01;07;09

О модификации скалярного дифракционного интеграла Кирхгофа

© *Ш.Д. Какичашвили, Б.Н. Килосанидзе*

Институт кибернетики АН Грузии, Тбилиси

Поступило в Редакцию 15 мая 1996 г.
В окончательной редакции 18 марта 1997 г.

Рассматривается модификация скалярного дифракционного интеграла Кирхгофа, когда суммирование вторичных волн проводится не только по фронту поступающей волны, но и в определенном объеме на пути ее следования. На примере свободно распространяющейся безграничной плоской волны показано, что при таком подходе устраняется несоответствие описания при использовании точного вида дифракционного интеграла Кирхгофа сравнительно с априорным описанием этой же волны.

Как известно, интеграл Кирхгофа широко используется во многих теоретически и практически важных задачах оптики, квазиоптики и радиофизики [1–3]. Поляризационная модификация интеграла Кирхгофа наиболее последовательно была проведена Коттлером [4]. Аналогичная форма была получена в работе [5] в применении к задачам голографии [6,7]. Расхождение теории Кирхгофа с экспериментальными результатами особенно сильно проявляется при значительных углах дифракции и в задачах описания поляризации дифрагированных полей. Даже в случае свободно распространяющейся безграничной волны дифракционный интеграл Кирхгофа адекватно описывает эту волну лишь в приближении больших расстояний наблюдения. Однако при использовании точного его вида такая адекватность описания оказывается недостижимой. Это, по-видимому, свидетельствует о принципиальных ограничениях применимости теоремы Грина в данном случае [8].

Такое положение дел предопределило возникновение так называемой геометрической теории дифракции, основанной Келлером [9], в которой задается комплекс вычислительных алгоритмов для некоторых типичных классов дифрагирующих объектов. Однако при таком подходе физически обоснованная общность рассмотрения в значительной мере утрачивается.

В предлагаемой работе модифицируется скалярный дифракционный интеграл Кирхгофа в применении к произвольным расстояниям наблюдения. При этом используется расширенная концепция принципа Гюйгенса–Френеля, когда суммирование вторичных волн проводится не только по фронту поступающей волны, но также и в определенном объеме на пути ее следования. Представляется, что несоответствие описания, полученного для безграничной волны при использовании точного вида дифракционного интеграла Кирхгофа сравнительно с априорным описанием этой же волны, может быть устранено использованием расширенной концепции принципа Гюйгенса–Френеля.

Запишем скалярный дифракционный интеграл Кирхгофа в общеизвестной комплексной форме [1]:

$$\hat{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{X_0 Y_0} \left(\hat{E}_0 \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} - \frac{\partial \hat{E}_0}{\partial n} \hat{G} \right) dx_0 dy_0, \tag{1}$$

где $\hat{E}(x, y, z, t)$ — поле в точке наблюдения; $\hat{E}_0(x_0, y_0, z_0, t)$ — поле непосредственно за дифрагирующим объектом; $\hat{G} = \frac{\exp i\varkappa R}{R}$ — функция Грина для свободного пространства; $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ — расстояние от точки наблюдения до точки на поверхности объекта; x_0, y_0, z_0 — координаты точки объекта, x, y, z — координаты точки наблюдения; n — нормаль к поверхности интегрирования. Интегрирование проводится по двумерной области (X_0, Y_0), занятой объектом.

В случае предлагаемой модификации (1) представим в виде:

$$\hat{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{X_0 Y_0 Z_0} \left(\hat{E}_0 \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} - \frac{\partial \hat{E}_0}{\partial n} \hat{G} \right) dx_0 dy_0 dz_0. \tag{2}$$

Здесь интегрирование проводится по объекту, занимающему трехмерную область (X_0, Y_0, Z_0).

В качестве иллюстрации справедливости подобного обобщения рассмотрим поле свободно распространяющейся вдоль оси z безграничной плоской волны. В этом случае (2) принимает вид:

$$\hat{E}(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{i\varkappa}{4\pi} \exp i\omega t \iiint\limits_{X_0 Y_0 Z_0} E_0 \exp -i\varkappa z_0$$

$$\times \left[\frac{z - z_0}{R}\left(1 + \frac{1}{i\varkappa R}\right) + 1\right] \frac{\exp -i\varkappa R}{R} dx_0 dy_0 dz_0, \qquad (2')$$

где $\hat{E}_0 = E_0 \exp i(\omega t - \varkappa z_0)$.

Предварительно вычислим входящий в $(2')$ двойной интеграл по $(X_0,\, Y_0)$ в асимптотическом приближении. Для решения воспользуемся методом стационарной фазы, где в качестве критических выбраны точки $x_0 = x$, $y_0 = y$ [1]. В результате имеем:

$$\hat{E}(x,\, y,\, z,\, t) = E_0 \exp i(\omega t - \varkappa z) \int\limits_{z_0'}^{z_0'+\hat{d}} \left[1 + \frac{1}{2i\varkappa(z - z_0)}\right] dz_0, \qquad (3)$$

где область интегрирования заключена в пределах $z_0' \leqslant z_0 \leqslant z_0' + \hat{d}$ и $\hat{d} = d' - id''$ — комплексное.

Проинтегрировав (3) по области Z_0, получим:

$$\hat{E}(x,\, y,\, z,\, t) = \left\{\hat{d} - \frac{1}{2i\varkappa}[\ln(z - z_0' - \hat{d}) - \ln(z - z_0')]\right\}$$

$$\times E_0 \exp i(\omega t - \varkappa z). \qquad (4)$$

Очевидно, что для адекватного описания свободно распространяющейся безграничной плоской волны соответствующий коэффициент в (4) следует приравнять единице

$$\hat{d} - \frac{1}{2i\varkappa}[\ln(z - z_0' - \hat{d}) - \ln(z - z_0')] = 1. \qquad (5)$$

Из этого условия получается система уравнений для определения действительной и мнимой частей $\hat{d}$:

$$d' + (z - z_0')\cos 2\varkappa(1 - d')\exp 2\varkappa d'' - (z - z_0') = 0,$$

$$d'' + (z - z_0')\sin 2\varkappa(1 - d')\exp 2\varkappa d'' = 0. \qquad (6)$$

Очевидно, что решив систему (6), получим периодичность решения $\hat{d}$, что простым образом может ассоциироваться с зонами Френеля, однако расположенными не на фронте волны, а вдоль пути ее следования.

d' и d'' получены из согласования безграничной плоской волны с априорным ее описанием. Мы считаем возможным распространить этот подход на случай произвольного дифрагирующего объекта. При этом d' играет роль протяженности дифрагирующего объекта по оси z, а d'' — вспомогательная величина. Тем самым выражение (2) оказывается полностью определенным.

Для дифрагирующего объекта с определенными характеристиками толщины, поглощения и пр. этот же подход можно распространить в случае оперирования комплексным волновым числом $\hat{\varkappa}$, что, как известно, соответствует наиболее общей форме решения волнового уравнения Гельмгольца. При этом дифракционная задача по необходимости требует нахождения мнимых частей $\hat{d}$ и $\hat{\varkappa}$ из аналогичного (5) условия согласования решения, полученного посредством (2), с априорным описанием этой же волны, что предполагается провести в дальнейшем.

Авторы благодарят З.Н. Талаквадзе и М.М. Хазарадзе за поддержку данной работы.

Осуществление исследования, описанного в данной публикации, стало возможным отчасти благодаря Гранту № LC3000 Международного Научного Фонда.

Список литературы

[1] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
[2] *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1953. 486 с.
[3] *Королев Ф.А.* Теоретическая оптика. М.: Высшая школа, 1966. 556 с.
[4] *Kottler F.* Electromagnetic Theory. In: Progress in Optics. Amsterdam, 1967. V. VI. P 333–377.
[5] *Какичашвили Ш.Д.* Поляризационная голография. Л.: Наука, 1989. 142 с.
[6] *Gabor D.* // Nature. 1948. V. 161. P. 777–778.
[7] *Денисюк Ю.Н.* // ДАН СССР. 1962. Т.144. № 6. С. 1275–1278.
[8] *Poincare H.* // Acta math. 1892. V. 16. P. 297–339.
[9] *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.