

01;03

О влиянии расклинивающего давления на устойчивость по отношению к собственному заряду слоя жидкости на твердом сферическом ядре

© В.А. Коромыслов, М.И. Муничев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 20 мая 1997 г.

Показано, что критическое значение параметра Рэлея, характеризующего устойчивость тонкого заряженного слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра, быстро растет с уменьшением толщины слоя.

С неустойчивостью заряженного слоя вязкой жидкости конечной глубины, лежащего на криволинейной твердой подложке, приходится сталкиваться в теории грозового электричества в процессах микро- и макроразделения зарядов и зарождения разряда линейной молнии, в жидкостной масс-спектрометрии и в жидкометаллических источниках ионов [1–3]. В этой связи исследование устойчивости тонкого слоя жидкости на поверхности твердого ядра представляется актуальным. Особенно интересен вопрос об устойчивости весьма тонких пленок жидкости, так как, согласно [2,4,5], при уменьшении толщины слоя жидкости на твердой подложке до величины $h \leq 100$ нм становится существенным влияние расклинивающего давления, величина которого растет при утоньшении пленки $\sim h^{-n}$ (где $3 \leq n \leq 4$ в зависимости от h).

1. Пусть твердое сферическое ядро радиуса R_0 окружено сферически симметрично расположенным шаровым слоем вязкой идеально проводящей жидкости внешнего радиуса R с зарядом Q . Будем считать жидкость несжимаемой, обладающей коэффициентом кинематической вязкости ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Поля скоростей капиллярного волнового движения и давления $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$ и искажение свободной поверхности жидкости $\xi(\mathbf{r}, t)$, возникающее из-за теплового капиллярного волнового движения, будем считать малыми одного порядка. В качестве внешней среды примем вакуум. Рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре ядра, в линейном приближении по величине малых параметров ξ, U и P , в безразмерных переменных, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$.

Линеаризованная система уравнений гидродинамики, описывающая капиллярные движения вязкой жидкости в такой системе, будет иметь вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{in} + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

$$r = R_0: \quad U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0; \quad (3)$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\theta, t) = 0:$$

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0; \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad (5)$$

$$-(P^{in} - P^{ex}) + 2\rho\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + P_\sigma - P_E - P_h = 0. \quad (6)$$

В этих выражениях \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности жидкости; P^{ex} — давление внешней среды на поверхность капли; P^{in} — давление внутри жидкости; P_σ — лапласовское давление под искаженной волновым движением сферической поверхностью жидкого слоя [6]:

$$P_\sigma = 2 - (2 + \Delta_\Omega) \xi(\theta, t);$$

Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

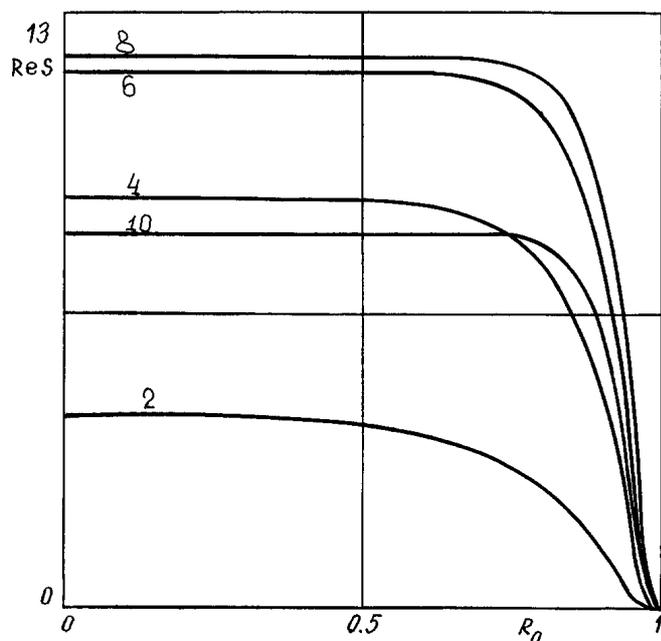


Рис. 1. Зависимости безразмерных инкрементов нескольких первых неустойчивых четных мод (номера которых указаны у соответствующих кривых) от безразмерного радиуса ядра R_0 , рассчитанные при $\nu = 0.01$; $W = 13$; $n = 3$; $A = 10^{-7}$.

Давление электрического поля на поверхность заряженной идеально проводящей капли P_E определяется выражением [6]:

$$P_E = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{1}{2\pi} Q^2 \xi + \frac{1}{4\pi} Q^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P_m(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_m(\mu) d\mu,$$

$P_m(\mu)$ — нормированные полиномы Лежандра, $\mu \equiv \cos \theta$.

В [4] выделяются четыре компоненты расклинивающего давления, имеющие различную физическую природу, которые в общем случае не описываются единым аналитическим выражением. Но имея в виду

качественное исследование влияния расклинивающего давления P_h на устойчивость тонких пленок, ограничимся зависимостью от h флуктуационной составляющей расклинивающего давления, как это делалось при теоретическом анализе устойчивости свободных тонких пленок [7]:

$$P_h = \frac{A}{h^n} \left(1 - \frac{n}{h} \xi(\theta, t) \right),$$

где $h \equiv 1 - R_0$.

2. Решение задачи (1)–(6) методом скаляризации, подробно изложенным в [6], позволяет найти дисперсионное уравнение для капиллярно-

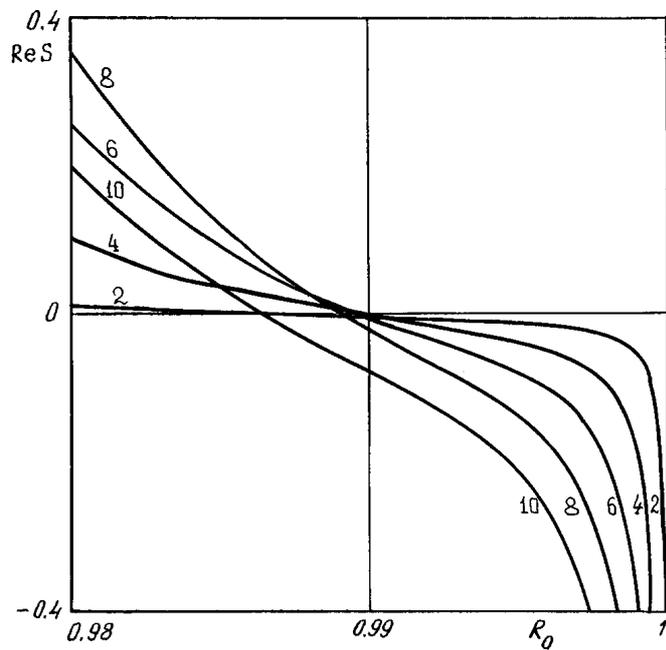


Рис. 2. Увеличенная правая часть рис. 2 с учетом расклинивающего давления ($A = 10^{-7}$).

полоидальных движений жидкости в рассматриваемой системе в виде:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = 0; \quad (7)$$

$$A_{11} = m; \quad A_{12} = -(m+1); \quad A_{13} = m(m+1)i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{14} = m(m+1)k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right); \quad A_{15} = -S; \quad A_{21} = 2(m-1); \quad A_{22} = -2(m+2);$$

$$A_{23} = -2\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{24} = 2\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right);$$

$$A_{25} = 0; \quad A_{31} = S + 2\nu m(m-1); \quad A_{32} = S + 2\nu(m+1)(m+2);$$

$$A_{33} = 2\nu m(m+1) \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1)i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right];$$

$$A_{34} = 2\nu m(m+1) \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1)k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right];$$

$$A_{35} = (m-1)(m+2) + \frac{nA}{h^{(m+1)}} - W(m-1); \quad A_{41} = mR_0^{(m-1)};$$

$$A_{42} = -(m+1)R_0^{-(m+2)};$$

$$A_{43} = \frac{m(m+1)}{R_0}i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right); \quad A_{44} = \frac{m(m+1)}{R_0}k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right); \quad A_{45} = 0;$$

$$A_{51} = R_0^{(m-1)}; \quad A_{52} = R_0^{-(m+2)};$$

$$A_{53} = \sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right) + \frac{(m+1)}{R_0}i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0 \right);$$

$$A_{54} = -\sqrt{\frac{S}{\nu}} k_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right) + \frac{(m+1)}{R_0} k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right); \quad A_{55} = 0,$$

где $W \equiv Q^2/4\pi$, S — комплексная частота, $i_m(x)$ и $k_m(x)$ — сферические функции Бесселя первого и третьего родов соответственно.

Результаты численных расчетов по (7) представлены на рис. 1 в виде зависимости от безразмерного радиуса ядра инкрементов пяти первых четных мод, номера которых указаны у соответствующих кривых, рассчитанные при $W = 13$, $\nu = 0.01$, $n = 3$, $A = 10^{-7}$. Видно, что с утоньшением пленки происходит резкое снижение инкрементов неустойчивости за счет вязкой диссипации в слое жидкости и на твердом дне. Этот случай рассмотрен в [8]. Нас же интересует только область $h < 100$ нм, когда критическое значение параметра Рэлея W будет зависеть не только от номера моды m , но и от толщины слоя h .

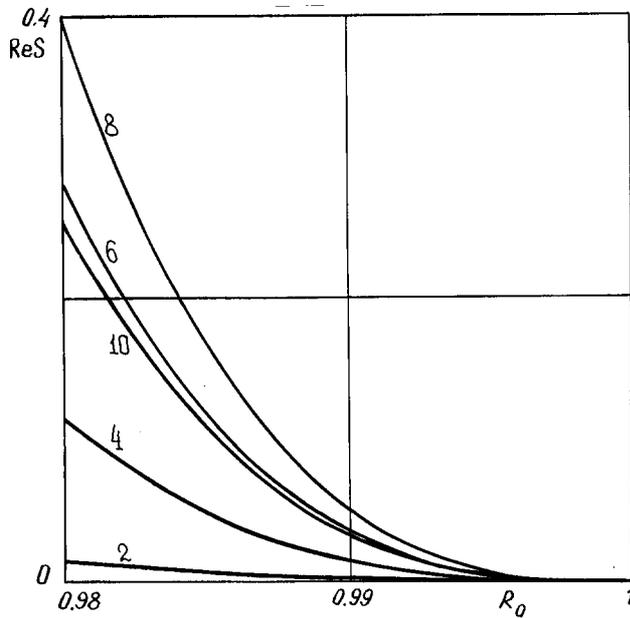


Рис. 3. Увеличенная правая часть рис. 2 без учета расклинивающего давления ($A = 0$).

На рис. 2 и 3 приведена в увеличенном виде правая часть рис. 1 с учетом расклинивающего давления ($A = 10^{-7}$ — рис. 2) и без его учета ($A = 0$ — рис. 3). Из рис. 2 видно, что диапазон устойчивых значений W для данной моды будет определяться ее номером и степенью заkritичности заряда. Так, например, видно, что наиболее сильно от толщины слоя зависит основная мода, тем не менее из-за малой степени заkritичности заряда критические значения параметра W для десятой моды весьма мало отличаются от $W_{кр}$ для второй моды. Это хорошо согласуется с полученными ранее критическими зависимостями W от толщины слоя [2] для идеальной жидкости.

Таким образом, для весьма тонких слоев жидкости в зависимости от величины заряда развитие неустойчивости будет происходить либо за счет преимущественного развития высоких мод, либо вообще не будет реализоваться. Подобная ситуация наблюдалась в работе Вагнера, посвященной экспериментальному исследованию функционирования жидкометаллического источника ионов игольчатого типа [9].

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Grigor'ev A.I., Municodev M.I., Shiryayeva S.O. // Journal of colloid and interface science. 1994. N 166. P. 267–274.
- [3] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
- [4] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. Л.: Наука, 1975. 592 с.
- [5] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 205 с.
- [6] Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Коромыслов В.А. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль. 1994. 126 с.
- [7] Jane R.K., Ruckenstein E. // Lecture Notes in Physics. 1979. V. 105. P. 140–167.
- [8] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Мундичев М.И. // ПЖТФ. 1996. Т. 22. В. 10. С. 23–29.
- [9] Wagner A., Hall T.M. // J. Vacuum Sci. Techn. 1979. V. 16. N 6. P. 1871–1874.