Физика твердого тела, 1998, том 40, № 3

Спектр электрона в квантовой сверхрешетке цилиндрической симметрии

© Н.В. Ткач, И.В. Пронишин, А.М. Маханец

Черновицкий государственный университет,
274012 Черновцы, Украина

(Поступила в Редакцию 17 июля 1997 г.
В окончательной редакции 30 сентября 1997 г.)

Изучена квантовая сверхрешетка аксиальной симметрии — гетероструктура, в которой два контактирующих полупроводниковых материала в виде коаксиальных проволок наноразмерного сечения образуют периодическую структуру в радиальном направлении. Показано, что энергетический спектр электрона представляет собой чередование разрешенных и запрещенных зон. Исследован закон дисперсии электрона для разных значений периода потенциала, толщин полупроводниковых слоев и радиуса внутреннего кристалла системы. Показано, что когерентная эффективная масса электрона квантовой сверхрешетки оказывается тензором: продольная составляющая близка по значению к эффективной массе электрона пролупроводникового материала, характеризующего квантовую яму сверхрешетки, а радиальная составляющая существенно зависит от периода потенциала, толщин коаксиальных полупроводниковых слоев и радиуса ядра гетеросистемы, причем в разных разрешенных зонах она положительная или отрицательная.

Полупроводниковые гетерогенные системы наноразмеров являются важными объектами исследования физики твердого тела в связи с возможностью их использования в элементной базе ЭВМ новых поколений, в лазерной технике. Значительный интерес вызывают исследования квазиодномерных (квантовые проволоки) и нульмерных (квантовые точки) гетероструктур [1–6], поскольку в этих системах можно наблюдать уникальные оптические и кинетические свойства, не характерные для массивных кристаллов.

В подавляющем большинстве работ [1–3,7] экспериментально и теоретически исследовались спектры квазичастиц в простых гетеросистемах — полупроводниковом нанокристалле определенной геометрии, помещенном в диэлектрическую среду. Несомненый интерес представляет исследование спектров квазичастиц в неоднородных полупроводниковых гетероструктурах — цилиндрических квантовых проволоках, вложенных друг в друга и образующих периодическую структуру в плоскости, перпендикулярной оси системы. Поскольку такая система имеет наноразмерный радиальный период, она является квантовой сверхрешеткой аксиальной симметрии со специфическими свойствами, отличающими ее от трехмерных аналогов. В настоящее время экспериментально реализована [6] сферическая гетероструктура с несколькими полупроводниковыми слоями $CdS/HgS/CdS/H_2O$, поэтому создание цилиндрической квантовой сверхрешетки вполне реально.

Цель настоящей работы — исследовать спектр электронов в квантовой сверхрешетке аксиальной симметрии, радиальный период которой содержит два контактирующих полупроводниковых материала.

1. Квантовая цилиндрическая сверхрешетка

Исследует гетеросистему, в которой два контактирующих полупроводниковых материала в виде коаксиальных проволок наноразмерного сечения образуют периодическую структуру в плоскости, перпендикулярной оси системы (рис. 1, a). Такая цилиндрическая квантовая сверхрешетка создает для электрона периодическое радиально-симметричное поле (отсчет энергии производится вверх от дна потенциальной ямы) (рис. 1, b)

$$U(\rho)=\begin{cases}U_0, & \rho_0+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+a+pL,\\ 0, & \rho\leqslant\rho_0,\ \rho_0+a+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+(p+1)L,\end{cases}$$

$$p=0,1,2,\ldots. \tag{1}$$

Период потенциала $L=a+b$, a — ширина барьера (материал 1), b — ширина квантовой ямы (материал 2), ρ_0 — радиус внутреннего цилиндра (материал 2). В каждой среде электрон характеризуется своей эффективной массой, поэтому

$$\mu(\rho)=\begin{cases}\mu_1, & \rho_0+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+a+pL,\\ \mu_2, & \rho\leqslant\rho_0,\ \rho_0+a+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+(p+1)L,\end{cases}$$

$$p=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

В связи с зависимостью $\mu(\rho)$ переменные ρ и z в уравнении Шредингера не разделяются, поэтому для его

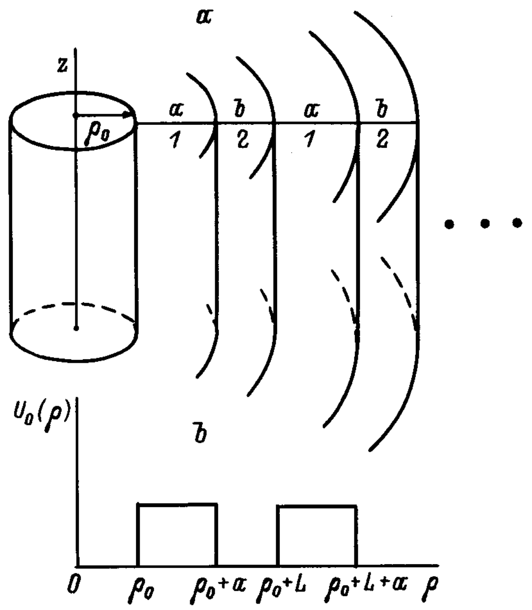

Рис. 1. Геометрия цилиндрической сверхрешетки (a) и потенциальная энергия электрона в сверхрешетке как функция радиус-вектора ρ (b).

решения применим теорию возмущений. Гамильтониан электрона в цилиндрической системе координат представим в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\rho, \varphi, z) + \Delta\hat{H}(\rho, z), \tag{3}$$

где невозмущенный гамильтониан

$$\hat{H}(\rho, \varphi, z) = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\nabla_{\rho,\varphi}\frac{1}{\mu(\rho)}\nabla_{\rho,\varphi} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + U(\rho), \tag{4}$$

а возмущение

$$\Delta\hat{H}(\rho, z) = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{\mu(\rho)} - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{5}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2). \tag{6}$$

Из уравнения Шредингера

$$\left\{\hat{H}_0(\rho, \varphi, z) - E^0_{nmk}\right\}\Psi^0_{nmk}(\rho, \varphi, z) = 0 \tag{7}$$

определяются энергетический спектр и волновые функции электрона в нулевом приближении

$$E^0_{nmk} = E_{nm} + \frac{\hbar^2 k^2}{2\bar{\mu}}, \tag{8}$$

$$\Psi^0_{nmk}(\rho, \varphi, z) = (2\pi h)^{-1/2} e^{i(m\varphi + kz)}\Psi_{nm}(\rho), \tag{9}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ — радиальное квантовое число, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — магнитное квантовое число, k — квазиимпульс электрона в продольном направлении, E_{nm} — энергетический спектр радиального движения электрона, $\Psi_{nm}(\rho)$ — радиальная волновая функция, h — длина основной области проволоки вдоль оси 0z.

Энергия электрона в первом приближении равна

$$E^{(1)}_{nmk} = E^0_{nmk} + \left\langle nmk|\Delta\hat{H}|nmk\right\rangle. \tag{10}$$

После преобразований соотношение (10) принимает вид

$$E^{(1)}_{nmk} = E^0_{nmk} + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_\parallel}, \tag{11}$$

где величина $\mu_\parallel$ — продольная составляющая когерентной эффективной массы электрона квантовой цилиндрической сверхрешетки в первом приближении,

$$\mu_\parallel = \frac{\bar{\mu}}{1 + I\mu}, \tag{12}$$

где

$$I = \left\langle nm\left|\frac{1}{\mu(\rho)} - \frac{1}{\bar{\mu}}\right|nm\right\rangle. \tag{13}$$

Поскольку потенциальная энергия $U(\rho)$ является периодической функцией (с периодом L), радиальное уравнение Шредингера инвариантно по отношению ко всем трансляциям, кратным L

$$U(\rho + L) = U(\rho), \quad \rho \to \rho + pL, \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Согласно теореме Флоке [8], радиальная волновая функция электрона в области периодичности потенциала $\rho \geqslant \rho_0$ имеет вид

$$\Psi_{nm}(\rho + pL) = e^{ipqL}\Psi_{nm}(\rho), \tag{15}$$

где q — вещественное число, значения которого лежат в интервале $-\pi/L \leqslant q \leqslant \pi/L$. Соотношение (15) возможно лишь в том случае, если

$$\Psi_{nm}(\rho) = e^{iq\rho} f_{nmq}(\rho), \tag{16}$$

где $f_{nmq}(\rho)$ — периодическая функция, т.е.

$$f_{nmq}(\rho) = f_{nmq}(\rho + L). \tag{17}$$

Учитывая вышесказанное и используя решения радиальных уравнений Шредингера для соответствующих областей гетероструктуры и граничных условий, которые требуют непрерывности радиальных волновых функций и плотности их потоков на границах областей

$$\Psi_{nmp}(\rho_p) = \Psi_{nm,p+1}(\rho_p), \tag{18}$$

$$\frac{1}{\mu_p}\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi_{nmp}(\rho_p) = \frac{1}{\mu_{p+1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi_{nm,p+1}(\rho_p), \tag{19}$$

получаем радиальную волновую функцию в виде

$$\Psi_{nm}(\rho)=$$
$$\begin{cases} A_0 J_{|m|}(\alpha\rho), & \rho\leqslant\rho_0,\\ A_0 e^{iq\rho}\begin{cases}\Gamma_1 I_{|m|}(\alpha\rho)+\Gamma_2 K_{|m|}(\alpha\rho), \\ \qquad \rho_0+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+a+pL,\\ \Gamma_3 I_{|m|}(\beta\rho)+\Gamma_4 N_{|m|}(\beta\rho),\\ \qquad \rho_0+a+pL\leqslant\rho\leqslant\rho_0+(p+1)L.\end{cases}\end{cases} \tag{20}$$

В выражении (20) $J_{|m|}(\rho)$, $N_{|m|}(\rho)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_{|m|}(\rho)$, $K_{|m|}(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя, Γ_i $(i=1{-}4)$ — определенные из системы уравнений (18), (19) коэффициенты, которые из-за громоздкости выражений здесь не приводятся; величины

$$\alpha\equiv\alpha_{nm}=\hbar^{-1}\sqrt{2\mu_1(U_0-E_{nm})},$$
$$\beta\equiv\beta_{nm}=\hbar^{-1}\sqrt{2\mu_2 E_{nm}} \tag{21}$$

определяют спектр системы.

Нормировка радиальной волновой функции (20) определяет коэффициент A_0

$$A_0=\left[\int\limits_0^\infty \left|\Psi_{nm}(\rho)\right|^2\rho d\rho\right]^{-1/2}. \tag{22}$$

Решения радиальных уравнений Шредингера для соответствующих областей гетеросистемы с учетом соотношения (15) представим в виде

$$\Psi_{nm}(\rho)=$$
$$\begin{cases} A_0 J_{|m|}(\beta\rho), & \rho\leqslant\rho_0,\\ A_1 I_{|m|}(\alpha\rho)+B_1 K_{|m|}(\alpha\rho), & \rho_0\leqslant\rho\leqslant\rho_1,\\ A_2 J_{|m|}(\beta\rho)+B_2 N_{|m|}(\beta\rho), & \rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2,\\ e^{iqL}\Big[A_1\frac{I_{|m|}(\alpha\rho_0)}{I_{|m|}(\alpha\rho_2)}I_{|m|}(\alpha\rho) & \\ \qquad +B_1\frac{K_{|m|}(\alpha\rho_0)}{K_{|m|}(\alpha\rho_2)}K_{|m|}(\alpha\rho)\Big], & \rho_2\leqslant\rho\leqslant\rho_2+a,\end{cases} \tag{23}$$

где $\rho_1=\rho_0+a$, $\rho_2=\rho_0+L$.

Учитывая граничные условия (18), (19) для волновых функций (23), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов A_s, B_s (s=0,1,2) и дисперсионное уравнение для определения спектра энергий

$$F(E_{nm})=\cos(qL), \tag{24}$$

где функция F определена выражением

$$F(E_{nm})=\frac{\pi\alpha\beta\rho_1\rho_2}{2}$$
$$\times\Bigg\{\Big[J_{|m|}(\beta\rho_2)N'_{|m|}(\beta\rho_1)-N_{|m|}(\beta\rho_2)J'_{|m|}(\beta\rho_1)\Big]$$
$$\times\Bigg[I_{|m|}(\alpha\rho_1)K_{|m|}(\alpha\rho_0)\frac{K'_{|m|}(\alpha\rho_2)}{K_{|m|}(\alpha\rho_2)}$$
$$-K_{|m|}(\alpha\rho_1)I_{|m|}(\alpha\rho_0)\frac{I'_m(\alpha\rho_2)}{I_{|m|}(\alpha\rho_2)}\Bigg]$$
$$+\Big[J_{|m|}(\beta\rho_1)N'_{|m|}(\beta\rho_2)-N_{|m|}(\beta\rho_1)J'_{|m|}(\beta\rho_2)\Big]$$
$$\times\Big[I_{|m|}(\alpha\rho_0)K_{|m|}(\alpha\rho_1)-K_{|m|}(\alpha\rho_0)I_{|m|}(\alpha\rho_1)\Big]$$
$$+\frac{\mu_1\beta}{\mu_2\alpha}\Big[J'_{|m|}(\beta\rho_1)N'_{|m|}(\beta\rho_2)-N'_{|m|}(\beta\rho_1)J'_{|m|}(\beta\rho_2)\Big]$$
$$\times\Big[I_{|m|}(\alpha\rho_1)K_{|m|}(\alpha\rho_0)-K_{|m|}(\alpha\rho_1)I_{|m|}(\alpha\rho_0)\Big]$$
$$+\frac{\mu_2\alpha}{\mu_1\beta}\Bigg[K_{|m|}(\alpha\rho_0)I'_{|m|}(\alpha\rho_1)\frac{K'_{|m|}(\alpha\rho_2)}{K_{|m|}(\alpha\rho_2)}$$
$$-I_{|m|}(\alpha\rho_0)K'_{|m|}(\alpha\rho_1)\frac{I'_{|m|}(\alpha\rho_2)}{I_{|m|}(\alpha\rho_2)}\Bigg]$$
$$\times\Big[J_{|m|}(\beta\rho_1)N_{|m|}(\beta\rho_2)-N_{|m|}(\beta\rho_1)J_{|m|}(\beta\rho_2)\Big]\Bigg\}. \tag{25}$$

В случае, если

$$\left|F(E_{nm})\right|\leqslant 1, \tag{26}$$

уравнение (24) имеет действительные решения, и энергия E_{nm} является функцией от квантового числа q, играющего роль радиального квазиимпульса. В противном случае возникают запрещенные зоны энергий. В результате энергетический спектр электрона E_{nm} представляет собой чередование разрешенных и запрещенных зон.

2. Обсуждение результатов

В качестве материалов, реализующих рассмотренную периодическую в радиальном направлении структуру, выберем широко используемые экспериментаторами [6] полупроводники CdS (материал 1), HgS (материал 2) кубической гранецентрированной модификации (β). Параметры этих кристаллов следующие [6]: $U_0=1.2\,\mathrm{eV}$, эффективные массы электрона $\mu_1=\mu_{\mathrm{CdS}}=0.2\mu_0$, $\mu_2=\mu_{\mathrm{HgS}}=0.036\mu_0$, μ_0 — масса электрона в вакууме, постоянные решетки $c_1=c_{\mathrm{CdS}}=5.818\,\mathrm{\AA}$, $c_2=c_{\mathrm{HgS}}=5.851\,\mathrm{\AA}$.

Перейдем к анализу энергетического спектра электрона в цилиндрической сверхрешетке CdS/HgS с наноразмерным радиальным периодом. На рис. 2 изображен закон дисперсии $E_{nm}(q)$ электрона в этой гетероструктуре при $m = 0$, фиксированном радиусе внутреннего кристалла (HgS) $\rho_0 = 20c_2$ и разных значениях толщин полупроводниковых слоев a и b. Гетеросистема характеризуется конечным по величине барьером U_0, и поэтому в квантовой яме существует конечное число зон разрешенных энергий. Серии кривых на рис. 2 при фиксированном m, начиная с нижней кривой, отвечают значения радиального квантового числа $n = 0, 1, 2, \ldots$. При малых значениях параметра b в области энергий $0 \leqslant E_{nm} \leqslant U_0$ существует одна разрешенная зона (основное состояние — $n = 0$, $m = 0$), энергетическое положение которой определено размерами ямы HgS. С увеличением ширины b потенциальной ямы HgS и уменьшением ширины a барьера CdS в этой области появляется следующая разрешенная зона, которая монотонно сдвигается в направлении дна ямы при этом происходит ее расширение. Чем больше размеры b ямы HgS, тем больше разрешенных зон находится в ней.

Исследования показывают, что чем больший период потенциала L, тем больше разрешенных зон находится в области энергий $0 \leqslant E_{nm} \leqslant U_0$.

Одна из особенностей зон, изображенных на рис. 2, состоит в следующем: зависимости $E_{nm}(q)$ у дна и у потолка каждой зоны таковы, что $dE_{nm}/dq = 0$, $d^2E^2_{nm}/dq^2 \neq 0$. В разрешенных зонах, которым соответствует квантовое число $n = 0, 2, 4, \ldots$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$, кривизна функции $E_{nm}(q)$ такова, что радиальная составляющая эффективной массы электрона квантовой сверхрешетки (когерентного состояния) μ_{nm} принимает положительные (отрицательные) значения. Эти особенности присущи всем разрешенным зонам системы.

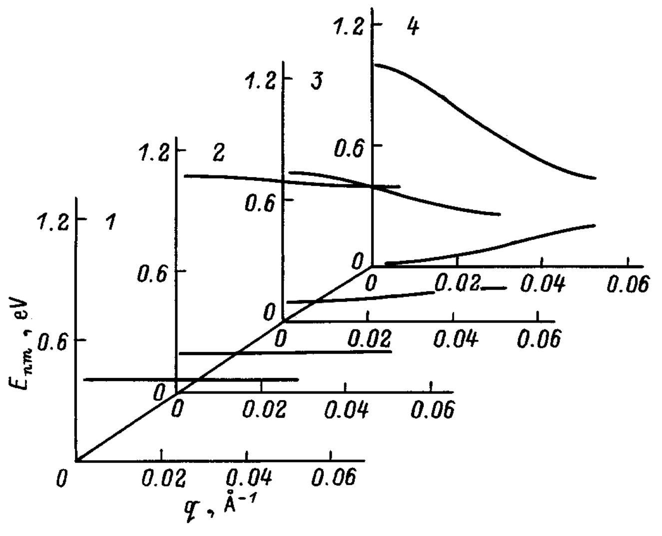

Рис. 2. Закон дисперсии электрона при $m = 0$, $\rho_0 = 20c_2$ и разных значениях ширины барьера и квантовой ямы. *1* — $a = 6c_1$, $b = 4c_2$, *2* — $a = 3c_1$, $b = 7c_2$, *3* — $a = 2c_1$, $b = 8c_2$, *4* — $a = 0$, $b = 10c_2$.

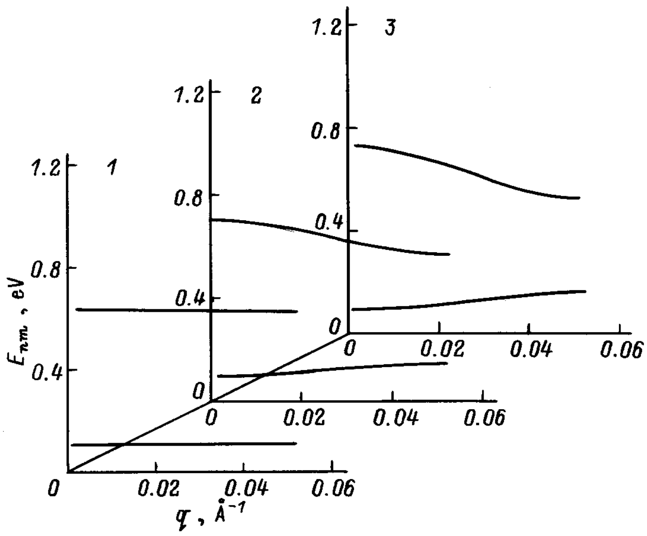

Рис. 3. Закон дисперсии электрона при $m = 0$, $L = 1c_1 + 9c_2$ для разных значений радиуса ρ_0 внутреннего кристалла. $\rho_0 = 0$ (*1*), $20c_2$ (*2*) $100c_2$ (*3*).

На рис. 3 изображена зависимость энергии E_{nm} от радиального волнового вектора q при $m = 0$ и фиксированном периоде потенциала $L = a + b$, $a = 1c_1$, $b = 9c_2$ для различных значений радиуса ρ_0 внутреннего кристалла HgS. При таком L и значении $\rho_0 = 0$ (рис. 3, a) в квантовой яме HgS сверхрешетки существуют две зоны разрешенных энергий (основное $(n = 0,\ m = 0)$ и возбужденное $(n = 1,\ m = 0)$ состояния электрона). Энергии этих состояний постоянные во всей зоне Бриллюэна (энергетические уровни), и электрон, находясь в них, характеризуется бесконечно большой эффективной массой μ_{nm}. Размеры ядра гетеросистемы существенно влияют на ширину разрешенных зон, на кривизну закона дисперсии $E_{nm}(q)$, а значит, и на эффективную массу μ_{nm} электрона. Чем больше ρ_0, тем больше распрямляются границы цилиндрических поверхностей, происходит расширение обеих зон и уменьшается величина радиальной составляющей эффективной массы электрона. На рис. 4 изображены зависимости $\mu_{nm}(\rho_0)$ для разных толщин слоев полупроводниковых материалов: a (CdS) и b (HgS) при одинаковом периоде потенциала L. Эффективная масса μ_{nm} электрона в основном состоянии $(n = 0,\ m = 0)$ положительная, в возбужденном состоянии $(n = 1,\ m = 0)$ — отрицательная. Чем больше ширина b квантовой ямы (HgS) и меньше ширина a барьера (CdS) (период $L = a + b$ постоянный), тем меньшие по величине граничные значения (при $\rho_0 = 1c_2$ и $30c_2$) эффективных масс μ_{nm} электрона квантовой сверхрешетки. При $L = 1c_1 + 9c_2$ (кривая *1* на рис. 4) μ_{nm} основного состояния электрона уменьшается от $\mu_1 = 0.2\mu_0$ (при $\rho_0 = 1c_2$) до значения $\mu_{nm} = 0.1\mu_0 > \mu_2$ (при $\rho_0 = 30c_2$) и с дальнейшим увеличением ρ_0 практически не изменяется. Начиная со значения $\rho_0 \approx 30c_2$ до $\rho_0 \to \infty$ (граничный переход к плоской сверхрешетке), закон дисперсии электрона $E_{nm}(q)$ практически не изме-

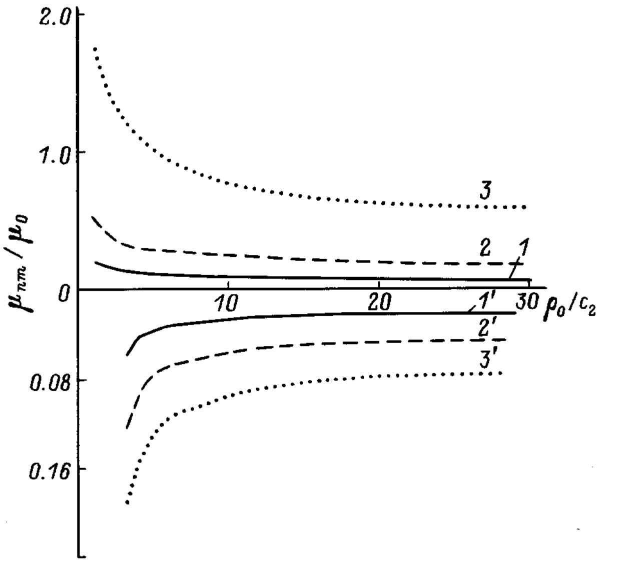

Рис. 4. Зависимость радиальной составляющей эффективной массы электрона сверхрешетки от радиуса внутреннего кристалла. $n = 0$ (*1–3*) и $1(1' - 3')$. $L = 1c_1 + 9c_2$ (*1*, *1'*), $2c_1 + 8c_2$ (*2*, *2'*) и $3c_1 + 7c_2$ (*3*, *3'*).

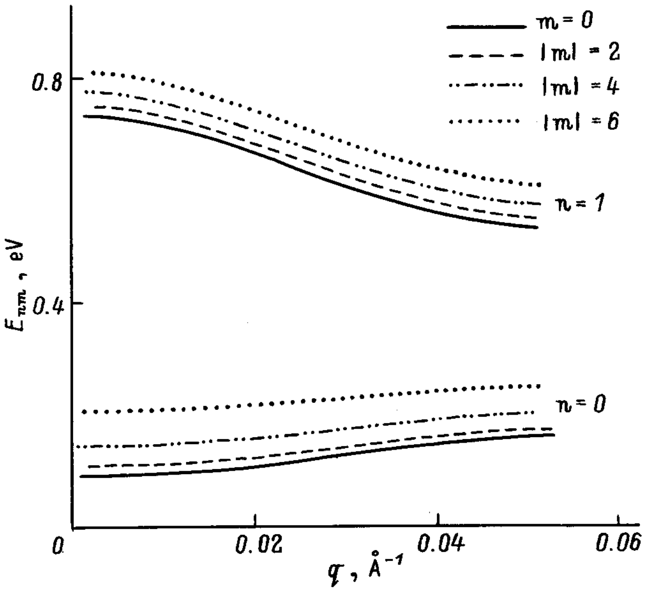

Рис. 5. Закон дисперсии электрона при $\rho_0 = 20c_2$, $L = 1c_1 + 9c_2$ для разных значений магнитного квантового числа.

няется и совпадает с E_{nm} плоской сверхрешетки (при таких же параметра L, U_0, μ_1, μ_2). Как показывают исследования при $\rho_0 \to \infty$ (плоская сверхрешетка), когда ширина барьера $a = 0$ (ширина ямы конечная $b = L$), в области энергий $0 \leqslant E_{nm} \leqslant U_0$ запрещенная зона отсутствует, кривые $E(q)$ в центре зоны Бриллюэна начинаются или со дна или с вершины и на границе зоны Бриллюэна совпадают, поэтому все энергии являются разрешенными.

Совсем другая ситуация наблюдается при конечных значениях ρ_0. Радиальная симметрия цилиндрической квантовой сверхрешетки (другими словами, кривизна границ цилиндрических поверхностей) настолько важна, что изменяется характер спектра электрона по сравнению с плоской сверхрешеткой. При конечных значениях ρ_0 и $b = L$ $(a = 0)$ (рис. 2) существует запрещенная зона, ширина которой определена параметрами системы.

Отметим, что эффективная масса электрона является тензором. Численные расчеты, проведенные по формуле (12) для продольной составляющей $\mu_{\parallel}$ когерентной эффективной массы электрона квантовой сверхрешетки, показывают, что эта величина близка по значению к эффективной массе электрона полупроводникового материала HgS, характеризующего квантовую яму сверхрешетки. Радиальная составляющая эффективной массы μ_{nm} электрона квантовой сверхрешетки (когерентного состояния) существенно зависит от радиуса ядра гетероструктуры, периода и величина потенциала, толщины полупроводниковых коаксиальных слоев.

На рис. 5 изображен закон дисперсии $E_{nm}(q)$ при фиксированных $\rho_0 = 20c_2$ и $L = 1c_1 + 9c_2$ для разных значений магнитного квантового числа. Чем больше m, тем бóльшая энергия E_{nm} возбужденных состояний электрона в сверхрешетке, причем положения разрешенных зон при $|m| \geqslant 1$ монотонно сдвинуты вверх относительно положений зон при $m = 0$. Картина энергетического спектра следующая: основное состояние — $n = 0$, $m = 0$, первое возбужденное — $n = 0$, $m = 1$, второе возбужденное — $n = 0$, $m = 2$ и т.д. Кривизна $E_{nm}(q)$ такова, что при $n = 0, 2, 4, \ldots$ $\mu_{nm} > 0$, а при $n = 1, 3, 5, \ldots$ $\mu_{nm} < 0$.

Главный вывод работы состоит в том, что в квантовой сверхрешетке цилиндрической симметрии возникают сложные когерентные состояния электрона с анизотропными эффективными массами, которые зависят от параметров гетеросистемы. Анизотропия эффективных масс должна проявляться на соответствующих оптических (коэффициент поглощения, диэлектрическая проницаемость) и динамических (проводимость) характеристиках систем, исследуемых экспериментально.

Список литературы

[1] S.L. Goff, B. Stebe. Phys. Rev. **B47**, *3*, 1383 (1993).

[2] C. Greus, R. Spiegel, P.A. Knipp, T.L. Reinecke. Phys. Rev. **B49**, *8*, 5753 (1994).

[3] G.Q. Hai, F.M. Peeters, J.T. Devreese, L. Wendler. Phys. Rev. **B48**, *16*, 12 016 (1993).

[4] C. Greus, L. Butov, P.A. Knipp. Phys. Rev. **B47**, *12*, 7626 (1993).

[5] Н.В. Ткач, В.И. Бойчук, В.А. Головацкий, О.Н. Войцехивская. ФТТ **38**, *10*, 3161 (1996).

[6] D. Schooss, A. Mews, A. Eychmuller, H. Weller. Phys. Rev. **B49**, *24*, 17 072 (1994).

[7] M.F. Lin, W. Kenneth, K. Shung. Phys. Rev. **B47**, *11*, 6617 (1993).

[8] З. Флюгге. Задачи по квантовой механике. Мир, М. (1974). Т. 1. 342 с.