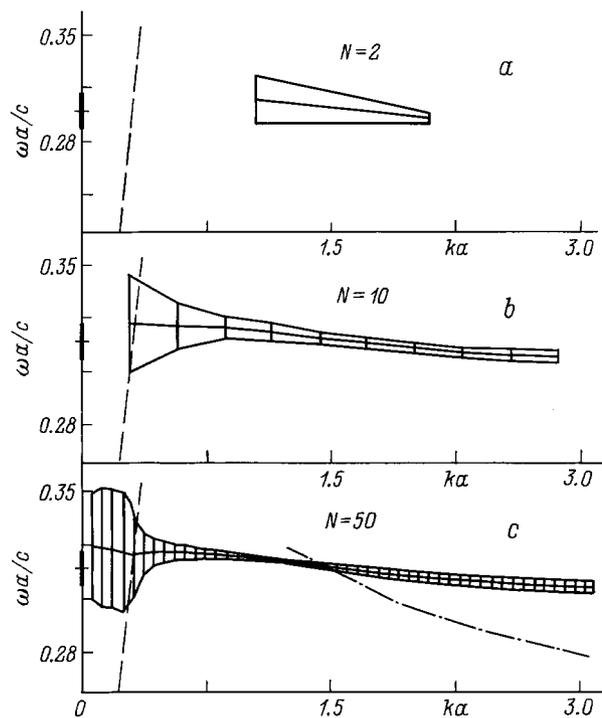


Рис. 1. Эволюция дисперсионной зависимости и затухания поляритонов при увеличении длины кристалла. Наклон диполей к оси кристалла $\theta = \pi/3$.

ты и затухания радиационных и нерадиационных термов имели примерно равное визуальное восприятие. Соответствующие кривые проведены по концам отрезков, представляющих термы, а проведенная по серединам отрезков кривая представляет соответствующую дисперсионную зависимость. На рис. 1, *a* уширение терма $j = 1$ почти в 2 раза превышает уширение γ терма изолированного осциллятора, представленного жирным отрезком на оси ординат, а уширение терма $j = 2$ существенно меньше γ . При увеличении N число термов увеличивается и крайне левые из них смещаются в радиационную область к малым k , а правые — к границе зоны Бриллюэна. При $N = 10$ (рис. 1, *b*) один первый терм $j = 1$ с максимальным затуханием уже находится в радиационной области. Отметим, что этот терм подходит к $k = 0$ при увеличении N , а не находится там, как это полагалось ранее в некоторых работах. Отметим также, что затухание термов $j = 2, 3 \dots 10$ в нерадиационной области остается примерно таким же, как и для $j = 2$ при $N = 2$. При больших $N \cong 50$ (рис. 1, *c*), когда дальнейшее увеличение N уже не изменяет существенно результаты, поляритонные термы в виде отрезков представлены только в наиболее интересной радиационной области, а для гладкой нерадиационной ветви такое представление использовано лишь для восьми реперных точек. Отметим, что вид зависимости $\omega'_j(k_j)$ отвечает отрицательной эффективной массе при $k \sim 0$ и положительной при $k \sim \pi/a$, что соответствует тому,

что для данного наклона уже, например, в приближении взаимодействия ближайших соседей энергия V кулоновского диполь-дипольного взаимодействия положительна, и экситонная зона $E(k) = E_0 + 2V \cos(ka)$ имеет вид типа представленного на рис. 1, *c*. Видно, что в радиационной области затухание при увеличении k возрастает и достигает максимума ("superradiance") при приближении к световой оси, а частота падает, как это и было показано в [1-3]. При переходе световой оси затухание падает, $\omega'_j(k_j)$ имеет излом и переходит в нерадиационную ветвь с малым затуханием. Отметим, что затухание нерадиационной ветви имеет явный минимум в середине зоны Бриллюэна, а на ее границе затухание $\sim \gamma/2$. Само существование затухания у традиционно называемой нерадиационной ветви, очевидно, связано с тем, что для конечного кристалла, каким бы длинным он ни был, имеется возможность торцевого излучения. Для демонстрации характера изменения поляритонного спектра при изменении θ штрихпунктирной кривой на рис. 1, *c* представлена концевая часть нерадиационной ветви для кристаллов с $\theta = \pi/2$. Для избежания громоздкости изображения для такого кристалла не представлены затухание, вид радиационной ветви, имеющие те же особенности, что и представленные детально на рис. 1, *c* для $\theta = \pi/3$. Видно, что при уменьшении θ радиационная ветвь смещается в область низких частот, а нерадиационная — в область высоких частот. При этом максимальное затухание в радиационной области, имеющее при $\theta = \pi/2$ величину $\omega'' = 1.24\gamma\pi c/\omega_0 a$,

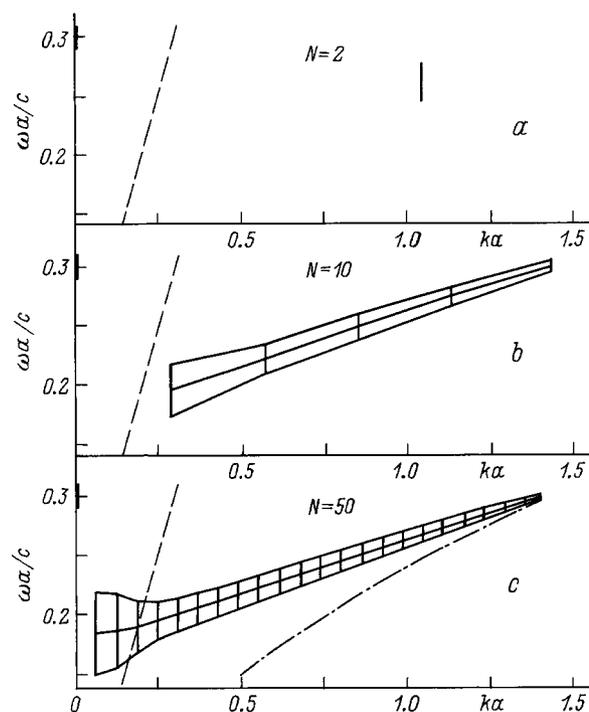


Рис. 2. Эволюция дисперсионной зависимости и затухания поляритонов при увеличении длины кристалла. Наклон диполей к оси кристалла $\theta = \pi/6$.

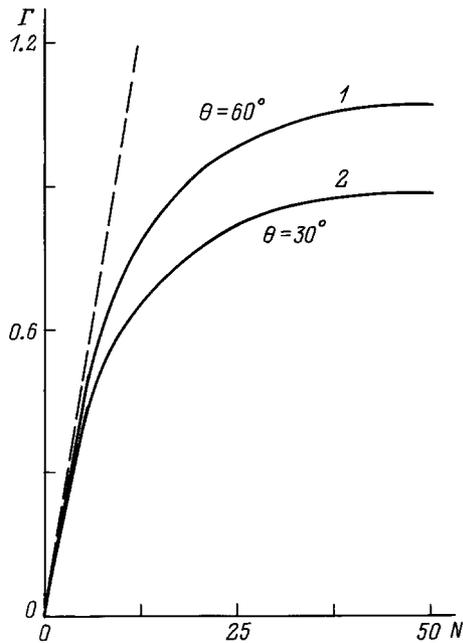


Рис. 3. Зависимость максимальных радиационных уширений поляритонных термов от длины одномерного кристалла при наклоне диполей к оси кристалла $\theta = \pi/3$ (1) и $\pi/6$ (2).

уменьшается до $\omega'' = 1.06\gamma\pi c/\omega_0 a$ при $\theta = \pi/3$ (рис. 1, *c*) и далее падает при уменьшении θ .

На рис. 2 эволюция поляритонного спектра с ростом N представлена для кристаллов с близким к нулевому наклону диполей к оси $\theta = \pi/6$. В этом случае энергия V кулоновского диполь-дипольного взаимодействия является отрицательной величиной, $E(k) = E_0 - 2|V|\cos(ka)$, и знаки эффективных масс при $k = 0$ и $k = \pi/a$ инвертируются по сравнению с рис. 1. Поскольку наиболее интересные изменения поляритонного спектра с ростом N происходят в области малых k , на рис. 2 представлена половина зоны Бриллюэна. На рис. 2, *a* для $N = 2$ виден один терм с наибольшим затуханием (второй с $k \leq \pi/a$ в глубине зоны). При $N = 10$ (рис. 2, *b*) число термов возрастает, но они еще остаются в нерадиационной области. Затухание падает при удалении от световой оси. На рис. 2, *c* представлен спектр поляритонов с $N = 50$, когда спектр уже существенно не изменяется. Видно, что в низкочастотной области у радиационной ветви затухание велико и составляет в максимуме при $j = 1$ величину $\omega'' = 0.9\gamma\pi c/\omega_0 a$, а затем резко убывает в глубину зоны при переходе через световую ось. Для определения направления изменения вида поляритонной ветви при изменении θ на рис. 2, *c* штрихпунктирной кривой приведена зависимость $\omega'(k)$ в глубине зоны при $\theta = 0$. Для этого предельного угла при отдельном длительном счете для предельно большого $N = 70$ был проведен расчет нескольких первых термов вблизи $k = 0$. Первый терм $j = 1$ имеет очень низкую частоту $\omega'_1 = 0.006c/a$ и малый волновой вектор $k_1 = 0.04/a$, т.е. этот терм, как и все остальные,

находится в нерадиационной области ($\omega'_1 < k_1 c$), и вся дисперсионная кривая $\omega_j(k_j)$ находится под световой осью, имея вид тот же, что и стандартная низкочастотная поляритонная ветвь изотропного трехмерного кристалла.

На рис. 3 представлена зависимость затухания ω''_{\max} терма с максимальным затуханием от N . Кривая 1 преследует зависимость от N величины $\Gamma = \omega''_{\max}(\omega_0 a/c\pi\gamma)$ для $\theta = \pi/3$, кривая 2 — для $\theta = \pi/6$. Видно, что при малых N затухание изменяется по закону $\omega'' \sim N\gamma$ (штриховая асимптотика). При дальнейшем увеличении N кривые 1, 2 выходят на постоянные значения $\Gamma = 1.24$ и 0.8 , что, собственно, и определяет эффект "superradiance". Отметим дополнительно, что на рис. 1, 2 затухание представлено в корневой зависимости, и затухание термов в нерадиационной области существенно меньше предельных Γ , но тем не менее конечно.

В заключение автор выражает искреннюю признательность В.М. Аграновичу за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российской государственной научно-технической программы "Актуальные направления в физике конденсированных сред". Автор благодарит за частичную поддержку по гранту Фольксваген-фонда 1/69928.

Список литературы

- [1] В.М. Агранович, О.А. Дубовский. Письма в ЖЭТФ **3**, 2, 345 (1966).
- [2] В.М. Агранович. Теория экситонов. Наука, М. (1969). 254 с.
- [3] О.А. Дубовский. ФТТ **12**, 8, 2348 (1970).
- [4] Я. Аавиксоо, Я. Липмаа, Т. Рейнот. Опт. и спектр. **62**, 5, 419 (1987).
- [5] B. Deveaud, F. Clerot, N. Roy, K. Satzke, B. Sermage, D.S. Katzer. Phys. Rev. Lett. **67**, 6, 2355 (1987).
- [6] V.M. Agranovich, S. Mukamel. Phys. Lett. **147**, 1, 155 (1990).
- [7] V.M. Agranovich. 13th General Conf. of the Condensed Matter Division European Physical Society. Regensburg (1993).
- [8] J. Knoester. Phys. Rev. Lett. **68**, 3, 654 (1992).
- [9] L.C. Andreani. Phys. Stat. Sol. (b) **188**, 1, 29 (1995).
- [10] V.M. Agranovich, O.A. Dubovsky, D. Basko. J. Chem. Phys. **106**, 10, 3896 (1997).
- [11] В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Наука, М. (1979). 432 с.
- [12] Ч. Музикарж. ЖЭТФ **41**, 4, 1168 (1961).
- [13] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Госиздат, М. (1963). 1097 с.