Нелинейные взаимодействия звуковых волн в ферромагнетиках вблизи магнитоакустического резонанса. Эффективные модули упругости

© И.Ф. Мирсаев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219 Екатеринбург, Россия

E-mail: pressure@ifm.e-burg.su

(Поступила в Редакцию 21 апреля 1998 г.)

Найден магнитоупругий вклад $\Delta\hat{C}_{(3)}$ в эффективные модули упругости третьего порядка $\hat{C}^{\mathrm{ef}}_{(3)}$, описывающий дополнительный упругий ангармонизм, возникающий в результате нелинейных спин-спиновых и спин-фононных взаимодействий в ферромагнетиках. Вблизи магнитоакустического резонанса такой ангармонизм может проявляться в трехчастотных взаимодействиях упругих волн, приводящих к магнитоакустическим эффектам преобразования частоты волн. Показано, что при резонансе происходит усиление этих эффектов за счет возрастания на несколько порядков величины динамических модулей упругости $\Delta\hat{C}_{(3)}$. Проведена количественная оценка для железо-иттриевого граната.

Существование связанных магнитоупругих (МУ) колебаний в ферро-(ФМ) и антиферромагнетиках (АФ) приводит к изменению их упругих модулей. Эти изменения описываются динамическим МУ-вкладом $\Delta\hat{C}$ в эффективные модули упругости $\hat{C} \to \hat{C}^{\mathrm{ef}} = \hat{C} + \Delta\hat{C}$ и проявляюся в различных магнитоакустических эффектах [1–11]. В частности, с модулями второго порядка $\Delta\hat{C}_{(2)}$ связаны эффекты Фарадея и Фогта (или Коттона–Мутона) [3,6,8], а с модулями упругости третьего порядка $\Delta\hat{C}_{(3)}$ — различные нелинейные эффекты, например вынужденное комбинационное рассеяние, а также генерация второй гармоники акустических волн [1,2,7,9–11].

Появление динамических модулей $\Delta\hat{C}$ в АФ вызвано колебаниями вектора антиферромагнетизма $\mathbf{L}$. Межподрешеточное обменное взаимодействие усиливает МУ-связь этих колебаний с упругими деформациями, в результате чего возникает гигантский ангармонизм [1] $\Delta\hat{C}_{(3)} \approx (10^3{-}10^4)\hat{C}_{(2)}$.

В ФМ обменное усиление отсутствует. Однако в них сильная магнон-фононная связь может возникать за счет магнитоакустического резонанса (МАР), наблюдаемого при частоте волн $\omega \approx \omega_S$, где ω_S — собственная частота спиновых колебаний.

Заметим, что в АФ резонансное возбуждение спиновых колебаний затруднено, так как частота антиферромагнитного резонанса ω_{AFMR} значительно превосходит частоту звуковых волн ($\omega_{AFMR} \gg \omega$), используемых в экспериментах.

В настоящей работе исследуются нелинейные взаимодействия акустических волн в ФМ вблизи МАР, где спиновые колебания, участвуя в спин-спиновом и спин-фононном взаимодействиях, создают дополнительный упругий ангармонизм. Величина ангармонических модулей $\Delta\hat{C}_{(3)}$ при резонансе может превышать решеточную нелинейность кристалла на несколько порядков и тем самым обеспечить экспериментальное наблюдение нелинейных магнитоакустических эффектов, например, МУ-генерации второй гармоники бегущих звуковых волн [9–11].

1. Уравнения движения

Рассмотрим волну упругого смещения $\mathbf{u}$ и связанные с ней колебания намагниченности $\boldsymbol{\mu}$ (на единицу массы) в ФМ, намагниченном до насыщения: $|\boldsymbol{\mu}| = \mu_0 = \mathrm{const}$. В качестве независимых координат выберем лагранжевы координаты a_i. В этом случае уравнения движения имеют вид [12,13]

$$\dot{\mu}_i = -\gamma[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}^{\mathrm{ef}}]_i, \tag{1}$$

$$\rho_0\ddot{u}_i = \frac{\partial\tau_{ik}}{\partial a_k} + \rho_0\mu_n\frac{\partial H_n}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Здесь γ — магнитомеханическое отношение, ρ_0 — плотность массы до деформации, $\mathbf{H}^{\mathrm{ef}}$ и τ_{ik} — эффективное магнитное поле и тензор Пиола–Кирхгофа,

$$H_k^{\mathrm{ef}} = H_k - \frac{\partial F}{\partial\mu_k} + \frac{\partial}{\partial a_S}\frac{\partial F}{\partial(\partial\mu_k/\partial a_S)}, \tag{3}$$

$$\tau_{ik} = \rho_0\frac{\partial F}{\partial\eta_{kp}}\frac{\partial x_i}{\partial a_p}, \tag{4}$$

где F — потенциальная энергия единицы массы ферромагнетика, x_i — эйлеровы координаты, $H_i = H_i^0 + h_i$, H_i^0 — внутреннее поле, $\mathbf{h}$ — магнитостатическое поле, определяемое уравнениями

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{h} = 0, \quad \mathrm{div}(\mathbf{h} + 4\pi\rho\boldsymbol{\mu}) = 0, \tag{5}$$

в которых $\rho \approx \rho_0(1 - \eta_{ii})$ — плотность массы после деформации, η_{ik} — тензор деформации,

$$\eta_{ik} = (u_{ik} + u_{ki} + u_{is}u_{ks})/2, \tag{6}$$

где $u_{ik} = \partial u_k/\partial a_i$ — тензор дисторсии, $u_i = x_i - a_i$.

Уравнения магнитостатики (5) записаны в эйлеровых координатах. Переход в лагранжевы координаты можно осуществить подстановкой

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \approx \delta_{ik} - u_{ik}. \tag{7}$$

Будем рассматривать МУ-волны, распространяющиеся в одном направлении. Согласно (5), (7), магнитостатическое поле $\mathbf{h}$, создаваемое этими колебаниями, есть

$$h_i = -4\pi\rho n_i n_k \mu_k = -4\pi\rho_0 n_i n_k \mu_k (1-\eta_{ss}). \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления распространения волн.

Интересуясь нелинейными МУ-взаимодействиями, запишем потенциальную энергию $\rho_0 F$ единицы объема кристалла в виде

$$\rho_0 F = \rho_0 F(0) + K_{ij}\alpha_i\alpha_j + K_{ijkl}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l + b_{ijkl}\eta_{ij}\alpha_k\alpha_l + \lambda_{ij}\frac{\partial\alpha_s}{\partial a_i}\frac{\partial\alpha_s}{\partial a_j} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} + \frac{1}{6}C_{ijklmn}\eta_{ij}\eta_{kl}\eta_{mn}. \quad (9)$$

В (9) $\alpha_j = \mu_i/\mu_0$, K_{ij}, K_{ijkl} — константы магнитной анизотропии, b_{ijkl} — МУ-постоянные, λ_{ij} — константы неоднородного обмена, C_{ijkl} и C_{ijklmn} — модули упругости второго и третьего порядков.

2. Амплитуды связанных колебаний

Перейдем теперь к установлению МУ-связи между амплитудами спиновых и упругих колебаний. Ее удобно определить, отнеся переменные $\alpha_i = \alpha_i^0 + \tilde{\alpha}_i$ к штрихованной системе координат $\{\alpha_\beta\}$ $(\beta,\gamma,\mu = 1', 2', 3')$, третья ось a_3 которой параллельна равновесной намагниченности $\boldsymbol{\mu}_0$. Здесь $\tilde{\alpha}_i$ — отклонение направляющих конусов от равновесного значения α_i^0. В этой системе координат $\alpha_\beta^0 = \delta_{\beta 3'}$, а $\tilde{\alpha}_\beta = Q_{k\beta}\tilde{\alpha}_k$ (обратно $\tilde{\alpha}_k = Q_{k\beta}\tilde{\alpha}_\beta$), где $Q_{k\beta}$ — матрица вращения, соответствующая преобразованию координат. Из условия $|\boldsymbol{\mu}| = |\boldsymbol{\mu}_0| = \mu_0$ следует соотношение $\tilde{\alpha}_{3'} = -(\tilde{\alpha}_{1'}^2 + \tilde{\alpha}_{2'}^2)/2$, позволяющее выбрать в качестве независимых переменных величины $\tilde{\alpha}_{1'}$ и $\tilde{\alpha}_{2'}$.

Используя (9) в выражении (3) для эффективного поля $\mathbf{H}^{\mathrm{ef}}$ и ограничиваясь квадратичным приближением, получим

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ef}} = \mathbf{H}_0^{\mathrm{ef}} + \tilde{\mathbf{H}}^{\mathrm{ef}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^{\mathrm{ef}} = \tilde{\mathbf{H}}^L + \tilde{\mathbf{H}}^{NL},$$

$$H_{0\beta}^{\mathrm{ef}} = H_\beta^0 - \frac{2}{M_0}(K_{\beta\gamma} + 2K_{\beta\gamma\mu\nu}\alpha_\mu^0\alpha_\nu^0)\alpha_\gamma^0,$$

$$\tilde{H}_\beta^L = -\chi_{\beta\gamma}\tilde{\alpha}_\gamma - B_{kl\beta}\eta_{kl} + \nu_{kl}\frac{\partial^2\tilde{\alpha}_\beta}{\partial a_k \partial a_l},$$

$$\tilde{H}_\beta^{NL} = -\chi_{\beta\gamma\mu}\tilde{\alpha}_\gamma\tilde{\alpha}_\mu - B_{kl\gamma\beta}\eta_{kl}\tilde{\alpha}_\gamma, \quad (10)$$

где $\mathbf{H}^{\mathrm{ef}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}^L$, $\tilde{\mathbf{H}}^{NL}$ — статическая и динамическая части эффективного поля, определенные в линейном (L) и нелинейном (NL) приближениях, $M_0 = \rho_0\mu_0$ — намагниченность единицы объема, $\hat{\chi}$ и $\hat{\beta}$ — тензоры, учитывающие перенормировку констант анизотропии и МУ-постоянных за счет магнитостатического поля $\mathbf{h}$ (8),

$$\chi_{\beta\gamma} = \frac{2}{M_0}(K_{\beta\gamma} + 6K_{\beta\gamma\mu\nu}\alpha_\mu^0\alpha_\nu^0) + 4\pi M_0 n_\beta n_\gamma,$$

$$\chi_{\beta\gamma\mu} = \left(\frac{12}{M_0}K_{\beta\gamma\mu\nu} - \frac{1}{2}\chi_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\right)\alpha_\nu^0,$$

$$B_{kl\beta\gamma} = \frac{2}{M_0}(b_{kl\beta\gamma} - 2\pi M_0^2 n_\beta n_\gamma \delta_{kl}),$$

$$B_{kl\beta} = B_{kl\beta\gamma}\alpha_\gamma^0, \quad \nu_{kl} = 2\lambda_{kl}/M_0. \quad (11)$$

В (10) не учтены спонтанные статистические деформации $\tilde{\eta}_0 \sim M_0$, приводящие к незначительной перенормировке констант магнитной анизотропии.

Будем считать, что величины $\tilde{\alpha}_i$ и η_{ij} изменяются по закону $\exp\{i(\mathbf{ka} - \omega t)\}$, где ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор МУ-волн. Используя в уравнениях (1) выражения (10), получим в линейном приближении

$$\tilde{\alpha}_\beta^L = -L_{\beta\gamma}(\omega)H_\gamma^{me} = a_{\beta kl}(\omega)\eta_{kl}, \quad \beta,\gamma = 1', 2', \quad (12)$$

где $H_\gamma^{me} = -B_{kl\gamma}\eta_{kl}$ — эффективное МУ-поле, $a_{\beta kl}$ — тензор МУ-связи,

$$a_{\beta kl}(\omega) = L_{\beta\gamma}(\omega)B_{kl\gamma},$$

$$L_{1'1'} = \gamma^2 D(\omega)h_{1'1'}, \quad L_{2'2} = \gamma^2 D(\omega)h_{2'2'},$$

$$L_{1'2'} = \gamma D(\omega)(\gamma h_{1'2'} - i\omega),$$

$$L_{2'1'} = L_{1'2'}^* = \gamma D(\omega)(\gamma h_{1'2'} + i\omega). \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$h_{1'1'} = H_{03'}^{\mathrm{ef}} + \chi_{2'2'} + \nu_{pq}k_p k_q, \quad h_{2'2'} = H_{03'}^{\mathrm{ef}} + \chi_{1'1'} + \nu_{pq}k_p k_q,$$

$$h_{1'2'} = h_{1'1'} = -\chi_{1'2'}, \quad D(\omega) = [\omega^2 - \omega_S^2(k)]^{-1},$$

$$\omega_S^2(k) = \gamma^2(h_{1'1'}h_{2'2'} - h_{1'2'}^2), \quad (14)$$

где ω_S — собственная частота спиновых колебаний, $D(\omega)$ — множитель, отражающий резонансный характер взаимодействия спиновых и упругих колебаний.

При исследовании нелинейных магнитоакустических эффектов необходимо знать нелинейную зависимость $\tilde{\alpha}$ от η_{ik}. Ее можно определить методом последовательных приближений, используя в нелинейной части эффективного поля $\tilde{\mathbf{H}}^{NL}$ (10) линейную МУ-связь (12). В этом приближении

$$\tilde{\alpha}_\beta^{NL} = -L_{\beta\gamma}(\omega)\big(H_{me}^{NL}(\omega)\big)_\gamma, \quad (15)$$

где $\mathbf{H}_{me}^{NL}(\omega)$ — представление Фурье эффективного МУ-поля,

$$\mathbf{H}_{me}^{NL} = \tilde{\mathbf{H}}^{NL} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^L\tilde{H}_{3'}^L, \quad (16)$$

обусловленного нелинейными спин-спиновыми и спин-фононными взаимодействиями. Согласно (10), имеем

$$(H_{me}^{NL})_\gamma = -\tilde{\chi}_{\gamma\mu\nu}\tilde{\alpha}_\mu^L\tilde{\alpha}_\nu^L - \tilde{B}_{kl\mu\gamma}\eta_{kl}\tilde{\alpha}_\mu^L,$$

$$\tilde{\chi}_{\gamma\mu\nu} = \chi_{\gamma\mu\nu} - \frac{1}{2}(\chi_{\mu\beta}\delta_{\gamma\nu} + \chi_{\nu\beta}\delta_{\gamma\mu})\alpha_\beta^0,$$

$$\tilde{B}_{kl\mu\gamma} = B_{kl\mu\gamma} - B_{kl\beta}\alpha_\beta^0\delta_{\mu\gamma}. \quad (17)$$

В силу МУ-связи (12) поле $\mathbf{H}_{me}^{NL}$ зависит от тензора деформации $\hat{\eta}$ квадратичным образом.

3. Динамические модули упругости второго порядка

Уравнения движения (2) для упругого смещения **u** с учетом (9) и (8) можно представить в виде

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_j}, \tag{18}$$

где σ_{ij} — тензор натяжений [12]. В квадратичном приближении

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\eta_{kl} + C_{jpkl}\eta_{kl}u_{pi} + \frac{1}{2}C_{ijklmn}\eta_{kl}\eta_{mn}$$

$$+ M_0 B_{ij\beta}\tilde{\alpha}_\beta + \frac{1}{2}M_0\tilde{B}_{ij\beta\gamma}\tilde{\alpha}_\beta\tilde{\alpha}_\gamma. \tag{19}$$

При получении (19) предполагалось, что амплитуда спиновых колебаний $|\tilde{\alpha}|$ и величина модулей упругости $|\hat{C}|$ удовлетворяют соотношениям

$$|\tilde{\alpha}| \gg |\hat{\eta}|, \quad |\hat{C}| \gg 4\pi M_0^2.$$

Используя в (19) МУ-связь (12), а также выражение (6) для $\hat{\eta}$, представим линейную часть тензора $\hat{\sigma}$ следующим образом:

$$\sigma_{ij}^L = C_{ijkl}^{\text{ef}} u_{kl}, \quad C_{ijkl}^{\text{ef}} = C_{ijkl} + \Delta C_{ijkl},$$

$$\Delta C_{ijkl}(\omega) = M_0 B_{ij\beta} a_{\beta kl}(\omega) = M_0 L_{\beta\gamma}(\omega) B_{ij\beta} B_{kl\gamma}, \tag{20}$$

где C_{ijkl}^{ef} — тензор эффективных модулей упругости второго порядка, ΔC_{ijkl} — динамические модули, обусловленные МУ-взаимодействием спиновых и упругих колебаний, амплитуды которых связаны соотношением (12).

Учитывая в (20) явный вид тензоров $L_{\beta\gamma}$ (13), можно выделить симметричную (s) и антисимметричную (a) части тензора $\Delta\hat{C}$

$$\Delta C_{ijkl} = \Delta C_{ijkl}^s + \Delta C_{ijkl}^a,$$

$$\Delta C_{ijkl}^s = \gamma^2 M_0 D(\omega) h_{\alpha\beta} B_{ij\alpha} B_{kl\beta},$$

$$\Delta C_{ijkl}^a = -i\omega\gamma M_0 D(\omega)(B_{ij1'}B_{kl2'} - B_{kl1'}B_{ij2'}), \tag{21}$$

где $\hat{B}$ и $\hat{h}$, $D(\omega)$ — величины, определенные в (11) и (14).

4. Эффекты смешивания частот

Упругому ангармонизму низшего порядка соответствует квадратичная зависимость тензора натяжения σ_{ij} (19) от тензора дисторсии u_{pq}. Такая нелинейная зависимость приводит к смешиванию частот звуковых колебаний [14], а именно: в результате взаимодействия двух колебаний с частотами ω_1 и ω_2 образуются нелинейные волны с комбинационными частотами $\omega_1 \pm \omega_2$ или удвоенной частоты $2\omega_1$, $2\omega_2$. Каждому из этих эффектов соответствует определенное значение тензора σ_{ij} (19). Чтобы определить эти значения, представим упругое смещение **u**, а также переменную $\tilde{\alpha}_i$ в виде суммы трех колебаний

$$\tilde{\alpha}_\beta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}(\tilde{\alpha}_\beta(\omega_n) + \text{c.c.}),$$

$$\tilde{\alpha}_\beta(\omega_n) = \tilde{\alpha}_\beta^{(n)} \exp\{i(\mathbf{k}^{(n)}\mathbf{a} - \omega_n t)\},$$

$$u_i = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}(u_i(\omega_n) + \text{c.c.}),$$

$$u_i(\omega_n) = u_i^{(n)} \exp\{i(\mathbf{k}^{(n)}\mathbf{a} - \omega_n t)\}, \tag{22}$$

где $\mathbf{k}^{(n)}$ — волновой вектор МУ-волн на частоте ω_n.

Рассмотрим сначала трехчастотные процессы

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \tag{23}$$

Для этих процессов уравнения движения (18) принимают вид

$$\rho_0 \ddot{u}_i(\omega_n) = C_{ijkl}^{\text{ef}}(\omega_n)\frac{\partial u_{kl}(\omega_n)}{\partial a_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{NL}(\omega_n)}{\partial a_j}. \tag{24}$$

Здесь $\sigma_{ij}^{NL}(\omega_n)$ — нелинейная часть тензора σ_{ij}, соответствующая частоте ω_n $(n = 1, 2, 3)$. Учитывая в (19) МУ-связь (12), (15) и соотношения (22), имеем

$$\sigma_{ij}^{NL}(\omega_1) = \frac{1}{2}C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_1; \omega_3, -\omega_2) u_{kl}(\omega_3) u_{mn}^*(\omega_2),$$

$$\sigma_{ij}^{NL}(\omega_2) = \frac{1}{2}C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_2; \omega_3, -\omega_1) u_{kl}(\omega_3) u_{mn}^*(\omega_1),$$

$$\sigma_{ij}^{NL}(\omega_3) = \frac{1}{2}C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) u_{kl}(\omega_1) u_{mn}(\omega_2), \tag{25}$$

где $C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_3; \omega_1, \omega_2)$ — эффективные модули упругости третьего порядка, описывающие генерацию МУ-волн с суммарной частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в результате нелинейного взаимодействия волн накачки с частотами ω_1 и ω_2. Модули $C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_1; \omega_3, -\omega_2)$ и $C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_2; \omega_3, -\omega_1)$ описывают обратное воздействие генерируемой волны на волны накачки.

Эффективные модули $\hat{C}^{\text{ef}}$ содержат упругую и магнитную части

$$C_{ijklmn}^{\text{ef}}(\omega_n; \omega_p, \omega_q) = \tilde{C}_{ijklmn} + \Delta C_{ijklmn}(\omega_n; \omega_p, \omega_q),$$

$$\tilde{C}_{ijklmn} = C_{ijklmn} + C_{ijkm}\delta_{ln} + C_{jmkl}\delta_{in} + C_{jkmn}\delta_{il},$$

$$\Delta C_{ijklmn}(\omega_n; \omega_p, \omega_q) = M_0 \tilde{B}_{ij\beta\gamma} a_{\beta kl}(\omega_p) a_{\gamma mn}(\omega_q)$$

$$+ M_0 a_{\alpha ij}^*(\omega_n)\big\{2\tilde{\chi}_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta kl}(\omega_p) a_{\gamma mn}(\omega_q)$$

$$+ \tilde{B}_{kl\alpha\beta} a_{\beta mn}(\omega_q) + \tilde{B}_{mn\alpha\beta} a_{\beta kl}(\omega_p)\big\}. \tag{26}$$

В (26) $\Delta C_{ijklmn}(\omega_n; \omega_p, \omega_q)$ — динамические модули упругости третьего порядка, обусловленные нелинейными взаимодействиями МУ-волн с частотами ω_p и ω_q $(p, q = 1, 2, 3)$. Эти частоты удовлетворяют закону сохранения энергии (23), т.е. $\omega_n = \omega_p + \omega_q$ (например, при $\omega_n = \omega_1$, согласно (23), $\omega_p = \omega_3$, $\omega_q = -\omega_2$ или $\omega_p = -\omega_2$, $\omega_q = \omega_3$).

Модули упругости ΔC_{ijklmn} симметричны относительно перестановки внутри каждой пары индексов, а также перестановкам

$$\begin{aligned}\Delta C_{IJR}(\omega_n; \omega_p, \omega_q) &= \Delta C_{IRJ}(\omega_n; \omega_q, \omega_p) \\ &= \Delta C_{JIR}(-\omega_p; -\omega_n, \omega_q) \\ &= \Delta C_{JRI}(-\omega_p; \omega_q, -\omega_n) \\ &= \Delta C_{RIJ}(-\omega_q; -\omega_n, \omega_p) \\ &= \Delta C_{RJI}(-\omega_q; \omega_p, -\omega_n). \qquad (27)\end{aligned}$$

Здесь $I \leftrightarrow ij$, $J \leftrightarrow kl$, $R \leftrightarrow mn$ — сокращенные обозначения индексов: $I, J, R = 1, 2, \dots 6$, 1–11, 2–22, 3–33, 4–23, 32, 5–13, 31, 6–12, 21.

Выше рассматривались трехчастотные процессы $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Для процессов $\omega_1 - \omega_2 = \omega_3$ в выражениях (25) для $\sigma_{ij}^{NL}(\omega_n)$ необходимо заменить знак частоты ω_2 на противоположный и учесть, что $u_{mn}(-\omega_2) = u_{mn}^*(\omega_2)$. При генерации волн с удвоением частоты ($\omega + \omega = 2\omega$) следует положить $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\omega_3 = 2\omega$ и заменить в выражении для $\sigma_{ij}^{NL}(2\omega)$ множитель 1/2 на 1/4.

5. Обсуждение результатов

Нелинейные спин-спиновые и спин-фононные взаимодействия в ФМ приводят к дополнительному ангармонизму кристалла. Такой ангармонизм отражается в нелинейных взаимодействиях упругих волн, приводящих к магнитоакустическим эффектам преобразования частоты этих волн. В трехчастотных процессах взаимодействия волн с частотами ω_1 и ω_2 образуются нелинейные волны с комбинационными частотами $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ или удвоенной частоты $2\omega_1$, $2\omega_2$. Вклад МУ-взаимодействий в эти процессы описывается динамическими модулями упругости третьего порядка $\Delta\hat{C}(\omega_3; \omega_1, \pm\omega_2)$ и $\Delta\hat{C}(2\omega; \omega, \omega)$ (26), зависящими от частоты волн. Эта зависимость носит резонансный характер $\Delta\hat{C} \sim D(\omega_n) = (\omega_n^2 - \omega_s^2)^{-1}$ ($n = 1, 2, 3$). Резонанс возможен как на частоте волн накачки ω_1 и ω_2, так и на частоте генерируемой волны $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$.

Величина динамических модулей упругости $\Delta\hat{C}_{(3)}$ определяется коэффициентами МУ-связи $a_{\alpha kl}$ (13). Оценки, проведенные для образца железо-иттриевого граната (ЖИГ) сферической формы, показывают, что при низкочастотном МАР ($\omega \approx \omega_s \gtrsim 10^8\,\mathrm{Hz}$) значение этих коэффициентов может достигать величины порядка $10^3{-}10^4$. В ЖИГ им соответствуют значения $\Delta\hat{C}_{(3)} \approx 10^{14}{-}10^{15}\,\mathrm{N/m^2}$.

Изменение модулей упругости за счет МУ-взаимодействий не сводится к простой их перенормировке, так как магнитная часть $\Delta\hat{C}$ тензора эффективных модулей $\hat{C}^{\mathrm{ef}}$ может иметь дополнительные компоненты, отсутствующие в немагнитных кристаллах. Такие компоненты тензора $\Delta\hat{C}_{(3)}$ приводят к новым нелинейным взаимодействиям акустических волн. Например, в кубическом ФМ появляются компоненты $\Delta C_{i33k3l}(\omega_n; \omega_p, \omega_q)$ ($i, k, l = 1, 2$), описывающие взаимодействия поперечных упругих волн, распространяющихся вдоль ребра куба ($\mathbf{k} \parallel \langle 100\rangle \parallel a_3$). Явный вид таких модулей $\Delta C_{i33k3l}(2\omega; \omega, \omega)$, вычисленных при $M_0(0, M_2^0, M_3^0)$, приведен в Приложении. Заметим, что в кубических кристаллах $C_{i33k3l} = 0$ ($i, k, l = 1, 2$), поэтому $C_{i33k3l}^{\mathrm{ef}} = \Delta C_{i33k3l}$.

Динамические модули $\Delta\hat{C}_{(3)}$ существенно зависят от направления намагниченности $\mathbf{M}_0$, что отражается в угловой зависимости $\Delta C_{i33k3l}(\Theta)$ (П1), где Θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{M}_0$. В частности, все компоненты $\Delta C_{i33k3l}(0) = 0$ ($i, k, l = 1, 2$) при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{M}_0 \parallel \langle 100\rangle$, а при $\mathbf{M}_0 \perp \mathbf{k} \parallel \langle 100\rangle$ отличны от нуля только две компоненты ΔC_{544} и ΔC_{445}.

Оценки, выполненные для ЖИГ при $\omega/2\pi \approx 25\,\mathrm{MHz}$, $\omega_s/2\pi = 30\,\mathrm{MHz}$, $\Theta = 5^\circ$ с использованием для характеристик ЖИГ данных [15], показывают, что при резонансе ($\omega_s = \omega_t$, где $\omega_t = (C_{44}/\rho_0)^{1/2}k$ — собственная частота поперечных упругих волн) величина модулей упругости $\Delta C_{i33k3l}(2\omega, \omega, \omega)$ (П1) достигает гигантских значений порядка $10^{15}\,\mathrm{N/m^2}$: $\Delta C_{555} = 5i$, $\Delta C_{544} = -2i$, $\Delta C_{554} = 4$, $\Delta C_{455} = -6$, $\Delta C_{444} = 2$, $\Delta C_{445} = 3i$ в единицах $10^{15}\,\mathrm{N/m^2}$. Вдали от резонанса $\omega = 0.1\omega_s$ ($\omega_s/2\pi = 30\,\mathrm{MHz}$) величина этих модулей уменьшается на один–три порядка: $\Delta C_{555} = 2i \cdot 10^{-2}$, $\Delta C_{544} = -i$, $\Delta C_{554} = \Delta C_{455} = -6$, $\Delta C_{444} = -1$, $\Delta C_{445} = -5i \cdot 10^{-2}$ в единицах $10^{14}\,\mathrm{N/m^2}$. При более высоких частотах спиновых колебаний $\omega_S/2\pi = 10\omega/2\pi = 300\,\mathrm{MHz}$ упругие константы $\Delta\hat{C}_{(3)}$ имеют величину порядка $10^{11}{-}10^{12}\,\mathrm{N/m^2}$, близкую к значениям обычных упругих модулей второго порядка $\hat{C}_{(2)}$.

Гигантский упругий ангармонизм, обусловленный МУ-взаимодействиями, наблюдался экспериментально [9,10] при исследовании генерации вторых поперечных звуковых гармоник в ЖИГ. В области МАР ($\omega_S \approx \omega = 2\pi \cdot 30\,\mathrm{MHz}$) параметр нелинейного взаимодействия Γ (отношение эффективных модулей упругости третьего порядка к модулю $C_{44} = 8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$ увеличивался на три порядка.

Таким образом, в условиях МАР ($\omega \approx \omega_S$) происходит усиление динамических модулей упругости $\Delta\hat{C}_{(3)}$; следовательно, увеличивается эффективность нелинейных процессов, связанных с этими модулями. Особенно большое усилие испытывают модули упругости $\Delta\hat{C}_{(3)}(2\omega; \omega, \omega)$, описывающие генерацию второй гармоники. Это связано с тем, что для них имеет место "двойной" резонанс, в том смысле, что $\Delta\hat{C}_{(3)}(2\omega; \omega, \omega) \sim D^2(\omega) = (\omega^2 - \omega_S^2)^{-2}$. МУ-генерация акустических гармоник, связанная с такими модулями упругости, будет рассмотрена во второй части этой работы.

В заключение отметим, что сильная зависимость модулей упругости от величины и направления магнитного поля $\mathbf{H}^0$ ($\omega_S \sim H^0$, $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}^0$) открывает возможность управления нелинейными процессами в ФМ внешним магнитным полем.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 96-02-16489).

Приложение

Динамические модули упругости $\Delta C_{i33l3n}(2\omega;\omega;\omega)$ $(i,l,n=1,2)$ для кубических ферромагнетиков

При $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle \parallel a_3$ и $\mathbf{M}_0(0, M_2^0, M_3^0)$ эти модули имеют вид

$$\Delta C_{555}(2\omega) = i\omega(\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin 2\theta \cos\theta D_1 \times \left\{2D_1D_2\omega^2\Omega_4\cos^2\theta + (D_2 - D_1)\Omega_1\right\},$$

$$\Delta C_{544}(2\omega) = -i2\omega(\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin\theta \cos 2\theta D_1 \times \left\{2D_2\cos^2\theta[(D_1\Omega_4\Omega_2^2 - \Omega_3)\cos 2\theta - (\Omega_1 + 4\Omega_2)] - D_1\Omega_2\cos 2\theta\right\},$$

$$\Delta C_{554}(2\omega) = 0.5(\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin 2\theta D_1 \Big\{D_1\cos 2\theta \times [4D_2\Omega_2\Omega_4\omega^2\cos^2\theta - (\omega^2 + \omega_S^2)] - D_2[2(\Omega_1^2 + 4\omega^2)\cos^2\theta + ((\omega_S^2 - 2\omega^2) + 2\Omega_1\Omega_3\cos^2\theta)\cos 2\theta]\Big\},$$

$$\Delta C_{455}(2\omega) = -(\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin 2\theta D_1 \Big\{D_2\cos 2\theta \times [D_1\Omega_2\Omega_4\omega^2\cos^2\theta + (\omega_S^2 - 2\omega^2)] + D_1\cos^2\theta[\Omega_1\Omega_2\cos 2\theta + \Omega_1^2 - 2\omega^2]\Big\},$$

$$\Delta C_{444}(2\omega) = (\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin 2\theta \cos^2 2\theta D_1 \times \left\{D_1D_2\Omega_2\cos 2\theta(\Omega_2^2\Omega_4 + 3\omega^2\Omega_3) - D_1(2\Omega_2^2 - \omega^2) - 4D_2(\Omega_2^2 + \omega^2)\right\},$$

$$\Delta C_{445}(2\omega) = i\omega(\gamma b_2/M_0)^2 b_2 \sin\theta \cos 2\theta D_1 \times \Big\{2D_1\cos^2\theta[D_2\cos 2\theta(\Omega_3(\omega_S^2 + 2\omega^2) + \Omega_2^2\Omega_4) + (\Omega_1 - 2\Omega_2)] - D_2[\Omega_2\cos 2\theta + 4(\Omega_1 + \Omega_2)\cos^2\theta]\Big\}. \qquad (\Pi 1)$$

Выражения (П1) записаны без учета пространственной дисперсии спиновых колебаний ($\nu = 0$). Здесь $b_2 = 2b_{2323}$ — МУ-константа, θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{M}_0$, $D_n = [(n\omega)^2 - \omega_S^2]^{-1}$, $\omega_S = (\Omega_1\Omega_2)^{1/2}$ — частота спиновых колебаний, где

$$\Omega_1 = \gamma\left\{\mathbf{H}_0\boldsymbol{\alpha}_0 + \frac{2K}{M_0}(1 - 2\sin^2 2\theta) + 4\pi M_0\sin^2\theta\right\},$$

$$\Omega_2 = \gamma\left[\mathbf{H}_0\boldsymbol{\alpha}_0 + \frac{2K}{M_0}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\right],$$

$$\Omega_3 = \gamma\left(2\pi M_0 - \frac{3K}{M_0}\cos 2\theta\right),$$

$$\Omega_4 = \gamma\left(6\pi M_0 - \frac{15K}{M_0}\cos 2\theta\right). \qquad (\Pi 2)$$

Здесь K — константа магнитной анизотропии.

Список литературы

[1] В.И. Ожогин, В.Л. Преображенский. УФН **155**, *4*, 593 (1998).
[2] И.Ф. Мирсаев, В.В. Меньшенин, Е.А. Туров. ФТТ **28**, *8*, 2428 (1986).
[3] Е.А. Туров. Кинетические, оптические и акустические свойства антиферромагнетиков. Изд-во УрО АН СССР, Свердловск (1990). 130 с.
[4] И.Ф. Мирсаев. ФТТ **36**, *8*, 2430 (1994).
[5] И.Ф. Мирсаев, Е.А. Туров. ФММ **81**, *4*, 68 (1996).
[6] И.Ф. Мирсаев, Е.А. Туров. ФММ **81**, *6*, 5 (1996).
[7] И.Ф. Мирсаев. ФТТ **39**, *8*, 1432 (1997).
[8] Е.А. Туров. ЖЭТФ **96**, *6*, 2140 (1989).
[9] Л.К. Зарембо, С.Н. Карпачев, С.Ш. Генделев. Письма в ЖЭТФ **9**, *8*, 502 (1983).
[10] Л.К. Зарембо, С.Н. Карпачев. ФТТ **25**, *8*, 2343 (1983).
[11] А.Н. Гришмановский, Н.К. Юшин, В.Л. Богданов, В.В. Леманов. ФТТ **13**, *6*, 1833 (1971).
[12] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. Наука, М. (1968). 368 с.
[13] И.Ф. Мирсаев, Г.Г. Талуц, А.П. Танкеев. ФММ **44**, *1*, 24 (1977).
[14] Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. УФН **102**, *4*, 549 (1970).
[15] В. Штраусс. Физическая акустика / Под ред. И. Мэзона. Мир, М. (1970). Т. IV. Ч.Б. 247 с.