Микроскопическая теория электроакустического эха в антисегнетоэлектриках типа порядок–беспорядок

© М.Б. Белоненко, С.В. Назаренко

Волгоградский государственный университет,
400062 Волгоград, Россия

(Поступила в Редакцию 22 мая 1997 г.
В окончательной редакции 16 июля 1997 г.)

Предложена микроскопическая теория электроакустического эха (ЭАЭ) в случае воздействия на антисегнетоэлектрик двумя импульсами переменного электрического поля. Данная теория дополняет феноменологическую теорию, предложенную для интерпретации экспериментов по исследованию основных закономерностей ЭАЭ в антисегнетоэлектриках типа порядок–беспорядок. Объяснены эффекты дейтерирования и "заполяризации" образца. Аналитически выведена форма сигнала эха и показано, что эта форма зависит от временного интервала, разделяющего импульсы накачки.

1. Воздействие на вещество импульсными методами позволяет получить нетривиальную информацию о динамике и кинетике возбуждений, которую зачастую невозможно получить стационарными методами. В случае нелинейных систем среди импульсных методов выделяются те, которые позволяют получить сигнал эхо-отклика. Высокая эффективность и информативность данных методов определяется тем, что при их использовании устраняется обратимое фазовое рассеяние сигнала, индуцируемого в веществе.

В проведенных сравнительно недавно и заинтересовавших нас экспериментах [1,2] удалось обнаружить и проследить основные закономерности электроакустического эха в антисегнетоэлектрике (АСЭ) Rs, который является типичным представителем АСЭ с водородными связями. Необходимо также отметить, что теоретическое объяснение экспериментальных закономерностей в работе [1] на основании феноменологической теории не учитывает всех особенностей динамики АСЭ, характеризуемых наличием фазового перехода типа порядок–беспорядок. Наиболее серьезными недостатками, которые возникают в феноменологическом описании АСЭ, являются отсутствие правильного закона дисперсии для возбуждений и ограничение по частоте области применения [3,4]. Максимальная частота, при которой применим феноменологический подход, стремится к нулю при приближении к точке фазового перехода.

2. Как известно, наиболее полно и последовательно АСЭ типа порядок–беспорядок описываются в рамках псевдоспинового формализма [3–5]. В этом формализме уравнения движения Гейзенберга для средних значений псевдоспиновых операторов двухподрешеточного АСЭ, дополненные релаксационными слагаемыми в приближении хаотических фаз, имеют вид [4,6]

$$\frac{d\langle S^x_{j\alpha}\rangle}{dt} = M_{j\alpha}\langle S^y_{j\alpha}\rangle - \left(\langle S^x_{j\alpha}\rangle - \overline{\langle S^x_{\alpha}\rangle}\right)\left(\frac{\cos\phi}{T_1^*} + \frac{\sin\phi}{T_2^*}\right),$$

$$\frac{d\langle S^y_{j\alpha}\rangle}{dt} = \Omega\langle S^z_{j\alpha}\rangle - M_{j\alpha}\langle S^x_{j\alpha}\rangle - \langle S^y_{j\alpha}\rangle/T_2^*,$$

$$\frac{d\langle S^z_{j\alpha}\rangle}{dt} = -\Omega\langle S^x_{j\alpha}\rangle - \left(\langle S^z_{j\alpha}\rangle - \overline{\langle S^z_{\alpha}\rangle}\right)\left(\frac{\cos\phi}{T_2^*} + \frac{\sin\phi}{T_1^*}\right), \quad (1)$$

где $\overline{\langle S^x_\alpha\rangle}$, $\overline{\langle S^z_\alpha\rangle}$ — равновесные средние значения операторов псевдоспина $S^x_{j\alpha}$ и $S^z_{j\alpha}$ для α-подрешетки, $\overline{\langle S^x\rangle} = \overline{\langle S^x_1\rangle} = \overline{\langle S^x_2\rangle}$, $\overline{\langle S^z_1\rangle} = \overline{z} = -\overline{\langle S^z_q\rangle}$, T_1^*, T_2^* — времена продольной и поперечной релаксации псевдоспина

$$\operatorname{tg}\phi = |\overline{\langle S^z_\alpha\rangle}|/|\overline{\langle S^x_\alpha\rangle}|,$$

$$M_{j1} = \sum_i J_{ij}\langle S^z_{i2}\rangle + 2\mu E_j(t) + d\frac{\partial U(z',t)}{\partial z'} + \Delta,$$

$$M_{j2} = \sum_i J_{ij}\langle S^z_{i1}\rangle + 2\mu E_j(t) + \frac{\partial U(z',t)}{\partial z'} - \Delta.$$

В (1) $\alpha = 1, 2$ — индексы, нумерующие подрешетки, $S^x_{j\alpha}$ и $S^z_{j\alpha}$ имеют смысл операторов туннелирования и электрического дипольного момента j-й ячейки α-й подрешетки, Ω — интеграл туннелирования, $J_{ij} < 0$ — обменный интеграл, Δ — параметр асимметрии потенциала для протона на водородной связи, μ — дипольный момент АСЭ ячейки, $E_j(t)$ — приложенное к образцу переменное электрическое поле. Здесь предполагается, что в образце возбуждена поперечная звуковая волна, распространяющаяся вдоль полярной оси z' и поляризованная вдоль оси y', и, следовательно, вектор смещения имеет одну отличную от нуля компоненту: $(U(z',t), 0, 0)$. Отметим, что рассматривается случай линейного пьезоэффекта с соответствующим пьезомодулем d. Система координат x', y', z' связана с кристаллографическими осями, а система координат x, y, z определена в псевдоспиновом пространстве.

В рассматриваемом нами случае уравнение распространения звуковой волны есть [7]

$$\ddot{U} = V_0^2\frac{d^2U}{dz'^2} - \frac{d}{\rho}\,\frac{d(\langle S^z_1 + \langle S^z_2\rangle)}{dz'}, \quad (\dot{\ }) = \frac{\partial(\,)}{\partial t}, \quad (2)$$

где ρ — плотность кристалла, V_0 — скорость акустической волны в отсутствие псевдоспин-фононной связи.

Представляя индекс j, описывающий положение псевдоспинов в решетке, как совокупность двух индексов (n, k), где n нумерует плоскости, параллельные $x'y'$, а k говорит о положении псевдоспина внутри такой плоскости, перейдем к континуальному пределу

$$\langle S^z_{(n\pm1)k\alpha}\rangle = \langle S^z_{nk\alpha}\rangle \pm a\frac{d\langle S^z_{nk\alpha}\rangle}{dz'} + \frac{a^2}{2}\frac{d\langle S^z_{nk\alpha}\rangle}{dz'^2} + \dots .$$

При этом уравнения, описывающие динамику псевдоспиновых переменных, примут вид

$$\langle \dot{S^x_\alpha}\rangle = M_\alpha\langle S^y_\alpha\rangle - \left(\langle S^x_\alpha - \langle\overline{S^x}\rangle\right)\left(\frac{\cos\phi}{T_1^*} + \frac{\sin\phi}{T_2^*}\right),$$

$$\langle \dot{S^z_\alpha}\rangle = -\Omega\langle S^y_\alpha\rangle - \left(\langle S^z_\alpha - \langle\overline{S^z}\rangle\right)\left(\frac{\cos\phi}{T_2^*} + \frac{\sin\phi}{T_1^*}\right),$$

$$\langle \dot{S^y_\alpha}\rangle = \Omega\langle S^z_\alpha\rangle - M_\alpha\langle S^x_\alpha\rangle - \langle S^y_\alpha\rangle/T_2^*,$$

$$M_1 = L\langle S^z_2\rangle + K\frac{\partial\langle S^z_2\rangle}{\partial z'^2} + 2\mu E(t) + d\frac{\partial U}{\partial z'} + \Delta,$$

$$M_2 = L\langle S^z_1\rangle + K\frac{\partial\langle S^z_1\rangle}{\partial z'^2} + 2\mu E(t) + d\frac{\partial U}{\partial z'} - \Delta,$$

$$L = \sum_k (J_{nk,nk'} + 2J_{(n+1)k,nk'}), \quad K = a^2\sum_k J_{(n+1)k,nk'}. \quad (3)$$

3. Несмотря на проведенные упрощения, система (2), (3) все еще является достаточно сложной для решения. Поэтому ограничимся анализом эффективных уравнений, описывающих динамику огибающих прямой и обратной электроакустических (ЭА) волн. Отметим, что, поскольку характерное время релаксации псевдоспина T_1^*, T_2^* есть 10^{-11}–10^{-12} s, а характерный период колебаний ЭА волны 10^{-7}–10^{-8} s, псевдоспиновую подсистему АСЭ можно считать адиабатически отслеживающей изменения в величинах внешнего радиочастотного переменного поля и поля звуковой волны. Математически такое адиабатическое изменение можно выразить, положив $\langle \dot{S^\alpha_\beta}\rangle = 0$ в уравнениях (3). Тогда

$$\langle S^z_1\rangle = \langle\overline{S^z_1}\rangle + a_{11}\chi + a_{21}\chi^2 - a_{31}\chi^3 + b_1\frac{\partial^2\chi}{\partial z'^2}\dots,$$

$$\chi = 2\mu E(t) + d\frac{\partial U}{\partial z'},$$

$$\langle S^z_2\rangle = \langle\overline{S^z_2}\rangle + a_{12}\chi + a_{22}\chi^2 - a_{32}\chi^3 + b_2\frac{\partial^2\chi}{\partial z'^2}\dots \quad (4)$$

(выражения для коэффициентов a_{ij}, b_i даны в Приложении 1). Дифференцируя уранение на ненулевую компоненту вектора смещений u по переменной z' и полагая $\frac{\partial u}{\partial z'} = f$, имеем

$$\ddot{f} - v_0^2\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} + \frac{d}{\rho}\frac{\partial}{\partial z'^2}\left(\langle S^z_1\rangle + \langle S^z_2\rangle\right) = 0. \quad (5)$$

Для дальнейшего исследования уравнения (5) воспользуемся методом многомасштабных разложений [8–10], согласно которому решение (5) ищем в виде

$$f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots,$$
$$f = f_+ e^{i(\omega t - kz')} + f_- e^{i(\omega t + kz')} + \text{c.c},$$
$$f_\mp = f_\mp(\varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon z') = f_\mp(T_1, T_2, Z_1),$$
$$T_n = \varepsilon^n t, \quad Z_n = \varepsilon^n z'. \quad (6)$$

В формулах (6) ω и k — частота и волновой вектор бегущих ЭА волн, f_+ и f_- — медленно меняющиеся амплитуды прямой и обращенной волн, T_n и Z_n — медленные переменные, ε — формально малый параметр, который характеризует отклонение параметров системы от равновесия.

Применим метод многомасштабных разложений, последовательно исключая быстроосциллирующие секулярные члены в каждом порядке разложения f по параметру ε. Так, из требования исключения секулярных членов в первом порядке по ε имеем дисперсионное уравнение для волн, которое имеет вид

$$l(\omega, k) = -\omega^2 + k^2\Big(V_0^2 + \frac{d^2}{\rho}(a_{11} + a_{12})$$
$$+ \frac{d^2}{\rho}k^2(b_1 + b_2)\Big) = 0. \quad (7)$$

Соответствующее уравнение для секулярных членов, полученное во втором порядке по ε, приводит к уравнениям, описывающим волновые пакеты, двигающиеся с групповой скоростью V_{gr}

$$\frac{\partial f_\mp}{\partial T_1} \mp V_{\text{gr}}\frac{\partial f_\mp}{\partial Z_1} = 0,$$

$$V_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} l_k/l_\omega, \quad l_k = \frac{dl(\omega, k)}{dk}. \quad (8)$$

Прежде чем записать уравнения, возникающие при удалении секулярных слагаемых в третьем порядке по ε, конкретизируем временну́ю зависимость внешнего переменного поля. Мы будем полагать, что

$$E(t) = (1/2)E_1E_1 f(Z_1)\Big\{\theta(T_2) - \theta(T_2 + \tau_1)\Big\}e^{i(\omega t - kz')}$$
$$+ (1/2)E_2\Big\{\theta(T_2 + \tau_1 + \tau)$$
$$- \theta(T_2 + \tau_1 + \tau_2 + \tau)\Big\}e^{2i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (9)$$

в случаях экспериментов по наблюдению $\omega - 2\omega$ эха, а в случае экспериментов по наблюдению $\omega - \omega$ эха во втором слагаемом $e^{2i\omega t}$ следует заменить на $e^{i\omega t}$. В формулах (9) E_1, E_2, τ_1, τ_2 — амплитуды и длительности первого и второго импульсов соответственно, τ — интервал между импульсами, $f(Z)$ — форма огибающей первого импульса, $Z = Z_1 - V_{\mathrm{gr}}T_1$. Тогда, исключая секулярные члены, получаем

$$\pm i\frac{\partial f_\pm}{\partial T_2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial Z^2} + \frac{Q}{I_\omega}|f_\pm|^2 f_\pm + \tilde{Q}|f_\mp|^2 f_\mp + \frac{(1\pm 1)}{2}\frac{Q_1}{I_\omega}E_1 f(Z) = 0, \quad (10)$$

во время действия первого импульса; в промежутке между импульсами и после окончания второго импульса имеем (10) без последнего слагаемого. Во время действия второго импульса в левую часть уравнения (10) при $\omega - 2\omega$ схеме эксперимента добавляется $RE_2 f^*_\mp$, а при $\omega - \omega$ схеме эксперимента добавляется $\tilde{R}\tilde{E}_2^2 f^*_\pm$. Коэффициенты Q, $\tilde{Q}$, θ_1, R, $\tilde{R}$ в (10) приведены в Приложении 2.

4. Поскольку до действия переменного поля образец находился в состоянии термодинамического равновесия, то начальные условия для уравнений (10) запишутся как: $f_\mp|_{T_2=0} = 0$. Далее отметим, что систему уравнения (10) можно рассматривать как систему нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) с возмущением [11]. Для их решения воспользуемся методом Карпмана–Маслова [12]. Решение уравнений для данных рассеяния $c_{11}(\lambda)$, $c_{12+}(\lambda)$, определяющих динамику огибающей прямой ЭА волны на временах $0 < T_2 < \tau_1 + \tau_0$, есть

$$c_{12+}(\lambda) = 1,$$

$$c_{11}(\lambda) = -i\left(\left|\frac{Q}{2l_\omega^3}\right|\right)^{1/2}\frac{Q^*E_1^*}{l_\omega} \times \frac{\Phi(\lambda)}{4\lambda^2 i}\left[e^{4i\lambda^2\tau_1} - 1\right]e^{4i\lambda^2(\tau_1+\tau+T_2)}, \quad (11)$$

где $\Phi(\omega)$ есть фурье-образ первого импульса,

$$\Phi(\lambda) = \beta\int_0^\infty dZ f(Z) e^{-2i\lambda\beta Z}.$$

Взаимодействие второго импульса с прямой волной является параметрическим и обусловливает рождение обратной волны. Отметим, что в $\omega - 2\omega$ схеме эксперимента такое взаимодействие идет напрямую, а в случае, когда второй импульс подается с частотой ω, параметрическое взаимодействие осуществляется в два этапа: сначала вследствие нелинейных свойств кристалла генерируется гармоника с удвоенной частотой, которая в дальнейшем параметрически взаимодействует с прямой волной. Обратная волна движется в направлении $-z'$ с групповой скоростью, равной групповой скорости прямой волны и регистрируется в виде эхо-отклика. Как следует из вида слагаемых R, $\tilde{R}$, возбуждение обратной волны возможно лишь при выполнении условий: $d \neq 0$, $\langle\overline{S_1^z}\rangle = -\langle\overline{S_2^z}\rangle \neq 0$. Это выполняется во внешнем нулевом постоянном поле только тогда, когда кристалл был предварительно заполяризован (т. е. достаточно долго поддерживалось постоянное внешнее поле, которое в процессе эксперимента было отключено). Такие условия наблюдения эха и были реализованы в эксперименте [1,2] для $\omega - 2\omega$ и $\omega - \omega$ схем опыта.

Данные рассеяния $c_{11}(\lambda)$, $c_{12}(\lambda)$, определяющие динамику обратной волны, в приближении невзаимодействующих волн, при $T_2 > \tau + \tau_1 + \tau_2$

$$c_{12}(\lambda) = I,$$

$$c_{11}(\lambda) = -i\left(\left|\frac{Q}{2l_\omega^3}\right|\right)^{1/2} RE_2^*\Phi(\lambda)\frac{\sin(4\lambda^2\tau_2)}{4\lambda^2}e^{-4\lambda^2(T_1-2\tau_1-2\tau)} \times(-i)\left(\left|\frac{Q}{2l_\omega^3}\right|\right)^{1/2}\frac{\theta^*E_1^*}{l_\omega}\left[\frac{e^{4i\lambda^2\tau_1}-1}{4\lambda^2 i}\right], \quad (12a)$$

для случая $\omega - 2\omega$-эха и

$$c_{12}(\lambda) = I,$$

$$c_{11}(\lambda) = i\left(\left|\frac{Q}{2l_\omega^3}\right|\right)^{1/2}\tilde{R}\tilde{E}_2^*\Phi(\lambda)\frac{\sin(4\lambda^2\tau_2)}{4\lambda^2}e^{-4\lambda^2(T_1-2\tau_1-2\tau)} \times(-i)\left(\left|\frac{Q}{2l_\omega^3}\right|\right)^{1/2}\frac{\theta^*E_1^*}{l_\omega}\left[\frac{e^{4i\lambda^2\tau_1}-1}{4\lambda^2 i}\right] \quad (12b)$$

для экспериментов по детектированию $\omega - \omega$-эха.

В рамках метода Карпмана–Маслова амплитуда обратной волны будет определяться как [11]

$$f_-(Z,T_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2i\beta Z\lambda}\frac{Q}{2l_\omega^3}H\Phi(\lambda)\frac{\sin(4\lambda^2\tau_2)}{16\lambda^4} \times\left(e^{-4i\lambda^2\tau_1}-1\right)\frac{\theta E_1}{l_\omega}e^{4i\lambda^2(T_2-2\tau_1-2\tau)}, \quad (13)$$

где $H = -iR^*E_2$ для $\omega - 2\omega$-эха и $H = -i\tilde{R}^*(\tilde{E}_2^*)^2$ для $\omega - \omega$-эха. Пользуясь методом стационарной фазы, легко показать, что интеграл в (13) имеет максимум в момент времени $T_2 = 2\tau + 2\tau_1$. Следовательно, в момент времени $T_2 = 2\tau + 2\tau_1$ амплитуда обратной волны резко возрастает и наблюдается в виде эхо-отклика. При малых длительностях импульсов τ_1 и τ_2 амплитуда эхо-сигнала $A_e = f_-(T_2 \approx 2\tau_1)$, согласно (13), пропорциональна τ_1 и τ_2. Кроме того, при малых длительностях импульсов легко показать, что $A_e = f_-(T_2 \approx 2\tau + 2\tau_1) \sim f(-z)$, т. е. форма эхо-сигнала является формой первой волны, отраженной относительно начала координат. Зависимость амплитуды эха от амплитуд переменных полей является стандартной для эхо-задач: $A_e \sim E_1E_2$ ($\omega - 2\omega$ эхо); $A_e \sim E_1E_2^2$ ($\omega - \omega$ эхо). Также амплитуда эхо-отклика $A_e \sim \Omega^2$. Величина интеграла туннелирования Ω уменьшается при дейтерировании образца в 10–100 раз [3,4], и, следовательно, сигнал эха уменьшается при этом в $10^2 - 10^4$ раз, что хорошо согласуется с экспериментом.

Приложение 1

$$\eta = \left(\frac{\cos\phi}{T_1^*} + \frac{\sin\phi}{T_2^*}\right), \quad \varkappa = \left(\frac{\cos\phi}{T_2^*} + \frac{\sin\phi}{T_1^*}\right),$$

$$b_1 = \frac{I\Psi_1 b_2 + k\Psi_1 a_{12}}{\xi},$$

$$a_{11} = \frac{L\eta^2\Omega^4 z_1 z_2 - (L\overline{z_1} - \Delta)\Omega^2\eta z_1 C}{(Lz_2 + \Delta)(Lz_1 - \Delta)C^2 - L^2\eta^2\Omega^4\overline{z_1}\,\overline{z_2}},$$

$$C = (L + \Delta)^2\varkappa + \eta\Omega^2 + \eta\varkappa/T_2$$

$$a_{12} = \frac{\Omega^2\eta\overline{z_2}(La_{11} + 1)}{\big((L+\Delta)^2\varkappa + \eta\Omega^2 + \eta\varkappa/T_2\big)(L\overline{z_1} - \Delta)},$$

$$\zeta = (L\overline{z_1} - \Delta)^2\varkappa + \eta\Omega^2 + \eta\varkappa/T_2,$$

$$\xi = (L\overline{z_2} + \Delta)^2\varkappa + \eta\Omega^2 + \eta\varkappa/T_2,$$

$$\Psi_1 = \frac{\eta\Omega^2\overline{z_1}}{(L\overline{z_2} + \Delta)}, \qquad \Psi_2 = \frac{\eta\Omega^2\overline{z_2}}{(L\overline{z_1} - \Delta)},$$

$$a_{21} = \frac{\begin{array}{c}2\varkappa a_{12}L\eta\Omega^2\overline{z_1}(La_{11}+1)(L\overline{z_1} - \Delta)\\ -2\varkappa a_{11}(La_{12}+1)(L\overline{z_2} + \Delta)^2\zeta\end{array}}{\zeta\xi(L\overline{z_2} + \Delta) - L^2\eta^2\Omega^4\overline{z_1}\,\overline{z_2}/(L\overline{z_1} - \Delta)},$$

$$a_{22} = (L\overline{z_2} + \Delta)\frac{\xi a_{21} + 2\varkappa a_{11}(La_{12}+1)(Lz_2 + \Delta)}{L\Omega^2\eta\overline{z_1}},$$

$$\begin{aligned}\sigma &= L^2\varkappa(2a_{11}a_{22}\overline{z_2} + a_{11}a_{22}^2 + 2\overline{z_2}a_{12}a_{11})\\ &\quad + 2L\varkappa(a_{11}a_{12} + \overline{z_1}a_{21}) + 2L\varkappa(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})\\ &\quad + \varkappa a_{11} + 2\varkappa\Delta a_{21},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= L^2\varkappa(2a_{12}\overline{z_1}a_{21} + a_{12}a_{11}^2 + 2a_{22}\overline{z_1}a_{11})\\ &\quad - 2L\varkappa\Delta(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{11}) + 2L\varkappa(\overline{z_1}a_{22} + a_{11}a_{12})\\ &\quad - 2\varkappa\Delta a_{22} + \varkappa a_{12},\end{aligned}$$

$$a_{32} = -\frac{L\psi_2\sigma - \varphi\xi}{\zeta\xi - L^2\psi_1\psi_2}, \quad a_{31} = \frac{L\psi_1 a_{32} + \sigma}{\zeta},$$

$$b_2 = \frac{\xi k\psi_1 a_{11} - kLa_{12}\psi_1\psi_2}{\zeta\xi - L^2\psi_1\psi_2}.$$

Приложение 2

$$\mathrm{con1} = \frac{\tilde{d}d^2(a_{21} + a_{22})k^2}{4\tilde{d}(-a_{31} - a_{32})dk^4 + \tilde{d}d(a_{11} + a_{12})k^2 - \Omega^4\eta^2 - k^2v_0^2},$$

$$\mathrm{con2} = \frac{2\tilde{d}d^2(a_{21} + a_{22})}{V_0^2 + \tilde{d}d^2(a_{11} + a_{12})4\tilde{d}d(a_{31} + a_{32})k^2},$$

$$R = -(a_{21} + a_{22})\tilde{d}4\mu d(ik)^2,$$

$$Q = 2\tilde{d}d^2(a_{21} + a_{22})(-ik)^2\mathrm{con1} + 3(b_1 + b_2)\tilde{d}d^3(-ik)^2,$$

$$\tilde{R} = (b_1 + b_2)\tilde{d}8\mu d(ik)^2,$$

$$\tilde{Q} = 2\tilde{d}d^2(a_{21} + a_{22})(-ik)^2\mathrm{con2} + 6(b_1 + b_2)\tilde{d}d^3(-ik)^2,$$

$$\theta_1 = \tilde{d}a_{12}\mu(-ik)^2 + \tilde{d}(-a_{31} - a_{32})2\mu(-ik)^4.$$

Список литературы

[1] В.М. Березов, В.С. Романов, А.Б. Балакин. УФЖ **29**, 1589 (1984).
[2] В.М. Березов, В.С. Романов, А.Б. Балакин. Кристаллография **31**, 1022 (1986).
[3] В.Г. Вакс. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. Наука, М. (1973). Гл. 2, 3, 5, 6.
[4] Р. Блинц, Б. Жекш. Сегнетоэлектрики и антисегнетики. Мир, М. (1975). Гл. 5.
[5] М. Лайнс, А. Гласс. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. Мир, М. (1982). Гл. 4.
[6] М.Б. Белоненко, А.Р. Кессель, М.М. Шакирзянов. ФТТ **29**, *11*, 3345 (1987).
[7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1965). Гл. 1, 3.
[8] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Мир, М. (1987). Гл. 1, 4.
[9] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Мир, М. (1988). Гл. 8.
[10] А. Найфэ. Введение в методы возмущений. Мир, М. (1984). Гл. 9.
[11] Дж.Л. Лэм. Введение в теорию солитонов. Мир, М. (1983).
[12] A.C. Newell. In: Solitons / Ed. R. Bullaf, F. Kodr. Mir, M. (1983). V. 6. P. 193–267.