01;03

Колебательная неустойчивость границы раздела проводящих жидкостей в нормальном электрическом поле

© В.А. Саранин, А.Н. Жаров, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 18 февраля 1997 г.

Показана возможность реализации нового, в отличие от неустойчивости Тонкса–Френкеля, колебатального типа неустойчивости заряженной границы раздела двух электропроводных жидкостей в перпендикулярном электростатическом поле.

Исследование устойчивости заряженной плоской поверхности по отношению к собственному и индуцированному зарядам представляет значительный интерес в связи с многочисленными техническими и технологическими приложениями [1]. Существует, однако, ряд нерешенных проблем, связанных с необходимостью учета релаксационных процессов в жидкости. В частности, не достаточно полно изучен вопрос о влиянии конечности электропроводности реальной жидкости на особенности реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости.

Цель настоящего исследования состоит в исследовании возможности проявления колебательной неустойчивости границы раздела двух электропроводных жидкостей в номальном к границе раздела электростатическом поле, которая может возникнуть, в отличие от неустойчивости Тонкса-Френкеля, при меньшем значении напряженности электрического поля.

1. Рассмотрим две несмешивающиеся проводящие жидкости, заполняющие пространство между пластинами плоского конденсатора и находящиеся в нормальном электрическом поле. Выберем декартову систему координат x, y, z. Ось z направим вертикально вверх. Таким образом, уравнение невозмущенной поверхности есть $z = 0$. Будем считать, что жидкости имеют различные плотности, причем $\theta_2 \gg \rho_1$, но одинаковые кинематические вязкости $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$, индексы 1 и 2 — относятся к верхней и нижней жидкостям. Коэффициент поверхностного натяжения

границы раздела будем обозначать α. Жидкости находятся во внешнем постоянном однородном электростатическом поле с напряженностями $\mathbf{E}_{02}$ и $\mathbf{E}_{01}$, а также в поле силы тяжести $\mathbf{g}$.

Как показано в [2], дисперсионное уравнение данной системы в безразмерной форме имеет вид:

$$\left(s^2L+\Omega_0^2L+B_1\Phi Lk^2(n_1-1)+s^2\right)\times\left(s+\Theta B_1Lk^2\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\right)$$

$$-\left(B_1k^2\Psi L\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\frac{1-n_3}{1+n_3}+2\mu k^2sL\left(\frac{1-n_3}{1+n_3}\right)^2-s^2\left(\frac{1-n_3}{1+n_3}\right)^2\right)$$

$$\times\left(-s+2\mu k^2L+B_1k^2\Theta\left(\frac{n_1+n_2}{n_2}\right)\left(\frac{1+n_3}{1-n_3}\right)L\right)=0; \qquad (1)$$

$$k_m=\left(\frac{g(\rho_2-\rho_1)}{\alpha}\right)^{1/2}; \quad \Omega_m=\left(\frac{\alpha k_m^3}{(\rho_2+\rho_1)}\right)^{1/2};$$

$$L=\left(1+\frac{s}{\mu k^2}\right)^{1/2}-1; \quad \mu=\frac{\nu k_m^2}{\Omega_m}; \quad n_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad n_2=\frac{\varepsilon 2}{\varepsilon_1};$$

$$n_3=\frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad B_1=\frac{\varepsilon_1E_{10}^2k_m^2n_2}{(\rho_1+\rho_2)\Omega_m^2n_1^2}; \quad \beta=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Omega_m};$$

$$\Phi=\frac{(1-n_1)s+\beta_1-\beta_2n_1}{(1+n_2)(\beta+s)};\Psi=\frac{s(n_1+n_2)(1+n_1)+2\beta n_1(1+n_2)}{(1+n_1)(1+n_2)(\beta+s)};$$

$$\Theta=\frac{(n_1-n_2)}{(1+n_2)(\beta+s)}; \quad \beta=\beta\frac{(1+n_2)}{(1+n_1)};$$

$$\beta_2=\beta\frac{n_1(1+n_2)}{n_2(1+n_1)}; \quad \Omega_0=(k+k^3)^{1/2}.$$

s — безразмерная частота; k — безразмерное волновое число; i — мнимая единица; σ_1, σ_2 — электропроводности жидкостей; ε_1, ε_2 — диэлектрические проницаемости.

При некоторых значениях физических величин уравнение (1) содержит малый параметр μ, имеющий смысл безразмерной вязкости. Действительно, выбирая, например: $\rho_2=10^3$ kg/m^3; $\alpha=2\times10^{-2}$ N/m; $\nu=10^{-6}$ m^2/s; получим $\mu\approx10^{-3}\ll1$.

2. Критическую величину напряженности поля, характеризуемую параметром B_1, и частоту искомого волнового движения s будем искать в виде разложений по малому параметру μ:

$$B_1 = b_0\mu + b_1\mu^2 + \dots; \qquad (2)$$

$$s = i\Omega + (\omega_{r0} + i\omega_{i0})\mu + (\omega_{r1} + i\omega_{i1})\mu^2 \dots \qquad (3)$$

Здесь b_0, b_1, ω_{r0}, ω_{i0}, ω_{r1}, ω_{i1} — действительные числа.

Подставляя выражения (2), (3) в дисперсионное уравнение (1), можно определить коэффициенты разложения. В нулевом приближении по μ найдем: $s = i\Omega = i(k + k^3)^{1/2}$. В первом порядке приближения по μ можно получить уравнения, связывающие коэффициенты b_0, ω_{r0}, ω_{i0}:

$$\omega_{i0} = \frac{k^2 b_0}{2\Omega_0(\beta^2 + \Omega_0^2)}\left\{\beta\left(\Phi_0 - \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_0\right)\right.$$
$$\left. - \Omega_0^2\left(2\Theta_0 + \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_1 - \Phi_1\right)\right\};$$

$$\omega_{r0} = \frac{k^2 b_0}{2(\beta^2 + \Omega_0^2)}\left\{\beta\left(2\Theta_0 + \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_1 - \Phi_1\right)\right.$$
$$\left. + \left(\Phi_0 - \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_0\right)\right\} - 2k^2; \qquad (4)$$

$$\Phi_0 = -\frac{(n_1 - 1)^2}{n_2 + 1}; \quad \Phi_1 = \frac{(\beta_1 - \beta_2 n_1)(n_1 - 1)}{n_2 + 1};$$
$$\Psi_0 = \frac{n_1 + n_2}{n_2 + 1}; \quad \psi_1 = \frac{2\beta n_1}{n_1 + 1}; \quad \Theta_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_2 + 1}.$$

Из (3) следует, что если $\omega_{ro} > 0$, то имеет место неустойчивое экспоненциально со временем нарастающее колебательное движение границы раздела сред. Согласно (4) условие реализации этой неустойчивости имеет вид:

$$b_0 > 4(\beta^2 + \Omega_0^2)\left\{\beta\left(2\Theta_0 + \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_1 - \Phi_1\right) + \left(\Phi_0 - \frac{n_1 - n_2}{n_2}\Psi_0\right)\right\}^{-1};$$

При $\beta = 1$ это условие существенно упрощается:

$$b_0 > (1 + \Omega_0^2)\frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1(n_1 - n_2)}. \tag{5}$$

Из условия (5) видно, что колебательная неустойчивость возможна, когда удовлетворяется условие $\sigma_2/\sigma_1 > \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Если принять $n_1 = 2$, $n_s = 1$, $\beta = 1$, $\mu = 10^{-3}$, $k = 10^{-2}$, то колебательная неустойчивость для этой системы появляется уже при $B_1 = 3 \cdot 10^{-3}$, тогда как неустойчивость Тонкса–Френкеля реализуется при $B_1 = 20$. Таким образом, при заданных параметрах рассматирваемой системы в ней имеется неустойчивость, имеющая колебательный характер и реализующаяся при существенно меньших значениях внешнего электрического поля, чем неустойчивость Тонкса–Френкеля.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
[2] *Melcher J.R., Smith C.V.* // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 4. P. 778–790.