

Комплексная магнитная восприимчивость одноосных суперпарамагнитных частиц в сильном постоянном магнитном поле

© Ю.П. Калмыков, С.В. Титов

Институт радиотехники и электроники Российской академии наук,
141120 Фрязино, Московская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 17 октября 1997 г.)

Рассмотрена задача о магнитной релаксации системы однодоменных ферромагнитных частиц в присутствии сильного постоянного магнитного поля, направленного под произвольным углом к оси анизотропии частицы. Путем усреднения уравнения Гильберта с флуктуирующим полем выведена система линейных дифференциально-разностных уравнений для моментов (усредненных сферических гармоник) без использования уравнения Фоккера–Планка. Найдено точное решение этой системы (в терминах матричных непрерывных дробей). Рассчитаны времена релаксации и спектр комплексной магнитной восприимчивости.

1. Однодоменные ферромагнитные частицы с одноосной анизотропией характеризуются внутренним потенциалом, который имеет два устойчивых положения равновесия с потенциальным барьером между ними. Если частицы малы (и, следовательно, потенциальный барьер низок), вектор намагниченности \mathbf{M} может переориентироваться через барьер из-за тепловых флуктуаций [1]. Тепловая неустойчивость намагниченности приводит к так называемому суперпарамагнетизму [2], потому что каждая частица ведет себя как огромный парамагнит с магнитным моментом $\sim 10^4\text{--}10^5$ магнетонов Бора. Исследование тепловых флуктуаций и релаксации намагниченности однодоменных частиц в настоящее время привлекает внимание в контексте улучшения характеристик магнитных носителей записи [3] и палеомагнетизма [4].

Динамика намагниченности однодоменных ферромагнитных частиц описывается уравнением Ландау и Лифшица [5]. Гильберт [6] предложил аналогичное уравнение. Браун [7] применил эти уравнения для описания динамики намагниченности индивидуальной частицы; при этом он использовал метод уравнения Ланжевена из теории броуновского движения. В качестве уравнения Ланжевена Браун использовал уравнение Гильберта с флуктуирующим полем для описания тепловых флуктуаций намагниченности индивидуальной частицы. Используя затем метод Ванга и Уленбека [8] совместно с подходом Стратоновича [9] к усреднению стохастических дифференциальных уравнений, Браун вывел уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности распределения $W(\{\mathbf{M}\}, t)$ намагниченности \mathbf{M} . На основе уравнения Фоккера–Планка строилась теория магнитной релаксации в ансамбле однодоменных частиц [5–9].

В базовой модели, используемой при изучении релаксационных процессов в суперпарамагнетиках, плотность свободной энергии V однодоменной магнитной частицы (с одноосной анизотропией), находящейся во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{H}_0 произвольной напряженности, имеет вид [1,10,11]

$$V = -K \cos^2 \vartheta - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0), \quad (1)$$

где K — константа анизотропии, ϑ — полярный угол. Эта проблема сформулированная Неелем [1] и Стонером и

Вольфартом [11], анализировалась, например, в [12–22]. Однако чтобы упростить математические расчеты, в большинстве случаев принималось, что поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси анизотропии частицы (за исключением небольшого числа работ, например [23–26]). Комплексную магнитную восприимчивость ранее удалось рассчитать только при указанном допущении.

В общей постановке задачи, когда поле \mathbf{H}_0 может находиться в произвольном направлении относительно оси намагничивания, уравнение Фоккера–Планка может быть формально решено путем разложения функции распределения $W(\{u\}, t)$ в ряд по сферическим гармоникам. Это сводит задачу к решению бесконечномерной системы линейных дифференциально-разностных уравнений для усредненных сферических гармоник (моментов) [25,26]

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t), \quad (2)$$

где A — бесконечномерная системная матрица, $X(t)$ — вектор-столбец, состоящий из моментов (система для моментов (2) может также быть получена путем непосредственного усреднения уравнения Гильберта, без использования уравнения Фоккера–Планка [27,28]). Численное решение (2) (путем нахождения собственных значений и собственных векторов системной матрицы) в принципе может быть получено путем последовательного увеличения числа уравнений конечным числом N до достижения сходимости. К сожалению, применение такого прямого подхода на практике затруднительно, так как для рассматриваемой задачи необходимо проводить расчеты при $N \sim 10^3\text{--}10^4$, что возможно только на суперкомпьютерах [26]. Однако задачу можно существенно упростить, если воспользоваться методом матричных непрерывных дробей [28,29], разработанных в [28] для решения бесконечных систем рекуррентных уравнений для моментов. Хотя этот подход уже использовался при рассмотрении аналогичных проблем в теории эффекта Керра, диэлектрической и магнитной релаксации [15,30,31], к рассматриваемой задаче он непосредственно неприменим, так как в данном случае имеются два переменных индекса в рекуррентном уравнении [25,26]. В этом случае ранее не было предложено

простого алгоритма (например, в [29] при решении двухиндексных рекуррентных уравнений предлагалось использовать матричные дроби бесконечной размерности), поэтому требуется дальнейшее развитие метода.

Основная цель данной работы — рассчитать продольную компоненту магнитной восприимчивости $\chi_{\parallel}(\omega)$ системы невзаимодействующих однодоменных ферромагнитных частиц при произвольном направлении сильного постоянного магнитного поля относительно легкой оси частицы.

2. Уравнение Гильберта для намагниченности \mathbf{M} однодоменной частицы с учетом тепловых флуктуаций имеет вид [5,6]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \gamma [\mathbf{M}(t) \times [\mathbf{H}(t) + \mathbf{h}(t) - \eta\dot{\mathbf{M}}(t)]], \quad (3)$$

где γ — гиромагнитное отношение, η — коэффициент трения, суммарное магнитное поле может состоять из внешних приложенных полей, эффективного поля магнитной анизотропии (все обозначаются \mathbf{H}) и случайного поля $\mathbf{h}(t)$, обладающего свойствами белого шума,

$$\overline{h_i(t)} = 0, \quad \overline{h_i(t_1)h_j(t_2)} = \frac{2kT\eta}{\nu} \delta_{ij}\delta(t_1 - t_2), \quad (4)$$

где ν — объем частицы, черта сверху означает статистическое среднее по ансамблю частиц, имеющих в момент времени t одинаковую намагниченность \mathbf{M} .

Если $V(\{\mathbf{M}\}, t)$ — свободная энергия единицы объема, выраженная через компоненты \mathbf{M} , то поле \mathbf{H} определяется уравнением

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} V(\{\mathbf{M}\}),$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial M_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial M_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial M_z},$$

$$M_x = M_s \sin \vartheta \cos \varphi = M_s u_x, \quad M_y = M_s \sin \vartheta \sin \varphi = M_s u_y, \\ M_z = M_s \cos \vartheta = M_s u_z.$$

Уравнение Гильберта (3) можно преобразовать к виду уравнения Ландау–Лифшица [5,6,22]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = M_s g' [\mathbf{M}(t) \times [\mathbf{H}(t) + \mathbf{h}(t)]] \\ + h' [\mathbf{M}(t) \times [\mathbf{H}(t) + \mathbf{h}(t)] \times \mathbf{M}(t)], \quad (5)$$

где

$$g' = \frac{\gamma}{(1 + \alpha^2)M_s}, \quad h' = \frac{\gamma\alpha}{(1 + \alpha^2)M_s} = \alpha g' \quad (6)$$

и $\alpha = \gamma\eta M_s$ — безразмерный коэффициент затухания.

Записывая уравнение (5) по компонентам в декартовой лабораторной системе координат, имеем

$$\frac{1}{h'M_s} \frac{d}{dt} u_x(t) = [1 - u_x^2(t)]h_x(t) \\ - [\alpha^{-1}u_z(t) + u_x(t)u_y(t)]h_y(t) \\ + [\alpha^{-1}u_y(t) - u_z(t)u_x(t)]h_z(t) + [1 - u_x^2(t)]H_x(t) \\ - [\alpha^{-1}u_z(t) + u_x(t)u_y(t)]H_y(t) \\ + [\alpha^{-1}u_y(t) - u_z(t)u_x(t)]H_z(t), \quad (7)$$

$$\frac{1}{h'M_s} \frac{d}{dt} u_y(t) = [\alpha^{-1}u_z(t) - u_x(t)u_y(t)]h_x(t) \\ + [1 - u_y^2(t)]h_y(t) - [\alpha^{-1}u_x(t) + u_y(t)u_x(t)]h_z(t) \\ + [\alpha^{-1}u_z(t) - u_x(t)u_y(t)]H_x(t) + [1 - u_y^2(t)]H_y(t) \\ - [\alpha^{-1}u_x(t) + u_y(t)u_x(t)]H_z(t), \quad (8)$$

$$\frac{1}{h'M_s} \frac{d}{dt} u_z(t) = -[\alpha^{-1}u_y(t) + u_x(t)u_z(t)]h_x(t) \\ + [\alpha^{-1}u_x(t) - u_y(t)u_z(t)]h_y(t) \\ + [1 - u_z^2(t)]h_z(t) - [\alpha^{-1}u_y(t) + u_x(t)u_z(t)]H_x(t) \\ + [\alpha^{-1}u_x(t) - u_y(t)u_z(t)]H_y(t) \\ + [1 - u_z^2(t)]H_z(t). \quad (9)$$

Для однодоменной частицы с потенциалом магнитной анизотропии [5,6,8,9,24]

$$V = -Ku_z^2 = -K \cos^2 \vartheta, \quad (10)$$

где ϑ — угол между вектором \mathbf{M} и осью z ; в присутствии сильного постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 , приложенного под произвольным углом к оси z , суммарное поле \mathbf{H} имеет вид

$$\mathbf{H} = \gamma_1 H_0 \mathbf{i} + \gamma_2 H_0 \mathbf{j} + \left(\gamma_3 H_0 + \frac{2K}{M_s} u_z \right) \mathbf{k}, \quad (11)$$

где $\gamma_1 = \sin \Psi \cos \Phi$, $\gamma_2 = \sin \Psi \sin \Phi$, $\gamma_3 = \cos \Psi$ — направляющие косинусы вектора \mathbf{H}_0 (Ψ и Φ — полярный и азимутальный углы соответственно).

Стохастические нелинейные дифференциальные уравнения (7)–(9), содержащие члены с мультипликативным шумом $u_i u_j h_k$, требуют усреднения (см., например, [28,29]). Напомним, что стохастические дифференциальные уравнения общего вида для N переменных $\{\xi(t)\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = h_i(\{\xi(t)\}, t) + g_{ij}(\{\xi(t)\}, t)\Gamma_j(t) \quad (12)$$

с $\overline{\Gamma_i(t)} = 0$, $\overline{\Gamma_i(t_1)\Gamma_j(t_2)} = 2D\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2)$, $i, j = 1, \dots, N$, усредненные по правилу Стратоновича [28,29] в момент

времени t , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\xi_i(t + \tau) - x_i}{\tau} \\ &= h_i(\{\mathbf{x}\}, t) + Dg_{kj}(\{\mathbf{x}\}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\{\mathbf{x}\}, t), \quad (13) \end{aligned}$$

где $\xi_i(t + \tau)$ ($\tau > 0$) — решения уравнений (12) с начальными условиями $\xi_i(t) = x_i$ (в (12) и (13) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам j и k). Второй член в правой части (13) называется индуцированным шумом коэффициентом сноса [28,29]. Доказательство (13) приведено, например, в [29] (С. 54–55).

Тем же путем можно доказать, что усредненное уравнение для произвольной дифференцируемой функции $f(\{\xi\})$ имеет вид [22,30]

$$\begin{aligned} \frac{df(\{\mathbf{x}\})}{dt} &= h_i(\{\mathbf{x}\}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(\{\mathbf{x}\}) \\ &+ Dg_{kj}(\{\mathbf{x}\}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[g_{ij}(\{\mathbf{x}\}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(\{\mathbf{x}\}) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

где также подразумевается суммирование по повторяющимся индексам i, j, k .

При усреднении стохастических дифференциальных уравнений (7)–(9) следует использовать подход Стратоновича [28,29], так как с физической точки зрения рассматриваемые процессы магнитной релаксации удобнее всего моделировать в рамках этого подхода. В частности, в этом случае не требуется предварительного преобразования уравнений (7)–(9) в эквивалентную форму уравнений Ито, а также можно использовать обычные методы анализа.

При изучении магнитной релаксации удобно использовать сферические гармоники X_{nm} , определяемые как

$$X_{nm} = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$X_{n-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} X_{nm}^*, \quad m \geq 0,$$

где $P_n^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра [17]. В переменных u_x, u_y, u_z сферические гармоники X_{nm} записываются в следующем виде:

$$X_{nm} = (u_x + iu_y)^m \frac{d^m P_n(u_z)}{du_z^m},$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_{nm} &= m(u_x + iu_y)^{m-1} \frac{d^m P_n(u_z)}{du_z^m} (\dot{u}_x + i\dot{u}_y) \\ &+ (u_x + iu_y)^m \frac{d^{m+1} P_n(u_z)}{du_z^{m+1}} \dot{u}_z, \end{aligned}$$

уравнение для сферических гармоник X_{nm} можно получить, умножая (7)–(9) на

$$m(u_x + iu_y)^{m-1} \frac{d^m P_n(u_z)}{du_z^m},$$

$$im(u_x + iu_y)^{m-1} \frac{d^m P_n(u_z)}{du_z^m} \quad \text{и} \quad (u_x + iu_y)^m \frac{d^{m+1} P_n(u_z)}{du_z^{m+1}}$$

соответственно и затем суммируя их. Таким образом, после усреднения можно получить систему уравнений для усредненных сферических гармоник (детали вывода приведены в [22,27]):

$$\begin{aligned} \tau_N \frac{d}{dt} c_{n,m}(t) &+ \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{i\gamma_3 \xi m}{2\alpha} \right. \\ &\left. - \sigma \frac{n(n+1) - 3m^2}{(2n-1)(2n+3)} \right] c_{n,m}(t) \\ &= \sigma \left[\frac{(n+1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)} c_{n-2,m}(t) \right. \\ &\left. - \frac{n(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} c_{n+2,m}(t) \right] \\ &+ \frac{(n+m)}{2n+1} \left(\gamma_3 \xi \frac{n+1}{2} - \frac{im\sigma}{\alpha} \right) c_{n-1,m}(t) \\ &- \frac{(n-m+1)}{2n+1} \left(\gamma_3 \xi \frac{n}{2} + \frac{im\sigma}{\alpha} \right) c_{n+1,m}(t) \\ &+ \frac{\xi(\gamma_1 + i\gamma_2)}{4(2n+1)} \left[n(n-m+1)(n-m+2) c_{n+1,m-1}(t) \right. \\ &+ i\alpha^{-1}(2n+1)(n-m+1)(n+m) c_{n,m-1}(t) \\ &+ (n+1)(n+m-1)(n+m) c_{n-1,m-1}(t) \left. \right] \\ &- \frac{\xi(\gamma_1 - i\gamma_2)}{4(2n+1)} \left[n c_{n+1,m+1}(t) - i\alpha^{-1}(2n+1) c_{n,m+1}(t) \right. \\ &+ (n+1) c_{n-1,m+1}(t) \left. \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \frac{\nu K}{kT}, \quad \xi = \frac{\nu M_s H_0}{kT}, \quad \tau_N = \frac{\nu}{2kTh'}, \quad (16)$$

$$c_{n,m}(t) = \langle X_{nm} \rangle(t) - \langle X_{nm} \rangle_0, \quad (17)$$

угловые скобки $\langle \rangle$ означают обычное статистическое усреднение, $\langle \rangle_0$ обозначают равновесное среднее, определенное как

$$\langle A \rangle_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A(\vartheta, \varphi) W_0(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$\begin{aligned} W_0(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{Z} \exp \left[\sigma \cos^2 \vartheta + \xi (\gamma_1 \cos \varphi \sin \vartheta \right. \\ &\left. + \gamma_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \gamma_3 \cos \vartheta) \right] — \end{aligned}$$

равновесная функция распределения, Z — нормировочная константа. При выводе (15) было учтено, что рав-

новесные средние $\langle X_{nm} \rangle_0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} & \left[2\sigma \frac{n(n+1) - 3m^2}{(2n-1)(2n+1)} - n(n+1) \right] \langle X_{nm} \rangle_0 \\ & - \frac{2im\sigma}{\alpha} \left[\frac{n+m}{2n+1} \langle X_{n-1m} \rangle_0 + \frac{n-m+1}{2n+1} \langle X_{n+1m} \rangle_0 \right] \\ & + 2\sigma \left[\frac{(n+1)(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \langle X_{n-2m} \rangle_0 \right. \\ & \left. - \frac{n(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \langle X_{n+2m} \rangle_0 \right] \\ & + \xi\gamma_3 \left[\frac{(n+1)(n+m)}{2n+1} \langle X_{n-1m} \rangle_0 - i\alpha^{-1}m \langle X_{nm} \rangle_0 \right. \\ & \left. - \frac{n(n-m+1)}{2n+1} \langle X_{n+1m} \rangle_0 \right] \\ & + \frac{\xi(\gamma_1 + i\gamma_2)}{2(2n+1)} \left[n(n-m+1)(n-m+2) \langle X_{n+1m-1} \rangle_0 \right. \\ & + i\alpha^{-1}(2n+1)(n-m+1)(n+m) \langle X_{nm-1} \rangle_0 \\ & \left. + (n+1)(n+m-1)(n+m) \langle X_{n-1m-1} \rangle_0 \right] \\ & - \frac{\xi(\gamma_1 - i\gamma_2)}{2(2n+1)} \left[n \langle X_{n+1m+1} \rangle_0 - i\alpha^{-1}(2n+1) \langle X_{nm+1} \rangle_0 \right. \\ & \left. + (n+1) \langle X_{n-1m+1} \rangle_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Системы уравнений (15) и (18) могут быть также выведены из соответствующего уравнения Фоккера-Планка [2]

$$\begin{aligned} 2\tau_N \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ & \times \left\{ \sin \vartheta \left[\frac{\nu}{kT} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\alpha \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) W + \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\nu}{kT} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) W \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно теории линейной реакции [29], спад намагниченности $\langle \mathbf{M} \rangle(t)$ системы невзаимодействующих однодоменных ферромагнитных частиц при мгновенном выключении в момент времени $t = 0$ слабого постоянного внешнего поля \mathbf{H}_1 , параллельного \mathbf{H}_0 ($\nu(\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1)/kT \ll 1$ и $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{H}_1$), имеет вид

$$\langle M_{\parallel} \rangle(t) - \langle M_{\parallel} \rangle_0 = \chi_{\parallel} H_1 C_{\parallel}(t),$$

где $C_{\parallel}(t)$ — нормированная релаксационная функция продольной компоненты намагниченности, χ_{\parallel} — статическая магнитная восприимчивость. Продольная нормированная релаксационная функция $C_{\parallel}(t)$ и магнитная

восприимчивость $\chi_{\parallel}(\omega)$ выражаются через $c_{nm}(t)$

$$C_{\parallel}(t) = \frac{\gamma_3 c_{1,0}(t) + \operatorname{Re} \{ (\gamma_1 - i\gamma_2) c_{1,1}(t) \}}{\gamma_3 c_{1,0}(0) + \operatorname{Re} \{ (\gamma_1 - i\gamma_2) c_{1,1}(0) \}}, \quad (20)$$

$$\chi_{\parallel}(\omega) = \chi'_{\parallel}(\omega) - i\chi''_{\parallel}(\omega) = \chi_{\parallel} \{ 1 - i\omega \tilde{C}_{\parallel}(i\omega) \}, \quad (21)$$

где

$$\tilde{C}_{\parallel}(i\omega) = \int_0^{\infty} C_{\parallel}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (22)$$

$$\chi_{\parallel} = \frac{\nu M_s N_0}{H_1} \left(\gamma_3 c_{1,0}(0) + \operatorname{Re} \{ (\gamma_1 - i\gamma_2) c_{1,1}(0) \} \right) -$$

статическая восприимчивость, N_0 — число частиц в единице объема. Кроме того, в экспериментах может быть измерено, а из (20) и (22) рассчитано время релаксации τ_{\parallel} , определяемое как площадь под кривой $C_{\parallel}(t)$

$$\tau_{\parallel} = \int_0^{\infty} C_{\parallel}(t) dt = \tilde{C}_{\parallel}(0). \quad (23)$$

Формулы (21) и (23) справедливы для системы частиц, легкие оси которых ориентированы под одинаковыми углами относительно направления постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 . Если легкие оси частиц распределены хаотично в пространстве, то для расчета динамической восприимчивости времени релаксации необходимо усреднить уравнения (21) и (23) по углам Ψ и Φ .

3. Формальный подход к решению рекуррентных уравнений типа (15), где меняются два индекса, предлагался в [29]. Однако, применить этот подход на практике весьма затруднительно, так как приходится использовать (как и в исходном уравнении (2)) матрицы бесконечной размерности. Далее предлагается усовершенствованный метод решения уравнения (15), когда удастся свести расчетную задачу к операциям с матрицами конечной размерности.

Введем вектор $\mathbf{C}_n(t)$, состоящий из $8n$ элементов,

$$\mathbf{C}_n(t) = \begin{pmatrix} c_{2n,-2n}(t) \\ c_{2n,-2n+1}(t) \\ \vdots \\ c_{2n,2n}(t) \\ c_{2n-1,-2n+1}(t) \\ c_{2n-1,-2n+2}(t) \\ \vdots \\ c_{2n-1,2n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда уравнение (15) может быть преобразовано в матричное трехчленное дифференциально-разностное уравнение вида

$$\begin{aligned} \tau_N \frac{d}{dt} \mathbf{C}_n(t) &= \mathbf{Q}_n^- \mathbf{C}_{n-1}(t) + \mathbf{Q}_n \mathbf{C}_n(t) \\ &+ \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{C}_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Матрицы, входящие в это уравнение, задаются следующим образом:

$$Q_n = \begin{pmatrix} X_{2n} & W_{2n} \\ Y_{2n-1} & X_{2n-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_n^+ = \begin{pmatrix} Z_{2n} & Y_{2n} \\ 0 & Z_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad Q_n^- = \begin{pmatrix} V_{2n} & 0 \\ W_{2n-1} & V_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

причем

$$Q_1^- = \begin{pmatrix} V_2 \\ W_1 \end{pmatrix}, \quad C_0(t) = 0. \quad (27)$$

Размерности матриц Q_n , Q_n^+ , Q_n^- соответственно равны $8n \times 8n$, $8n \times 8(n+1)$, $8n \times 8(n-1)$. В свою очередь матрицы Q_n , Q_n^+ , Q_n^- состоят из подматриц X_i , Y_i , Z_i , V_i , W_i , которые приведены в Приложении.

Применяя общий метод решения матричных рекуррентных уравнений типа (25) [28], получаем точное решение для образа Лапласа $\tilde{C}_1(s)$ в терминах матричных непрерывных дробей

$$\tilde{C}_1(s) = \tau_N \left[\tau_N s I - Q_1 - Q_1^+ S_2(s) \right]^{-1} \times \left\{ C_1(0) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{k=2}^n Q_{k-1}^+ \left[\tau_N s I - Q_k - Q_k^+ S_{k+1}(s) \right]^{-1} \right) C_n(0) \right\}, \quad (28)$$

где I — единичная матрица,

$$S_n(s) = \left[\tau_N s I - Q_n - Q_n^+ S_{n+1}(s) \right]^{-1} Q_n^- \quad (29)$$

матричная непрерывная дробь.

Векторы начальных условий $C_n(0)$ могут быть также рассчитаны с помощью матричных непрерывных дробей методом Рискена [29], а именно в линейном (по полю \mathbf{H}_1) приближении начальные условия $c_{n,m}(0)$ имеют вид

$$c_{n,m}(0) = - \langle X_{nm} \rangle_0 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} X_{nm}(\vartheta, \varphi) W_0(\vartheta, \varphi) e^{\xi_1 (\gamma_1 \cos \varphi \sin \vartheta + \gamma_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \gamma_3 \cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \times \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} W_0(\vartheta, \varphi) e^{\xi_1 (\gamma_1 \cos \varphi \sin \vartheta + \gamma_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \gamma_3 \cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right)^{-1} \approx \xi_1 \left\{ \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2(2n+1)} [(n+m)(n+m-1) \langle X_{n-1m-1} \rangle_0 - (n-m+2)(n-m+1) \langle X_{n+1m-1} \rangle_0] + \frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2(2n+1)} [\langle X_{n+1m+1} \rangle_0 - \langle X_{n-1m+1} \rangle_0] + \frac{\gamma_3}{2n+1} [(n+m) \langle X_{n-1m} \rangle_0 + (n-m+1) \langle X_{n+1m} \rangle_0] - \langle X_{nm} \rangle_0 [\gamma_3 \langle X_{10} \rangle_0 + \text{Re} \{ (\gamma_1 - i\gamma_2) \langle X_{11} \rangle_0 \}] \right\}, \quad (30)$$

где

$$\xi_1 = \frac{\nu M_s H_1}{kT}. \quad (31)$$

Далее преобразуем уравнение (18) к матричному рекуррентному соотношению

$$Q_n^- R_{n-1} + Q_n R_n + Q_n^+ R_{n+1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

где

$$R_n = \begin{pmatrix} \langle X_{2n, -2n} \rangle_0 \\ \langle X_{2n, -2n+1} \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle X_{2n, 2n} \rangle_0 \\ \langle X_{2n-1, -2n+1} \rangle_0 \\ \langle X_{2n-1, -2n+2} \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle X_{2n-1, 2n-1} \rangle_0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Решение уравнения (32) имеет вид

$$R_n = S_n(0) R_{n-1} = S_n(0) S_{n-1}(0) \dots S_2(0) S_1(0), \quad (34)$$

где

$$S_n(0) = [-Q_n - Q_n^+ S_{n+1}(0)]^{-1} Q_n^-. \quad (35)$$

С учетом (30) и (34) начальные значения $C_n(0)$ имеют вид

$$C_n(0) = \xi_1 \left[K_n^- + [K_n + K_n^+ S_{n+1}(0)] \times S_n(0) \right] S_{n-1}(0) \dots S_1(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (36)$$

причем

$$C_1(0) = \xi_1 \left\{ K_1^- + [K_1 + K_1^+ S_2(0)] S_1(0) \right\}. \quad (37)$$

Здесь матрицы K_n , K_n^+ , K_n^- задаются следующим образом:

$$K_n = \begin{pmatrix} F_{2n} & D_{2n} \\ G_{2n-1} & F_{2n-1} \end{pmatrix},$$

$$K_n^+ = \begin{pmatrix} 0 & G_{2n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_n^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{2n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

причем

$$K_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ D_1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы K_n , K_n^+ , K_n^- состоят из подматриц F_n , D_n , G_n , которые приведены в Приложении.

Точное решение в терминах матричных непрерывных дробей (см. (28)) удобно для численных расчетов. Все матричные непрерывные дроби и ряд сходятся очень быстро, так что 10–12 итераций ”вниз” при вычислении этих матричных дробей и 11–14 членов в ряде (28) достаточно для достижения точности не меньше чем шести значащих цифр в большинстве случаев. При этом максимальная размерность всех необходимых при расчетах матриц имеет порядок 10^2 , что позволяет проводить вычисления на обычном персональном компьютере.

4. Поведение времени релаксации $\tau_{||}$ как функции угла Ψ при $\Phi = 0$, $\sigma = 10$ и $\alpha = 100$ (сильное демпфирование) и различных значениях параметра $h = \xi/2\sigma$ показано на рис. 1. Как видно из рис. 1, $\tau_{||}$ имеет глубокий минимум при $\Psi = \pi/2$ (кривая симметрична относительно этой прямой), так как в этом случае переменное поле \mathbf{H}_1 перпендикулярно легкой оси частицы, что соответствует условию наблюдения ферромагнитного резонанса, который определяется трансверсальной компонентой динамической восприимчивости частицы. Соответственно низкочастотная (активационная) мода, связанная с переориентацией намагниченности через потенциальный барьер, не вносит вклада во время релаксации. При возрастании напряженности постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 активационный процесс подавляется, что также приводит к уменьшению вклада низкочастотной релаксационной моды в $\tau_{||}$. Наиболее наглядно эти эффекты проявляются в спектрах мнимой части $\chi''_{||}(\omega)$, показанных на рис. 2–4 (расчеты были выполнены для $\chi_{||} = 1$ и $\Phi = 0$). На этих рисунках видны два пика в спектре потерь. Первый (низкочастотный) пик проявляется на частотах порядка средней частоты переориентации намагниченности через потенциальный барьер. Характерная частота этой низкочастотной моды определяется обратной величиной наименьшего собственного значения λ_1 уравнения Фоккера–Планка (19). При $\Psi \approx 0$ и $\sigma \gg 1$ эта величина определяется уравнением [2]

$$\lambda_1 = \frac{2\tau_N\sigma^{3/2}e^{-\sigma-\xi^2/4\sigma^2}}{\pi^{1/2}} \times \left[1 - \frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right] \left(\cosh \xi - \frac{\xi}{2\sigma} \sinh \xi\right). \quad (39)$$

Второй пик обусловлен вкладом высокочастотных мод и при $\xi, \sigma \gg 1$ располагается на частоте $\approx (2\sigma + \xi)/\tau_N$ [21]. При $\Psi \approx \pi/2$ на рис. 2 и 3 отчетливо проявляется пик ферромагнитного резонанса. Релаксационное поведение спектров $\chi''_{||}(\omega)$ наблюдается

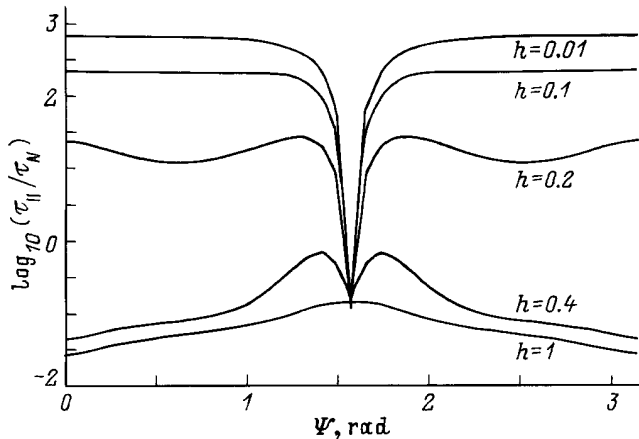


Рис. 1. $\log_{10}(\tau_{||}/\tau_N)$ как функция угла Ψ при $\sigma = 10$, $\alpha = 100$ и различных значениях параметра $h = \xi/2\sigma$.

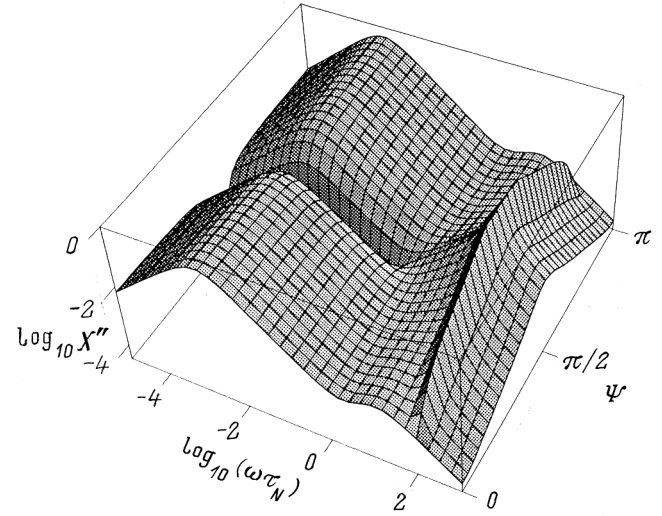


Рис. 2. $\log_{10}(\chi''_{||})$ как функции $\log_{10}(\omega\tau_N)$ и угла Ψ при $h = 0.01$ и $\alpha = 0.1$.

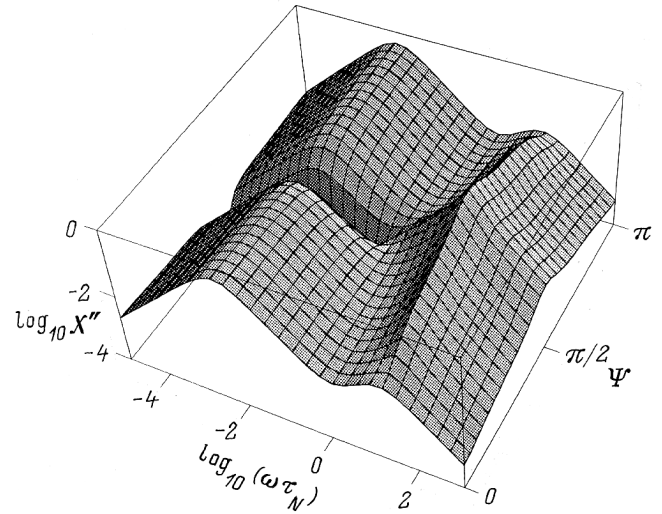


Рис. 3. $\log_{10}(\chi''_{||})$ как функции $\log_{10}(\omega\tau_N)$ и угла Ψ при $h = 0.1$ и $\alpha = 0.5$.

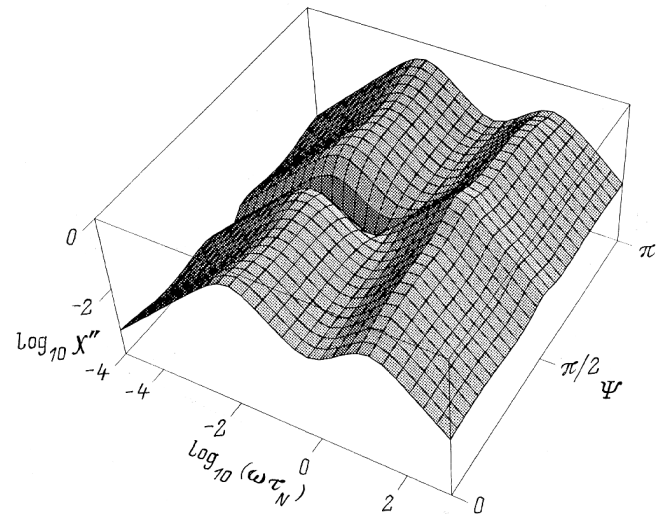


Рис. 4. $\log_{10}(\chi''_{||})$ как функции $\log_{10}(\omega\tau_N)$ и угла Ψ при $h = 0.17$ и $\alpha = 1$.

для малых параметров анизотропии и поля ($\xi, \sigma \approx 0$) или большого демпфирования. Как видно на рис. 2–4, спектры сильно зависят от параметра демпфирования α . Методы экспериментальных и теоретических оценок α обсуждались, например, в [12,17,32], но, по-видимому, какие-либо надежные экспериментальные данные отсутствуют. Некоторые теоретические оценки α дают значения порядка 0.01–0.1 [12,32]. Рис. 4 также наглядно демонстрирует эффект подавления низкочастотной моды постоянным полем. Этот эффект, впервые обнаруженный в [15], обусловлен истощением населенности верхней потенциальной ямы [21] и, в частности, приводит к тому, что при значениях параметра h , превышающих определенное критическое значение (при $\Psi \approx 0$ это значение ≈ 0.166 [21]), поведение времени релаксации τ_{\parallel} перестает носить аррениусовский характер, т.е. отсутствует экспоненциальный рост времени релаксации τ_{\parallel} при возрастании величины потенциального барьера.

Таким образом, продольная компонента магнитной восприимчивости системы невзаимодействующих однодоменных частиц может быть оценена из точного уравнения (28). При получении этих результатов предполагалось, что все частицы являются идентичными. Чтобы учесть полидисперсность частиц, нужно также усреднить восприимчивость по соответствующим функциям распределения (например, по объемам частиц).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16762-а).

Приложение

Подматрицы X_l, Y_l, Z_l, V_l, W_l из (26) имеют вид

$$X_l[(2l+1) \times (2l+1)] = \begin{pmatrix} x_{l,-l} & x_{l,-l}^+ & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{l,-l+1}^- & x_{l,-l+1} & x_{l,-l+1}^+ & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_{l,-l+2} & x_{l,-l+2}^+ & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{l,l-1} & x_{l,l-1}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{l,l}^- & x_{l,l} \end{pmatrix}, \quad (\text{П1})$$

$$Y_l[(2l+1) \times (2l+3)] = \begin{pmatrix} y_{l,-l}^- & y_{l,-l} & y_{l,-l}^+ & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{l,-l+1}^- & y_{l,-l+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{l,-l+2}^- & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{l,l-1} & y_{l,l-1}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{l,l}^- & y_{l,l} & y_{l,l}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{П2})$$

$$W_l[(2l+1) \times (2l-1)] = \begin{pmatrix} w_{l,-l}^+ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_{l,-l+1} & w_{l,-l+1}^+ & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_{l,-l+2}^- & w_{l,-l+2} & w_{l,-l+2}^+ & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_{l,l-2} & w_{l,l-2}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_{l,l-1}^- & w_{l,l-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_{l,l}^- \end{pmatrix}, \quad (\text{П3})$$

$$Z_l[(2l+1) \times (2l+5)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_{l,-l} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_{l,-l+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z_{l,l-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{l,l} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П4})$$

$$V_l[(2l+1) \times (2l-3)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{l,-l+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_{l,-l+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{l,l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_{l,l-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l=2,3,\dots \quad (\text{П5})$$

В скобках указаны размерности подматриц. Элементы подматриц X_l, Y_l, Z_l, V_l, W_l задаются выражениями

$$\begin{aligned} x_{l,m}^- &= i \frac{\xi(\gamma_1 + i\gamma_2)(l+m)(l-m+1)}{4\alpha}, \\ x_{l,m} &= \frac{\sigma(l(l+1) - 3m^2)}{(2l-1)(2l+3)} - \frac{l(l+1)}{2} - i \frac{m\xi\gamma_3}{2\alpha}, \\ x_{l,m}^+ &= i \frac{\xi}{4\alpha}(\gamma_1 - i\gamma_2), \\ y_{l,m}^- &= \frac{l\xi(\gamma_1 + i\gamma_2)(l-m+1)(l-m+2)}{4(2l+1)}, \\ y_{l,m} &= -\frac{l-m+1}{2(2l+1)} \left(l\xi\gamma_3 + i \frac{2\sigma m}{\alpha} \right), \\ y_{l,m}^+ &= -\frac{l\xi}{4(2l+1)}(\gamma_1 - i\gamma_2), \\ w_{l,m}^- &= \frac{\xi(l+1)(\gamma_1 + i\gamma_2)(l+m)(l+m-1)}{4(2l+1)}, \\ w_{l,m} &= \frac{l+m}{2(2l+1)} \left(\xi\gamma_3(l+1) - i \frac{2\sigma m}{\alpha} \right), \\ w_{l,m}^+ &= -\frac{\xi(l+1)}{4(2l+1)}(\gamma_1 - i\gamma_2), \end{aligned}$$

$$z_{l,m} = -\frac{\sigma l(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)},$$

$$v_{l,m} = \frac{\sigma(l+1)(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}.$$

Подматрицы F_n , D_n , G_n в (38) имеют вид

$$F_l[(2l+1) \times (2l+1)] = -\operatorname{Re} [\gamma_3 \langle X_{1,0} \rangle_0 + (\gamma_1 - i\gamma_2) \langle X_{1,1} \rangle_0] I, \quad (\text{П6})$$

$$G_l[(2l+1) \times (2l+3)]$$

$$= \begin{pmatrix} g_{l,-l}^- & g_{l,-l} & g_{l,-l}^+ & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{l,-l+1}^- & g_{l,-l+1} & g_{l,-l+1}^+ & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{l,-l+2}^- & g_{l,-l+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{l,-l+3}^- & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{l,l-1} & g_{l,l-1}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{l,l}^- & g_{l,l} & g_{l,l}^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{П7})$$

$$D_l[(2l+1) \times (2l-1)]$$

$$= \begin{pmatrix} d_{l,-l}^+ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{l,-l+1} & d_{l,-l+1}^+ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{l,-l+2}^- & d_{l,-l+2} & d_{l,-l+2}^+ & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{l,-l+3}^- & d_{l,-l+3} & d_{l,-l+3}^+ & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{l,l-2} & d_{l,l-2}^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{l,l-1}^- & d_{l,l-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{l,l}^- \end{pmatrix}, \quad (\text{П8})$$

где элементы подматриц задаются выражениями

$$g_{l,m} = \frac{\gamma_3(l-m+1)}{2l+1},$$

$$g_{l,m}^- = -\frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)(l-m+2)(l-m+1)}{2(2l+1)},$$

$$g_{l,m}^+ = -d_{l,m}^+ = \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)}{2(2l+1)}, \quad d_{l,m} = \frac{\gamma_3(l+m)}{2l+1},$$

$$d_{l,m}^- = \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)(l+m)(l+m-1)}{2(2l+1)}.$$

- [6] T.L. Gilbert. Phys. Rev. **100**, 1243 (1956) [Abstract only; full report, Armour Research Foundation Project, A059, Supplementary Report, May 1, 1956].
- [7] W.F. Brown. Jr. Phys. Rev. **130**, 1677 (1963); J. Appl. Phys. Suppl. **30**, 130S (1959).
- [8] M.C. Wang, G.E. Uhlenbeck. Rev. Mod. Phys. **17**, 323 (1945).
- [9] R.L. Stratonovich. Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control. Elsevier, N. Y. (1968).
- [10] A. Aharoni. Phys. Rev. **177**, 763 (1969).
- [11] E.C. Stoner, E.P. Wohlfahrt. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A240**, 599 (1948).
- [12] Ю.Л. Райхер, М.И. Шлиомис. ЖЭТФ **67**, 1060 (1974).
- [13] P.C. Гехт, В.А. Игнатченко, Ю.Л. Райхер, М.И. Шлиомис. ЖЭТФ **67**, 1300 (1976).
- [14] Д.А. Гаранин, В.В. Ищенко, Л.В. Панина. ТМФ **82**, 242 (1990).
- [15] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron. Phys. Rev. **B51**, 15947 (1995).
- [16] W.T. Coffey, P.J. Cregg, Yu.P. Kalmykov. In: Advances in Chemical Physics / Ed. I. Prigogine and S.A. Rice. Wiley, N. Y. (1993). V. 83. P. 263–464.
- [17] Yu.L. Raikher, M.I. Shliomis. In: Advances in Chemical Physics / Ed. W.T. Coffey; Series Ed. I. Prigogine and S.A. Rice. Wiley, N. Y. (1994). V. 87. P. 595.
- [18] Ю.Л. Райхер, В.И. Степанов. ЖЭТФ **102**, 1409 (1992).
- [19] M.I. Shliomis, V.I. Stepanov. In: Advances in Chemical Physics / Ed. W.T. Coffey; Series Ed. I. Prigogine and S.A. Rice. Wiley, N. Y. (1994). V. 87. P. 1.
- [20] Э.К. Садыков, А.Г. Исавнин. ФТТ **38**, 7, 2104 (1996).
- [21] D.A. Garanin. Phys. Rev. **E54**, 3250 (1996).
- [22] Yu.P. Kalmykov, W.T. Coffey. Phys. Rev. **B56**, 6, 3325 (1997).
- [23] H. Pfeiffer. Phys. Stat. Sol. (b) **118**, 295 (1990).
- [24] H. Pfeiffer. Phys. Stat. Sol. (b) **122**, 377 (1990).
- [25] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, J.L. Dormann. L.J. Geoghegan, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron, A.W. Wickstead. Phys. Rev. **B52**, 15951 (1995).
- [26] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, J.L. Dormann. L.J. Geoghegan, E.C. Kennedy. Phys. Rev. B, in press (1997).
- [27] Yu.P. Kalmykov. J. Mol. Liquids. **69**, 117 (1996).
- [28] W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron. The Langevin Equation. World Scientific, Singapore (1996).
- [29] H. Risken. The Fokker-Planck Equation. Springer, Berlin (1989).
- [30] W.T. Coffey, J.-L. Déjardin, Yu.P. Kalmykov, S.V. Titov. Phys. Rev. **E54**, 6462 (1996).
- [31] J.-L. Déjardin, P.-M. Déjardin, Yu.P. Kalmykov. J. Chem. Phys. **107**, 2, 508 (1997).
- [32] I. Klik, L. Gunther. J. Stat. Phys. **60**, 473 (1990).

Список литературы

- [1] I. Neel. Ann. Geophys. **5**, 99 (1949).
- [2] W.F. Brown. Jr. IEEE Trans. Mag. **15**, 1196 (1979).
- [3] H.B. Braun, H.N. Bertram. J. Appl. Phys. **75**, 4609 (1994).
- [4] C.P. Bean, J.D. Livingston. J. Appl. Phys. Suppl. **30**, 1205 (1959).
- [5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Phys. Z. Sowjetunion **8**, 153 (1935).