01

Соотношение взаимности для эффективной электропроводности случайно-неоднородной среды во фрактальной области

© *А.А. Снарский, К.В. Слипченко, И.В. Безсуднов*

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Поступило в Редакцию 11 июля 1997 г.

Для двумерной случайно-неоднородной среды найдено точное соотношение для средних по реализациям эффективных проводимостей во фрактальной области, т. е. на размерах, меньших размера самоусреднения. На больших размерах соотношение переходит в соотношение взаимности А.М. Дыхне.

Как хорошо известно, микроскопически неоднородная среда описывается эффективными характеристиками, например, эффективной электропроводностью σ_e, связывающей по определению средние по объему электрические поля и токи

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle = \int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV, \quad \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle = \int\limits_V \mathbf{e}(\mathbf{r}) dV, \tag{1}$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ — локальные напряженность электрического поля и плотность тока.

Эффективная электропроводность $\sigma_e = \sigma_1 f(h = \sigma_2/\sigma_1, p)$, где σ_1 и σ_2 — локальные проводимости фаз в случае двухфазной среды, p — концентрация фазы с проводимостью σ_1.

Проблема определения универсальной вблизи порога p_c функции $f(h, p)/\sigma_1$ аналогична проблеме определения критического поведения параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода и , как и в этой теории, вообще говоря, точного решения не имеет.

Однако, как и в теории фазовых переходов второго рода для двухмерной двухфазной ситуации, для σ_e известно точное решение А.М. Дыхне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ [1], справедливое для сред с геометрически эквивалентным в среднем расположением фаз. В терминах теории протекания это решение — решение на пороге протекания $p = p_c = 1/2$; $\tau = (p - p_c)/p_c = 0$.

Для $p \neq p_c$ такого решения нет, однако, как показано в той же работе [1], имеет место так называемое соотношение взаимности, связывающее между собой σ_e выше и ниже порога протекания

$$\sigma_e(\tau)\sigma_e(-\tau) = \sigma_e^2(\tau = 0), \quad \sigma_e(\tau = 0) = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \tag{2}$$

На масштабах $L < \xi$ (меньше масштаба самоусреднения) неоднородная среда является мезоскопической и измеренные характеристики, в том числе и проводимость, флуктуируют от реализации к реализации. Как показано в [2], при ненулевом соотношении проводимостей фаз $h = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ для средних по реализациям эффективной проводимости $\{\sigma_e\}$ и удельного сопротивления $\{\rho_e\}$ имеет место

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} \left(\frac{L}{a_0}\right)^{-\frac{t}{\nu}} + \sigma_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} \left(\frac{L}{a_0}\right)^{\frac{q}{\nu}},$$

$$\{\rho_e\} = \rho_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} \left(\frac{L}{a_0}\right)^{\frac{t}{\nu}} + \rho_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} \left(\frac{L}{a_0}\right)^{-\frac{q}{\nu}}, \quad \rho_i = 1/\sigma_i, \tag{3}$$

где $\tau_L = (L/a_0)^{-\frac{1}{\nu}}$, a_0 — минимальный размер в системе, в случае решеточных моделей a_0 — длина связи. Средние по реализациям зависят от L степенным образом, о таких системах говорят как о фрактальных.

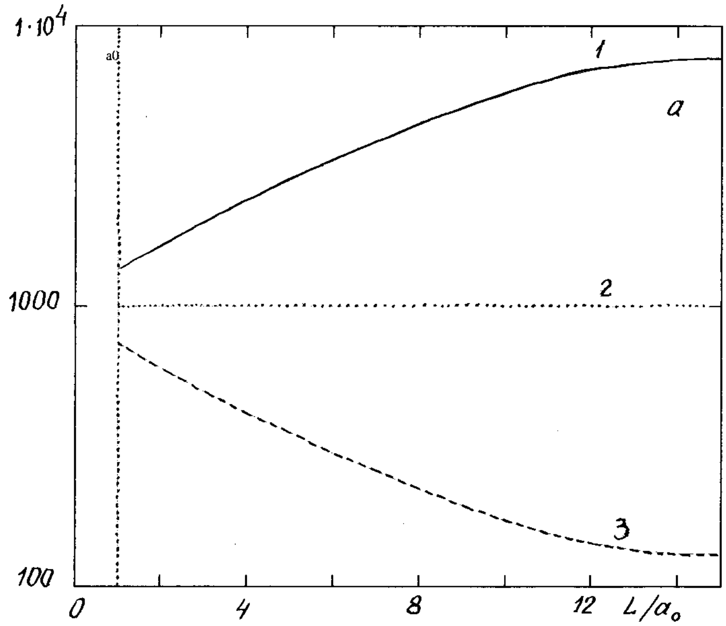
Из (3) следует, что, хотя и $\{\sigma_e\}$ и $\{\rho_e\}$ сильно зависят от L, их комбинация, обобщающая на фрактальную область соотношение взаимности А.М. Дыхне (2), от L практически не зависит

$$\big\{\sigma_e(\tau, L)\big\}\big\{\rho_e(-\tau, L)\big\}^{-1} = \sigma_e^2(\tau = 0, L \gg \xi). \tag{4}$$

На рисунке приведены зависимости от различных комбинаций, средних по реализациям, построенные на основе (3) и численного эксперимента.

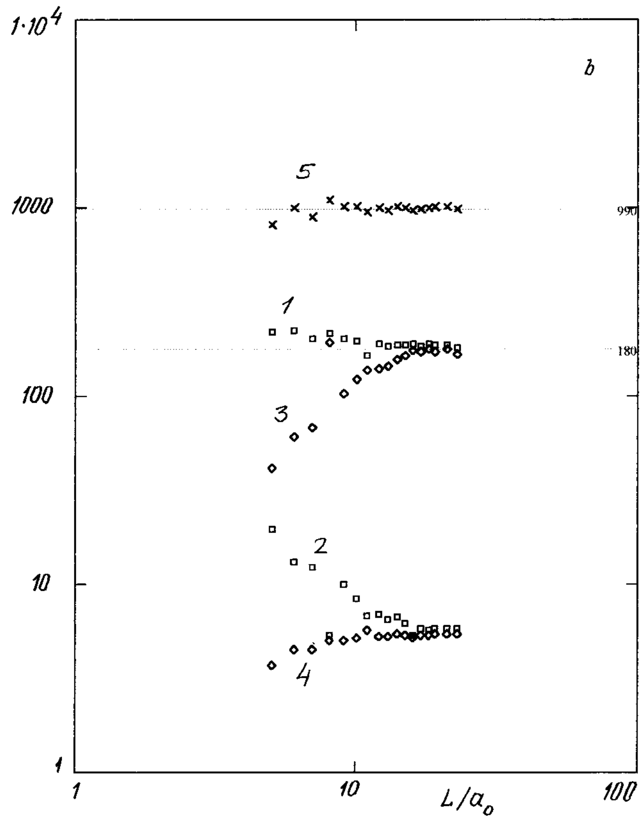
Соотношение взаимности во фрактальной области (4) можно строго доказать, используя преобразование симметрии [1]. Для среды с локальным законом $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r})$, где в областях O_1 и O_2 соответственно $\sigma(\mathbf{r} \in O_i) = \sigma_i$, преобразования

$$\mathbf{j} = \Lambda \mathbf{n} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{n} \times \mathbf{j}, \quad \Lambda = \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \tag{5}$$



a — зависимости средних по реализациям проводимостей и сопротивлений от размера образца: *1* — $\{\rho_e(\tau = 0.15, L)\}/\{\sigma_e(\tau = 0.15, L)\}$, *2* — $\{\rho_e(\tau = 0.15, L)\}/\{\sigma_e(\tau = -0.15, L)\}$, *3* — $\{\rho_e(\tau = -0.15, L)\}/\{\sigma_e(\tau = -0.15, L)\}$. На оси L указано значение корреляционной длины для заданных параметров, $\xi(\tau = 0.15) \approx a_0\tau^{-\nu} \approx 12.5$, средние по реализациям перестают зависеть от размера образца; *b* — зависимости от размера образца средних по реализациям проводимостей: *1* — $\{G(\tau = 0.1, L)\}$, *2* — $\{G(\tau = -0.1, L)\}$; обратных средних по реализациям сопротивлений: *3* — $1/\{R(\tau = 0.1, L)\}$, *4* — $1/\{R(\tau = -0.1, L)\}$ и *5* — соотношения $\{G(\tau = 0.1, L)\}/\{R(\tau = -0.1, L)\}$, полученных численным расчетом на квадратной сетке.

переводят начальную среду в тильдованную с локальным законом $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$, причем $\tilde{\sigma}(\mathbf{r} \in O_1) = \sigma(\mathbf{r} \in O_2) = \sigma_2$, $\tilde{\sigma}(\mathbf{r} \in O_2) = \sigma(\mathbf{r} \in O_1) = \sigma_1$, где $\mathbf{n}$ — единичный нормальный вектор. Если фазы начальной среды "раскрасить" черным и белым цветом, то тильдованная среда будет представлять негатив начальной. Усреднение



(продолжение рисунка).

по объему локального закона, с характерным размером $L \ll \xi$, дает

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \hat{\sigma}_e = \sigma_e \hat{1} + \hat{\sigma}_e^a, \tag{6}$$

где тензорный значок над эффективной проводимостью подчеркивает, что кондактанс каждой отдельной реализации разный в разных направлениях. Так как после усреднения по реализациям $\{\hat{\sigma}_e\}$ становится изотропным, имеет смысл представить $\hat{\sigma}_e$ в виде двух слагаемых (6) — изотропного $\sigma_e \hat{1}$ и анизотропной добавки $\hat{\sigma}_e^a$, для которой $\{\hat{\sigma}_e^a\} = 0$.

Обобщая преобразования (5) на средние по объему $\langle \mathbf{j} \rangle = \Lambda \mathbf{n} \times \langle \tilde{\mathbf{e}} \rangle$, $\langle \mathbf{e} \rangle = \Lambda^{-1} \mathbf{n} \times \langle \tilde{\mathbf{j}} \rangle$ и применяя их к (6) для тильдованной среды, получаем $\hat{\sigma}_e = \sigma_e \hat{1} + \hat{\sigma}_e^a$, где изотропные части проводимости данной реализации связаны соотношением

$$\sigma_e(L, \tau) = \Lambda^2 / \tilde{\sigma}_e(L, \tau), \quad \Lambda^2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}; \tag{7}$$

усредним (7) по реализациям и учтем, что $\{\tilde{\rho}_e(\tau, L)\} = \{\rho_e(-\tau, L)\}$ — преобразование (5) меняет местами фазы, т. е. концентрацию p на $1 - p$, что с учетом $p_c = 1/2$ даст замену $\tau \to -\tau$. Тогда из (7) получаем соотношение взаимности во фрактальной области (4).

Коротко рассмотрим еще один случай. Для фаз с непрерывно распределенными сопротивлениями, как показано в [1], также существует такое решение. Если локальная проводимость зависит от случайной переменной $\chi(\mathbf{r}) = \ln \sigma(\mathbf{r}) - \langle \ln \sigma \rangle$ таким образом, что функция распределения проводимости является четной функцией χ, то при $L \gg \xi$ $\sigma_e(L \gg \xi) = \exp\langle \ln \sigma \rangle$.

Используя приведенные выше соображения, можно показать, что

$$\{\sigma_e(L)\} / \{\rho_e(L)\} = \sigma_e^2(L \gg \xi). \tag{8}$$

Частным случаем таких сред является, например, среда с $\sigma\big(\chi(\mathbf{r})\big) = \sigma_e e^{\chi(\mathbf{r})}$, с гладкой функцией распределения $D(\chi) = D(-\chi)$. В этом случае $\sigma_e(L \gg \xi) = \sigma_0$ и соотношения (8) принимают вид

$$\{\sigma_e(L)\} / \{\rho_e(L)\} = \sigma_0^2, \tag{9}$$

т. е. соотношение средних по реализациям не зависит от L, хотя каждая из средних по реализациям, например $\{\sigma_e\} \sim e^{(L/a_0)^{-1/\nu}}$ [3], сильно, экспоненциальным образом зависит от L.

Авторы благодарны А.Н. Лагарькову и А.К. Сарычеву за обсуждение затронутых вопросов. Работа частично поддержана РФФИ 95-02-04432а.

Список литературы

[1] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. В. 59. С. 110.
[2] *Снарский А.А., Морозовский А.Е.* // ЖЭТФ. 1996. В. 109. С. 674.
[3] *Снарский А.А., Морозовский А.Е., Баскин Е.М.* В печати.