01;03

Тепловое и изотермическое скольжение в новом модельном кинетическом уравнении Лиу

© *А.В. Латышев, А.А. Юшканов*

Московский педагогический университет

Поступило в Редакцию 22 января 1997 г.

Цель работы в исследовании пригодности модели Лиу для решения граничных задач кинетической теории. Решена задача об изотермическом и тепловом скольжениях, имеющая и самостоятельный интерес. Найдено ограничение на определяющий параметр модели.

Интеграл столкновений, предложенный в [1], получил развитие и применение в работах [2–4]. Это связано с рядом преимуществ, присущих этому подходу: относительная простота в сочетании с возможностью правильного описания существенных параметров газа, например, числа Прандтля. В [2–4] интеграл столкновений использовался только для анализа объемных задач. Вместе с тем серьезная оценка этого интеграла невозможна без анализа его возможности описания граничных задач. Целью статьи является применение интеграла столкновений из [1] для анализа задач теплового и изотермического скольжений, а также выяснения ограничений на параметр модели.

Линеаризуя уравнение Больцмана с интегралом столкновений из [1], получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f=-\zeta(f-f^{(0)})+2\beta A f^{(0)}\left(v_iv_j-\frac{1}{3}v^2\delta_{ij}\right)\nabla_j u_i$$
$$+Bf^{(0)}\left(\beta v^2-\frac{5}{2}\right)\nabla_i\nabla_j\ln T,\quad \beta=m/2kT. \qquad (1)$$

Здесь f — функция распределения, $\mathbf{v}$ — скорость молекул, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — локальная температура газа, $\mathbf{u}$ — локальная массовая скорость газа, ζ — имеет смысл частоты столкновений, $f^{(0)}$ — локально равновесное распределение Максвелла,

$$f^{(0)} = n(\beta/\pi)^{3/2}\exp(-\beta V^2), \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u},$$

n — локальная концентрация молекул. Коэффициенты A и B связаны с коэффициентами вязкости η_0 и теплопроводности λ_0:

$$A = 1 - \xi\eta_0/nkT, \quad B = 1 - 2\xi\lambda_0 m/5nk^2T.$$

Параметры модели можно подобрать так, чтобы получалось правильное значение числа Прандтля, и, кроме того, чтобы барнеттовские коэффициенты либо для потока тепла, либо для тензора давлений совпадали с соответствующими значениями, следующими из полного уравнения Больцмана. В [1,2] показано, что данная модель удовлетворяет законам сохранения и H-теореме. В [4] она использовалась в нелинейных задачах.

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$, ось x направлена перпендикулярно поверхности в глубь газа. Предположим, что в газе имеются градиент температуры вдоль поверхности и градиент тангенциальной скорости перпендикулярно поверхности. Оба градиента будем считать малыми. Будем считать, что направления скорости газа и градиента температуры совпадают с осью z. Линеаризуя задачу, запишем $f = f_0(1 + \varphi_0 + \varphi)$, где φ_0 — чепменовская функция распределения,

$$\varphi = 2c_y\left[u_{sl} + 2Kx - (1-A)Kc_x + \frac{3}{4}(1-A)L\left(\frac{5}{2} - c^2\right)\right],$$

f_0 — максвелловская функция распределения, φ — неизвестная функция, u_{sl} — искомая скорость скольжения, $K = \left(\frac{\partial u_y^*}{\partial x}\right)_{x=\infty}$, $L = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)_{x=\infty}$. Для функции φ уравнение (1) запишем в безразмерном виде

$$c_x\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \varphi = 2c_y u_y^* + 2Ac_xc_y\frac{\partial u_y^*}{\partial x'}.$$

Здесь $\mathbf{c} = \beta_0\mathbf{v}$, $\mathbf{u}^* = \beta_0\mathbf{u}$, $x' = \beta_0\xi x$, $\beta_0 = \sqrt{m/2kT_0}$, $0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$, A — числовой параметр; x' — снова обозначим x.

При $x \to +\infty$ функция $\varphi + \varphi_0$ должна переходить в чепменовскую, т.е. $\varphi(+\infty, \mathbf{c}) = 0$. Будем считать, что рассеяние молекул на поверхности носит чисто диффузный характер, т.е. $\varphi(0, \mathbf{c}) = -\varphi_0(0, \mathbf{c})$, $c_x > 0$.

Представим функцию φ в виде

$$\varphi = c_y \left[\psi(x,\mu) + (c_y^2 + c_z^2 - 2)g(x,\mu)\right], \quad \mu = c_x.$$

Тогда получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu) + \psi(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \left(1 + A\mu \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x,\mu') d\mu', \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\psi(0,\mu) = -2\left[u_{sl} - (1-A)K\mu - \frac{3}{4}(1-A)L\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\right], \; \mu > 0, \quad (3)$$

$$\psi(\infty,\mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (4)$$

С помощью обобщенных функций и краевых задач аналитических функций можно показать, что задача (2)–(4) имеет единственное решение

$$\psi(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-x/\eta} \frac{\eta - A\mu}{\eta - \mu} a(\eta) d\eta + (1-A)e^{\mu^2 - \frac{x}{\mu}} \lambda(\mu) a(\mu) \chi_+(\mu).$$

Здесь

$$\lambda(z) = 1 + z\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \frac{d\tau}{\tau - z}$$

— дисперсионная функция Черчиньяни, $\chi_+(\mu) = 1$, если $\mu > 0$; $\chi_+(\mu) = 0$, если $\mu < 0$,

$$a(\mu) = -\frac{c_0 + c_1\mu}{2\pi i \mu} \left(\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right),$$

где $c_0 = 2K + \frac{3}{2}LX_2$, $c_1 = \frac{3}{2}L$. Функция $X(z)$ удовлетворяет краевой задаче Римана $X^+(\mu)/X^-(\mu) = \lambda^+(\mu)/\lambda^-(\mu)$, $0 < \mu < \infty$, причем $X(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n z^{-n}$, где

$$X_n = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau^n d\tau}{X(-\tau)}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\arg\lambda^+(\tau)-\pi}{\tau-z}d\tau\right].$$

При построении функции распределения с использованием методов контурного интегрирования находится искомая скорость скольжения

$$u_{sl} = C_m lK + K_T \nu L,$$

где C_m и K_T — соответственно коэффициенты изотермического и теплового скольжений, причем

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{X_2 - A/\sqrt{2}}{1-A}, \quad K_T = \frac{3}{2}\left[\frac{X_3}{1-A} - \frac{A}{1-A}\frac{X_2}{2\sqrt{2}}\right]. \qquad (5)$$

Из равенств (5) видно, что при $A \to 0$ они переходят в соответствующие формулы для БГК-модели, полученные Черчиньяни [5] и Лойалкой [6]. Сравнение результатов, полученных по формулам (5), с многочисленными результатами из [7], полученными как на основе полного уравнения Больцмана, так и на основе его моделей, показывают, что предлагаемый в [1] интервал значений параметра A ($0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$) завышен,. Значения коэффициентов C_m и K_T довольно чувствительны к величине A. Разумное согласие между результатами, соответствующими полному уравнению Больцмана для молекул — твердых сфер и результатами по модели [1] удается достичь при $0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{5}$. Таким образом, анализ решения граничных задач позволяет выявить существенные ограничения на определяющий параметр модели [1].

В заключение отметим, что предлагаемая модель была использована [8] для описания поведения плотного газа вблизи поверхности.

Список литературы

[1] *Liu G.A.* // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. P. 277–280.
[2] *Garzo V.* // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. P. 1980–1986.
[3] *Garzo V.* // Mol. Phys. 1993. V. 78. P. 1129–1134.
[4] *Garzo V.* // Phys. Fluids. 1994. V. 6. N 11. P. 3787–3794.
[5] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
[6] *Loyalka S.K.* // Physica A. 1990. V. 163. P. 813–821.
[7] *Ohwada T., Sone Y., Aoki K.* // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. N 9. P. 1588–1599.
[8] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Поверхность. 1994. № 6. С. 45–52.