

Энергетические спектры и квантовая кристаллизация двухэлектронных квантовых точек в магнитных полях

© Н.Е. Капуткина, Ю.Е. Лозовик

Институт спектроскопии Российской академии наук,
142092 Троицк, Московская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 3 ноября 1997 г.
В окончательной редакции 7 апреля 1998 г.)

Рассмотрена квантовая кристаллизация электронов в квантовой точке (КТ) во внешнем магнитном поле. Рассчитаны двухэлектронные КТ с двумерным (2D) параболическим удерживающим потенциалом во внешнем поперечном магнитном поле. Методом численной диагонализации гамильтониана на базе одночастичных функций найдены энергетические спектры и волновые функции относительного движения электронов с учетом межэлектронного взаимодействия для широкого диапазона значений крутизны удерживающего потенциала α и внешнего магнитного поля B . Численно определена область значений внешних параметров α, B , в которой происходит постепенный переход к квантовому кристаллическому порядку. В отличие от 2D-неограниченной системы магнитное поле немонотонным образом действует на "кристаллизацию" в квантовой точке с несколькими электронами из-за конкуренции двух эффектов с ростом B : уменьшения размазки волновых функций электронов и роста эффективной крутизны удерживающего потенциала, приводящего к уменьшению среднего расстояния между электронами.

Квантовые точки (КТ) как квазиуль-мерные системы представляют собой весьма интересные системы пониженной размерности. Они важны не только как возможная элементная база для нанoeлектроники, но и как модельные объекты для фундаментальных исследований — искусственные гигантские атомы с контролируемо изменяемыми параметрами, такими как вид и жесткость удерживающего потенциала, число частиц, характерные размеры области их локализации. Вид удерживающего потенциала определяется способом получения КТ. Наиболее часто используются модель "жестких стенок" и модель параболического удерживающего потенциала [1–7]. Модель параболического латерального потенциала подтверждена самосогласованными расчетами [8] и применима для не слишком больших КТ. Спектры возбуждений многоэлектронных КТ могут быть рассчитаны в рамках различных приближений. В частности, было доказано [9], что для многоэлектронных КТ в сильных магнитных полях обобщенное приближение Хартри–Фока является адекватным приближением для определенной области значений жесткости удерживающего потенциала.

Одним из наиболее интересных вопросов в физике двумерных электронных систем является кристаллизация электронов, предсказанная для трехмерных систем Вигнером (см., например, [10]) и рассмотренная теоретически в применении к двумерным системам в ряде работ [11–15] (см. также обзоры [16,17]). Расчет кристаллизации двумерного электронного газа [15,18] дает результаты, хорошо согласующиеся с численными [19,20] и физическими [21] экспериментами. Кристаллизация электронов в квантовых точках была

рассмотрена в [22] для классического случая с помощью моделирования методом молекулярной динамики (см. также [23] и ссылки там) и в [24] для квантовой области с помощью квантового метода Монте-Карло. Сильное магнитное поле, как было предсказано в [13], расширяет область существования кристалла (см. также [14,15,17] и ссылки там). Весьма интересно рассмотреть и влияние магнитного поля на возникновение "кристаллического" порядка в квантовой точке. Как показано далее, его влияние на появление кристаллического порядка в определенной области управляющих параметров (магнитного поля и крутизны удерживающего потенциала) оказывается немонотонным из-за конкуренции двух механизмов: локализирующего действия магнитного поля (уменьшения размазки волновой функции) и сжатия всей системы из-за роста эффективной крутизны удерживающего потенциала и связанного с последним уменьшения среднего расстояния между электронами.

В настоящей работе рассмотрена задача двумерной КТ с двумя электронами в широкой области поперечных магнитных полей. Используется модель параболического удерживающего потенциала $U(r) = \alpha r^2$, хотя результаты легко обобщаются и на другие виды удерживающего потенциала. Чтобы рассмотреть большую область магнитных полей B и параметров крутизны удерживающего потенциала α , мы использовали для нахождения энергетического спектра и волновых функций метод численной диагонализации гамильтониана на базе собственных одночастичных функций.

Мы рассмотрим в данной работе квантовую кристаллизацию в двухэлектронной двумерной КТ в поперечном магнитном поле.

1. Энергетический спектр и волновые функции относительного движения электронов с учетом межэлектронного взаимодействия

Рассмотрим два электрона во внешней потенциальной яме вида $U = \alpha r^2$ (параболический латеральный потенциал) в поперечном магнитном поле \mathbf{B} .

Вследствие аксиальной симметрии задачи удобно использовать симметричную калибровку векторного потенциала $\mathbf{A} = (1/2)\mathbf{B}\mathbf{r}$. Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = (-i\nabla_1 - eA/c)^2/(2m^*) + (-i\nabla_2 - eA/c)^2/(2m^*) + e^2/(\varepsilon|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + \alpha(r_1^2 + r_2^2), \quad (1)$$

где m^* — эффективная масса электрона, ε — диэлектрическая проницаемость, α — параметр крутизны удерживающего потенциала.

Обезразмерим величины, вводя следующие единицы расстояния, энергии, параметра крутизны удерживающего потенциала, магнитного поля соответственно:

$$a_0 = \hbar^2\varepsilon/(2m^*e^2), \quad E_0 = 2m^*e^4/(\hbar^2\varepsilon^2), \quad \alpha_0 = E_0/a_0^2, \quad B_0 = (2m^*)^2e^3c/(\hbar^3\varepsilon^2), \quad (2)$$

где m^* — эффективная электронная масса, ε — диэлектрическая проницаемость, a_0 и E_0 — радиус и энергия связи двумерного экситона.

В результате уравнение Шредингера приобретает вид

$$\left[\Delta_{\mathbf{r}_1} + \Delta_{\mathbf{r}_2} + (i\omega_c/4) \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2} \right) + E - (\alpha + (\omega_c/4)^2)(r_1^2 + r_2^2) - (1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \right] \psi = 0, \quad (3)$$

где ω_c — циклотронная частота.

Отличительной чертой внешнего параболического потенциала является возможность разделения движения центра масс и относительного движения частиц. Сделаем замену координат $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, получим систему уравнений, характеризующих движение центра масс и относительное движение,

$$\frac{\partial^2\psi_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\psi_R}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2\psi_R}{\partial\theta^2} + (i\omega_c/4) \times \frac{\partial\psi_R}{\partial\theta} + (E_R - (\beta^2 R^2/2))\psi_R = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + (i\omega_c/4) \times \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} + (E_r - \beta^2 r^2/2 - (1/|r|))\psi_r = 0, \quad (5)$$

$$E = E_R + E_r. \quad (6)$$

Здесь $\beta = [(\omega_c/4)^2 + \alpha]^{1/2}$ — параметр, характеризующий эффективную крутизну удерживающего потенциала в магнитном поле и увеличивающийся с ростом поля.

Полная волновая функция должна быть антисимметричной относительно перестановки электронов. Поскольку волновая функция, характеризующая движение центра тяжести, ψ_R симметрична относительно перестановки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , спину $S = 0$ должны отвечать четные волновые функции относительного движения электронов ψ_r , а $S = 1$ — нечетные.

Уравнение (4) допускает аналитическое решение; таким образом определяются энергии центра масс E_R (энергии Дарвина–Фока) и собственные функции ψ_R ,

$$E_{Rm} = 2^{3/2}\beta(n + (|m| + 1)/2) + \omega_c m/4, \quad (7)$$

$$\psi_{nm}(\mathbf{R}) = \left[n! / (\pi(|m| + n)!) \left(\beta/\sqrt{2} \right)^{|m|+1} \right]^{1/2} R^{|m|} \times \exp(-\beta R^2/2\sqrt{2}) L_n^{|m|}(\beta R^2/\sqrt{2}) \times \exp(im\theta), \quad (8)$$

где $L_n^{|m|}$ — обобщенный полином Лагерра.

Уравнение для относительного движения (5) отличается от уравнения для центра масс лишь учетом межэлектронного взаимодействия. В соответствии с симметрией задачи волновая функция относительного движения может быть представлена в виде $\psi_r(\mathbf{r}) = f_m(r) \exp(im\theta)$, где $m = 0, \pm 1, \dots$; радиальная функция $f_m(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + (E'_{rm} - (\beta^2 r^2/2) - (1/|r|) - m^2/r^2)f = 0, \quad (9)$$

где $E'_{rm} = E_r - (m\omega_c/4)$.

В уравнении (9) содержится единственный управляющий параметр задачи — эффективная крутизна потенциала β , которая определяет структуру волновых функций и собственные значения E'_{rm} .

Разложим $f_m(r)$ по базису собственных функций задачи без кулоновского взаимодействия электронов

$$f_{nm} = \left[n! / (\pi(|m| + n)!) \left(\beta/\sqrt{2} \right)^{|m|+1} \right]^{1/2} \times r^{|m|} \exp(-\beta r^2/2\sqrt{2}) L_n^{|m|}(\beta r^2/\sqrt{2}), \quad (10)$$

$$f_m = \sum_n C_{nm} f_{nm}. \quad (11)$$

Методом численной диагонализации гамильтониана на базисе этих функций мы найдем решения уравнения (9). Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\det \{ V_{nm}^{n'm} + \delta_{n,n'}(\varepsilon_{nm} - E_r) \} = 0, \quad (12)$$

где

$$V_{nm}^{n'm} = \left[n!n'! / ((n+|m|)!(n'+|m|)!) \beta / \sqrt{2} \right]^{1/2} \times \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} (-1)^{(i+j)} \binom{n+|m|}{n-i} \binom{n'+|m|}{n'-j} \times \Gamma(i+j+|m|+1/2) / (i!j!), \quad (13)$$

Γ — гамма-функция Эйлера.

Удобно в дальнейшем нормировать энергию и длину следующим образом:

$$E' = E/\omega_c, \quad r' = r\sqrt{\omega_c}. \quad (14)$$

Тогда собственные значения энергии и собственные функции, характеризующие базисные функции (по которым проводится диагонализация), зависят от безразмерного параметра $\gamma = \beta/\omega_c = \sqrt{\alpha/\omega_c^2 + (1/16)}$. Энергия центра масс имеет вид

$$E'_{R_{nm}} = 2\sqrt{2}\gamma(n + (|m| + 1)/2) + (m/4). \quad (15)$$

Зависимости нижних уровней энергии E'_r от параметра γ , полученные из решения уравнения (12), приведены на рис. 1. Значения энергетических уровней монотонно возрастают с ростом γ (при фиксированном ω_c). Для состояний с одним и тем же квантовым числом m имеет место ряд квазипересечений уровней энергии. Для состояний с разной симметрией — с разными квантовыми числами m — наблюдаются пересечения энергетических уровней. Эти пересечения и квазипересечения более заметны для $\gamma \sim 1$, когда влияние всех

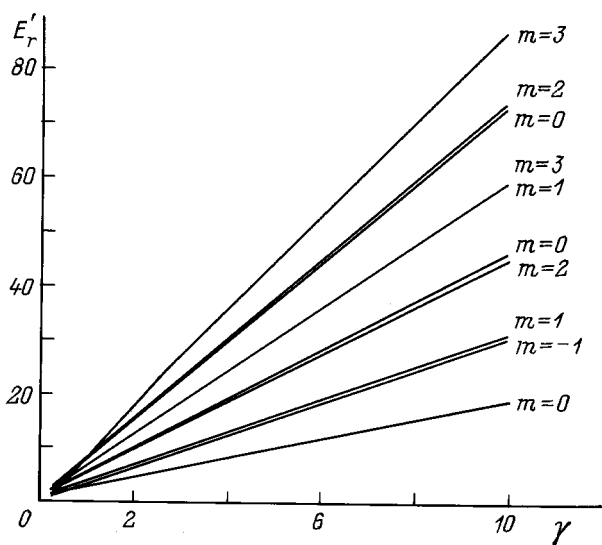


Рис. 1. Зависимость нижних энергетических уровней E'_r от параметра γ . $\gamma = \beta/\omega_c$, β — эффективная крутизна удерживающего потенциала квантовой точки в магнитном поле, $\beta = [(\omega_c/4)^2 + \alpha]^{1/2}$, α — параметр крутизны удерживающего потенциала.

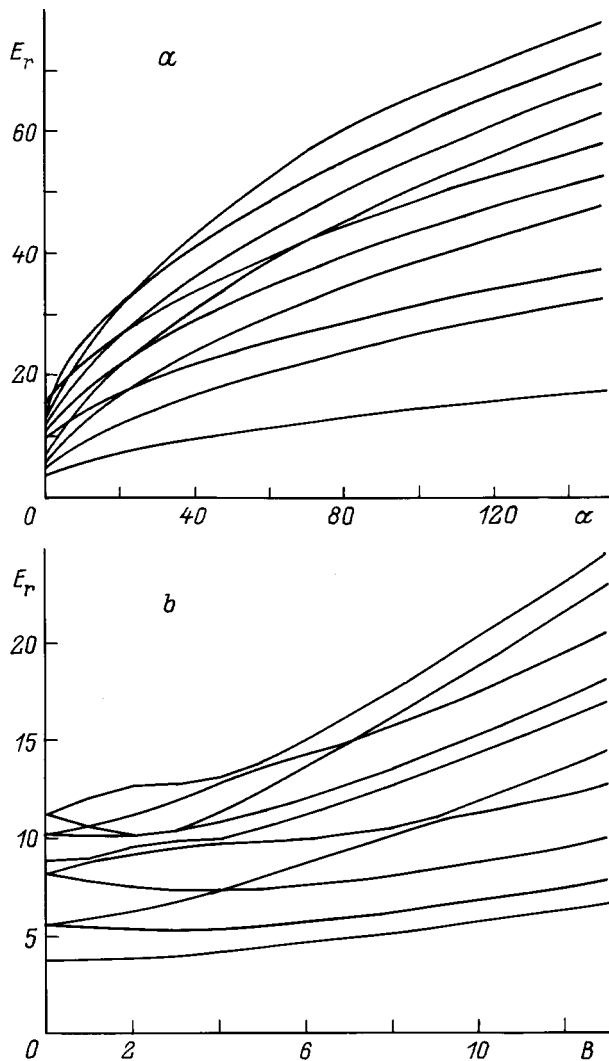


Рис. 2. Зависимость нижних уровней энергии E_r . *a* — от параметра крутизны удерживающего потенциала α в магнитном поле $B = 10$ (в единицах $B_0 = (2m^*)^2 e^3 c / \hbar^3 \epsilon^2$); *b* — от магнитного поля B при значении параметра удерживающего потенциала $\alpha = 3$ (в единицах $\alpha_0 = (2m^*)^3 e^8 / \hbar^6 \epsilon^4$).

факторов (удерживающего потенциала, магнитного поля, кулоновского взаимодействия) сравнимо по величине.

Когда параметр γ достаточно велик (случай сильных магнитных полей), межэлектронное взаимодействие мало по сравнению с другими параметрами, и поэтому энергии относительного движения E_r асимптотически стремятся к энергии E_R (7), т. е. линейны по γ . Это видно из рис. 1.

Мы также рассмотрели зависимости уровней энергии E_r отдельно от параметра жесткости удерживающего потенциала α и от величины магнитного поля B . Зависимости низколежащих уровней энергии от параметра жесткости удерживающего потенциала α приведены на рис. 2, *a*. Энергии вне области квазипересечения уровней монотонно возрастают с ростом α .

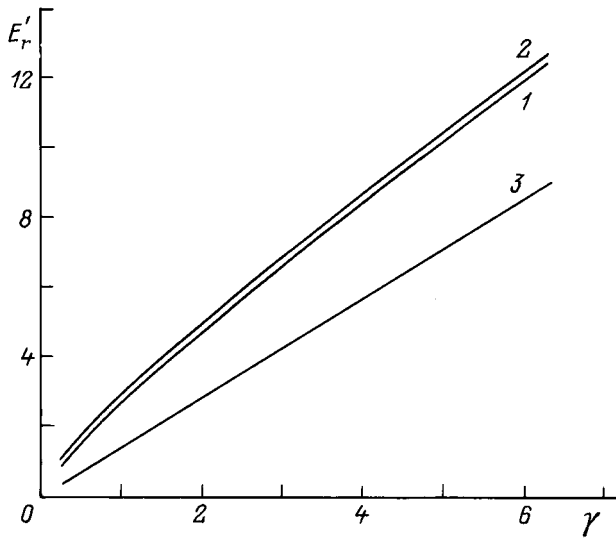


Рис. 3. Сравнение результатов вычисления зависимости нижнего уровня энергии E_r' от параметра γ , полученных диагонализацией гамильтониана (1), с результатами применения теории возмущений (2). Кривая 3 соответствует случаю пренебрежения межэлектронным взаимодействием.

Квазипересечения уровней видны более наглядно на рис. 2, *b*, где приведены зависимости нижних уровней энергии от величины магнитного поля B . Уровни энергии возрастают с ростом B . Можно видеть, что между уровнями с одинаковой симметрией имеется квазипересечение с появлением энергетической щели. Изменение кривизны графиков отражает совместное влияние всех факторов: магнитного поля B , удерживающего потенциала α и кулоновского взаимодействия электронов. Эффект наиболее заметен для не слишком больших значений α и B , т. е. в области, где влияние всех факторов сравнимо по величине.

Представляется интересным сравнить значения энергии E_r , полученные путем численной диагонализации гамильтониана, с результатами применения теории возмущений по межэлектронному взаимодействию. Оказалось, что теория возмущений дает довольно хорошие результаты для параметра $\gamma \gtrsim$ (относительная ошибка уменьшается с ростом γ). Этот факт аналогичен применимости теории возмущений ((1/ Z)-разложения) к малоэлектронным атомам, несмотря на отсутствие явного ("буквенного") малого безразмерного параметра задачи.

Применимость теории возмущений продемонстрирована на рис. 3 (приведены результаты расчета нижнего энергетического уровня E_r с квантовым числом $m = 0$ в сравнении с результатами теории возмущений).

Для получения волновых функций относительного движения электронов находим коэффициенты C_{nm} из уравнения

$$\sum_n C_{nm}(\varepsilon_{nm} - E_r + V_{nm}^{n'm}) = 0. \quad (16)$$

Таким образом определяются волновые функции относительного движения $f_m(r)$. Графики квадратов волновых функций $f_m(r)$ для некоторых значений параметра удерживающего потенциала α и магнитного поля B приведены на рис. 4.

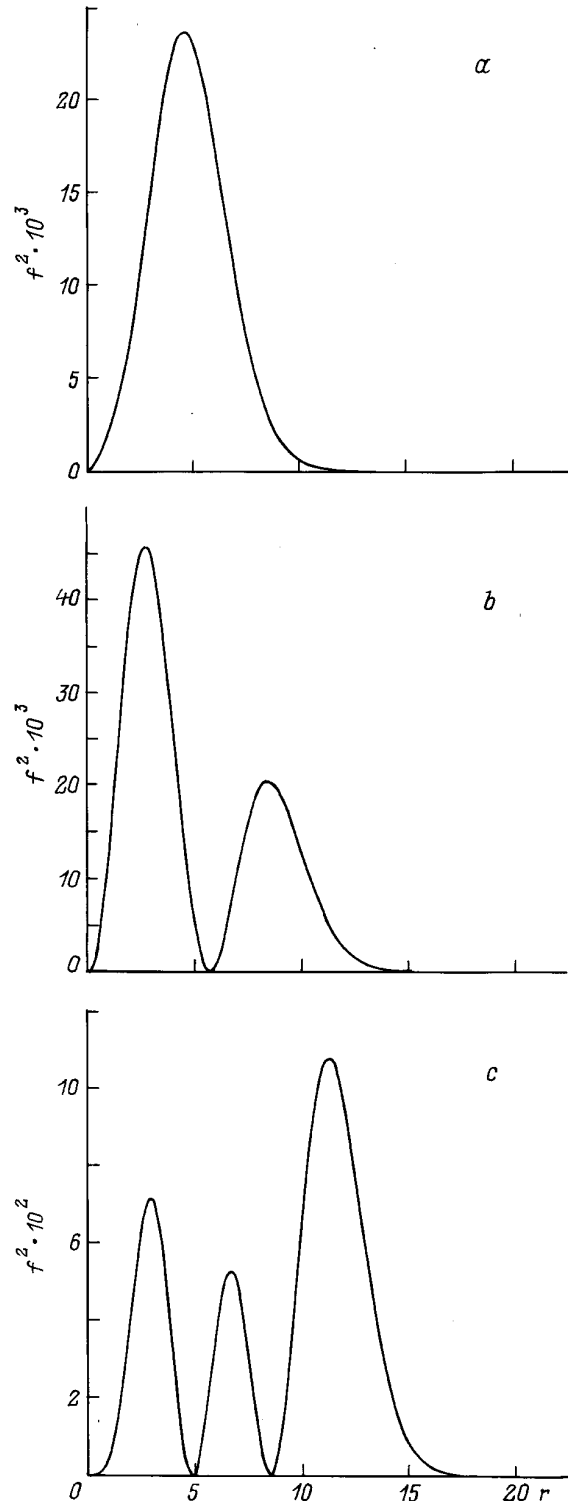


Рис. 4. Квадрат волновой функции $f^2(r)$ при $m = 0$. Жесткость удерживающего потенциала $\alpha = 0.01$, магнитное поле $B = 0.1$. $m = 0$ (a), 1 (b) и 2 (c).

Для экспериментального изучения энергетического спектра КТ могут использоваться спектроскопические методы. Однако в случае параболического удерживающего потенциала метод ИК-спектроскопии позволяет наблюдать лишь возбуждения, связанные с движением центра масс. Тем не менее возбуждения, соответствующие относительно движению электронов, могут наблюдаться, например, при электронных переходах из валентной зоны в зону проводимости.

2. Разложение по базису функций гармонического осциллятора

В области значения α и B , в которой электроны сильно скоррелированы, их волновые функции должны быть близки не к одночастичным волновым функциям (10) (как в противоположном случае слабой корреляции), а к функциям гармонического осциллятора, локализованным в центрах классической кристаллизации электронов (см. [22]). Поэтому разумно решать уравнение (9) также и путем разложения решений по базису функций гармонического осциллятора

$$f_{nm}(x) = (a_m/2^{1/4}/(2^n n! \sqrt{\pi}))^{1/2} \times \exp(-x^2 \sqrt{a_m/2}/2) H_n((a_m/2)^{1/4} x), \quad (17)$$

где $x = r - r_0$, r_0 — среднее расстояние между электронами, $a_m = \beta^2 + 2/r_0^3 + 6m^2/r_0^4$,

$$f_m^l = \sum_n C_{nm} f_{nm}^l. \quad (18)$$

Результаты, полученные диагонализацией на базисе функций гармонического осциллятора, отличаются в области промежуточных значений α и B лишь на доли процента от результатов, полученных путем численной диагонализации гамильтониана на базисе одночастичных функций, что свидетельствует о хорошей точности вычислений.

3. Влияние магнитного поля и параметра крутизны удерживающего потенциала на квантовую кристаллизацию электронного кластера

Индукцированную кулоновским отталкиванием локализацию электронов мы оценим по полуширине пика квадрата рассчитанной нами волновой функции (плотности вероятности). Это позволит сделать вывод об области внешних параметров (параметр крутизны удерживающего потенциала α и магнитное поле B), в которой происходит квантовая "кристаллизация" электронов. Таким образом, мы получим в некотором смысле фазовую диаграмму электронов в плоскости (α, B) .

Для двухэлектронной КТ можно говорить, разумеется, только о формировании двухэлектронного кластера с установлением ближнего порядка. В случае протяженной системы о появлении ближнего порядка в системе свидетельствует наличие максимума у структурного фактора $S(k)$ [19]. Протяженную электронную систему можно характеризовать безразмерным параметром Γ , соответствующим отношению характерных потенциальной энергии к кинетической. В классическом случае $\Gamma = e^2/(ak_B T)$, $a = (\pi n)^{-1/2}$, где n — двумерная плотность, k_B — константа Больцмана. В работе [20] методом молекулярной динамики для классической системы были проведены расчеты плавления двумерных кристаллов. Для кулоновской системы было получено критическое значение параметра $\Gamma_{cr}^{cl} \sim 140$, соответствующее установлению дальнего порядка в системе. Вместе с тем расчеты [20] показали, что в довольно широкой области значений Γ , в том числе и после плавления, имеются довольно различные кластеры — области с ближним порядком. Пик в $S(k)$, связанный с ближним порядком, сохраняется вплоть до $\Gamma_{so} \sim 10$ (в этой области диэлектрическая функция $\epsilon(\mathbf{k}) < 0$). Для квантовой системы характерная величина Γ есть $\Gamma = (e^2/(\epsilon r))(\hbar^2/(m^* r^2))^{-1} = r/a_B = r_s$ (где $a_B = \hbar^2 \epsilon / (m^* e^2)$ — эффективный борковский радиус ($a_B = 2a_0$), $r = (\pi n)^{-1/2}$ — средний радиус круга, занятого одним электроном).

Значение параметра Γ^q , при котором происходит квантовая кристаллизация протяженных систем, ниже классического значения Γ (в литературе имеется разброс критических значений Γ_{cr}^q , полученных из теоретических расчетов [22] или моделирования [23]: от 10^2 до 30). Можно поэтому принять для оценки, что и область значений Γ_{so}^q , при которых (кроссовером) возникает область ближнего порядка в квантовой системе, $\Gamma_{so}^q \sim 10$, что означает $r_s \sim 10$. Для параметра Линдемана при $T = 0$ имеем $\gamma = \sqrt{\langle r^2 \rangle} / \bar{r} \sim r_s^{-3/4}$, где $\langle r^2 \rangle$ — среднеквадратичное отклонение электрона из центра локализации волновой функции (ср. с [15]). В области появления ближнего порядка ($\Gamma_{so}^q \sim 10$) значение $\gamma_{so} \sim 10^{-3/4} \sim 0.2$ (вместо критического значения $\gamma_c \sim 0.1$ для появления дальнего порядка в протяженной системе, см., например, [20,15]).

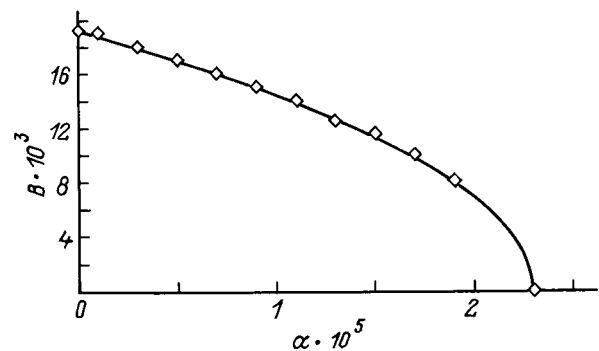


Рис. 5. Условная граница области квантовой кристаллизации электронов.

Можно поэтому в качестве критерия ближнего порядка использовать правило: отношение полуширины волновой функции относительного движения электронов к среднему расстоянию между ними равно $1/2$, т.е. $\gamma_{so} = 1/4$ (что неплохо согласуется с вышеприведенным значением γ_{so}).

Параметром, контролирующим квантовую кристаллизацию электронов (управляющим параметром задачи), является параметр β , характеризующий эффективную крутизну удерживающего потенциала в магнитном поле. При $\gamma = 1/4$ получаем в результате расчетов критическое значение параметра $\beta_{cr} = 0.005$, при котором возникает кристаллизация в двухэлектронной квантовой точке. На рис. 5 приведена условная граница области квантовой кристаллизации электронов для основного состояния ($m = 0$) в соответствии с вышеуказанным критерием в плоскости управляющих параметров (α, β). Рост как жесткости удерживающего потенциала, так и магнитного поля приводит к увеличению эффективной крутизны удерживающего потенциала в магнитном поле и соответственно к уменьшению среднего расстояния между электронами и относительной делокализации электронов. Подчеркнем, что в квантовой точке магнитное поле действует двойко: оно уменьшает размытие волновых электронных функций, но одновременно и уменьшает

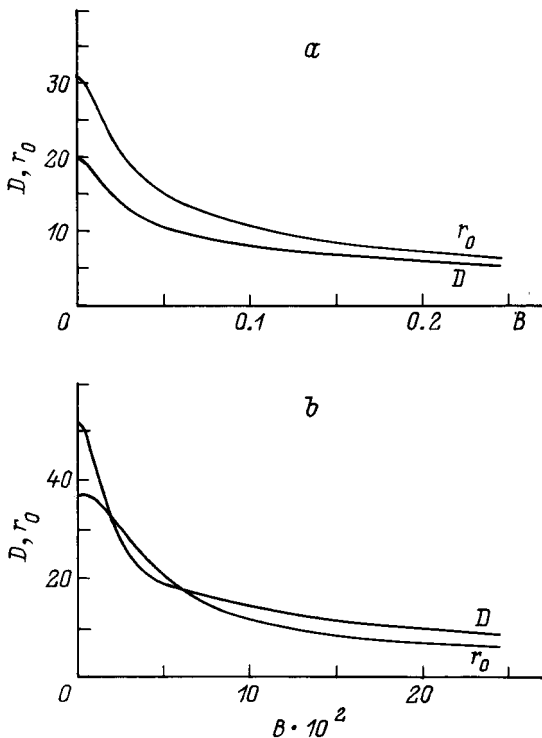


Рис. 6. Зависимости полуширины пика D квадрата радиальной волновой функции и среднего расстояния между электронами r_0 от величины магнитного поля B при постоянном параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 10^{-5}$. $m = 0$ (a), 1 (b).

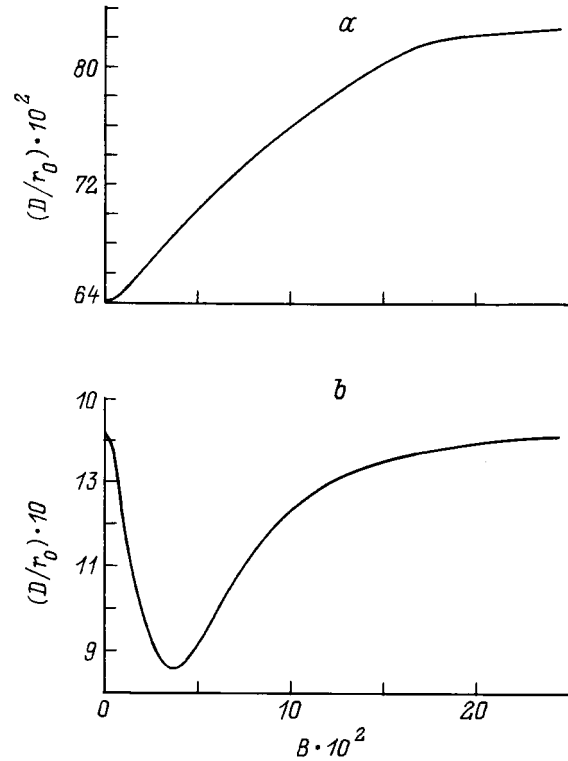


Рис. 7. Зависимость отношения величины D к среднему расстоянию между электронами r_0 от магнитного поля B при постоянном параметре крутизны удерживающего потенциала $\alpha = 10^{-5}$. $m = 0$ (a), 1 (b).

среднее характерное расстояние между электронами, что дает увеличение перекрытия волновых функций. Графики зависимости полуширины пика квадрата волновой функции D и среднего расстояния между электронами r_0 от магнитного поля B приведены на рис. 6. На рис. 7 приведены зависимости отношения полуширины пика квадрата волновой функции к среднему расстоянию между электронами D/r_0 от магнитного поля B при постоянном α для состояний с $m = 0$ и 1. Можно видеть, что для случая $m = 0$ магнитное поле вначале способствует относительной локализации электронов, хотя перекрытие волновых функций все же слишком велико, чтобы можно было говорить о квантовой кристаллизации в этом случае. Сильное же магнитное поле способствует относительной делокализации. Итак, возможно немонотонное влияние магнитного поля на квантовую кристаллизацию вследствие конкуренции двух эффектов с ростом магнитного поля: уменьшения не только размытия волновых функций, но и межэлектронного расстояния.

Авторы признательны за полезное обсуждение участникам совещания "Новая физика низкоразмерных систем" (Дрезден, 1997).

Работа поддержана грантами РФФИ, ИНТАС и программы "Физика наноструктур".

Список литературы

- [1] F. Geerinckx, F.M. Peeters, J.T. Devreese. *J. Appl. Phys.* **68**, 7, 3435 (1990).
- [2] W. Hansen, M. Horst, J.P. Kotthaus, U. Merkt, Ch. Sikorsky. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 25, 2586 (1987).
- [3] Ch. Sikorsky, U. Merkt. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 18, 2164 (1989).
- [4] C.T. Liu, K. Nakamura, D.C. Tsui, K. Ismail, D.A. Antoniadis, H.I. Smith. *Appl. Phys. Lett.* **55**, 2, 168 (1989).
- [5] T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow, K. Ploog. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 7, 788 (1990).
- [6] J. Dempsey, N.F. Johnson, L. Brey, B.I. Halperin. *Phys. Rev.* **B42**, 18, 11 708 (1990).
- [7] P. Hawrylak. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 20, 3347 (1993).
- [8] A. Kumar, S.E. Laux, F. Stern. *Phys. Rev.* **B42**, 8, 5166 (1990).
- [9] A.I.A. Andreev, Ya.M. Blanter, Yu.E. Lozovik. *Solid State Commun.* **91**, 7, 581 (1994); A.I.A. Andreev, Ya.M. Blanter, Yu.E. Lozovik. *Int. J. Mod. Phys.* **B9**, 15, 1843 (1995).
- [10] Д. Пайнс. Элементарные возбуждения в твердых телах. Мир, М. (1965).
- [11] R.S. Crandall, R. Williams. *Phys. Lett.* **A34**, 7, 404 (1971).
- [12] А.В. Чаплик. *ЖЭТФ* **62**, 2, 746 (1972).
- [13] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Письма в *ЖЭТФ* **22**, 1, 26 (1975); Ю.Е. Лозовик, Д.Р. Мусин, В.И. Юдсон. *ФТТ* **21**, 7, 1974 (1979); Б. Абдуллаев, Ю.Е. Лозовик. *ФТТ* **24**, 9, 2663 (1982).
- [14] H. Fukuyama. *Solid State Commun.* **19**, 6, 551 (1976).
- [15] Yu.E. Lozovik, V.M. Farztdinov. *Solid State Commun.* **54**, 8, 725 (1985); Yu.E. Lozovik, V.M. Farztdinov, B. Abdullaev. *J. Phys.* **C18**, 26, 1807 (1985).
- [16] T. Ando, A.B. Fowler, F. Stern. *Rev. Mod. Phys.* **54**, 2, 437 (1982).
- [17] В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха. Двумерные заряженные системы в гелии. Наука, М. (1989).
- [18] M. Shaegan. In: *Perspectives in Quantum Hall Effects* / Ed. S. Das Sarma, A. Pinchuk. Jhon Wiley Publ., N. Y. (1997).
- [19] R.H. Morf. *Phys. Rev. Lett.* **43**, 14, 931 (1979).
- [20] В.М. Беданов, Г.В. Гадияк, Ю.Е. Лозовик. *ЖЭТФ* **88**, 5, 1622 (1985).
- [21] C.C. Crimes, G. Adams. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 12, 795 (1979).
- [22] Ю.Е. Лозовик. *УФН* **153**, 2, 356 (1987); Yu.E. Lozovik, V.A. Mandelshtam. *Phys. Lett.* **A145**, 5, 269 (1990).
- [23] Yu.E. Lozovik, V.A. Mandelshtam. *Phys. Lett.* **A165**, 5, 469 (1992).
- [24] Ю.Е. Лозовик, Е.А. Ракоч. Письма в *ЖЭТФ* **65**, 3, 268 (1997); Yu.E. Lozovik, E.A. Rakoch. *Phys. Lett.* **A235**, 1, 55 (1997).