

01;12

Ускорение стенки проводящего цилиндра при его тепловом расширении в сильном магнитном поле

© Г.А. Шнеерсон

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 5 февраля 1997 г.

В работе рассчитан процесс резкого ускорения стенки цилиндра при его нагреве в присутствии сильного магнитного поля. Показано, что расширение тонкостенного жидкометаллического цилиндра имеет характер "взрывной неустойчивости": в рамках принятой модели скорость границы и азимутальный ток неограниченно растут за конечное время. Отмечено, что этот же эффект может иметь место и в случае упругой оболочки, а влияние сил электромагнитного торможения не исключает сингулярность решения, а приводит лишь к смещению момента, когда она проявляется.

Тепловое расширение проводящей среды при электрическом взрыве в аксиальном магнитном поле сопровождается появлением индуцированного азимутального тока. Это в свою очередь приводит к дополнительному нагреву проводника и росту скорости расширения. При определенных условиях процесс имеет тенденцию к раскачке, что открывает возможность нагрева и ускорения продуктов взрыва.

Компьютерное моделирование показало возможность такого процесса при электрическом взрыве проволоочки [1]. В данной работе рассмотрен другой случай, представляющий самостоятельный интерес — расширение проводника, находящегося в конденсированной фазе и имеющего форму тонкостенного цилиндра радиуса R_0 . Пусть толщина стенки h , приращение радиуса ΔR много меньше начального радиуса: $h, \Delta R \ll R_0$. Простейшие оценки показывают, что при нагреве стенки за малый промежуток времени она может быть ускорена до большой скорости в результате теплового расширения. Например, даже при приращении температуры $\Delta T = 1000$ К эта скорость имеет порядок 10^4 м/с, если начальный радиус $R_0 \approx 10^{-2}$ м, а скачок температуры происходит за время $\sim 10^{-8}$ с. Легко показать, что для реализации

такого режима необходимо обеспечить в проводнике ток с плотностью порядка 10^{12} А/м². В сверхсильном магнитном поле нагрев стенки возможен другим способом благодаря "самовозбуждению" азимутального тока, который индуцируется в стенке при ее движении и растет при увеличении скорости.

В рамках модельной задачи примем, что азимутальное напряжение σ_φ связано с приращением объемной плотности тепловой энергии $\Delta q'$ и радиуса ΔR следующим соотношением:

$$-\sigma_\varphi = \Gamma_0 \Delta q' - E \frac{\Delta R}{R_0}, \quad (1)$$

где Γ_0 — постоянная Грюнайзера, E — модуль упругости. Уравнение (1) является следствием двухчленного уравнения состояния среды. Уравнение движения стенки имеет вид

$$R_0 \gamma \frac{d^2 \Delta R}{dt^2} = -\sigma_\varphi + f_r, \quad (2)$$

где γ — плотность среды, а f_r — радиальная составляющая электромагнитной силы. Примем, что азимутальная составляющая плотности тока δ_φ и аксиальная δ_z постоянны по толщине стенки, тогда $f_r = (\delta_\varphi B_z - \delta_z B_\varphi)h$, при этом в сильном аксиальном поле второй член пренебрежимо мал.

Из закона индукции следует уравнение для плотности азимутального тока

$$\delta_\varphi = -\frac{1}{2\pi R \rho} \frac{d}{dt} (\pi R^2 B_i), \quad (3)$$

где ρ — удельное сопротивление материала (в рамках модельной задачи принимает $\rho = \text{const}$), B_i — индукция внутри цилиндра. Значение B_i несколько меньше, чем значение индукции внешнего поля B_e :

$$B_i = B_e + \mu_0 h \delta_\varphi, \quad (4)$$

где $\delta_\varphi < 0$. Уравнение (3) преобразуется к виду

$$\delta_\varphi = -\frac{1}{\rho} \left(B_e \frac{dR}{dt} + \frac{R}{2} \frac{dB_e}{dt} + \frac{\mu_0 h}{2R} \frac{d}{dt} (\delta_\varphi R^2) \right). \quad (5)$$

Далее примем условия $B_e = \text{const}$, $B_0 - B_i = -\mu_0 h \delta_\varphi \ll B_0$. Это позволяет сохранить лишь первый член в правой части уравнения (5).

Объемное тепловыделение определяется обеими составляющими плотности тока и удельным сопротивлением проводника ρ :

$$\frac{d\Delta q'}{dt} = \rho (\delta_\varphi^2 + \delta_z^2). \quad (6)$$

После дифференцирования уравнения (2) по времени приходим к следующему соотношению для азимутальной составляющей плотности тока (δ_z считается заданной):

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2(\delta_\varphi \rho)}{dt^2} + \frac{d\delta_\varphi}{dt} \frac{B_0^2}{\gamma \rho} + \frac{E \delta_\varphi}{\gamma R^2} + \frac{\Gamma_0 B_0}{\gamma R_0} \delta_\varphi^2 = -\frac{\Gamma_0 B_0}{\gamma R_0} \delta_z^2. \quad (7)$$

В наиболее простом виде эффект ускорения оболочки и самовозбуждения азимутального тока можно продемонстрировать на примере жидкометаллического цилиндра без учета сил электромагнитного торможения. При принятых допущениях можно пренебречь вторым и третьим членами в левой части уравнения (7). Пусть стенка цилиндра в результате прохождения кратковременного импульса тока мгновенно приобретает начальную скорость V_0 . Тогда правую часть (7) можно считать равной нулю, а в качестве начальных использовать условия $\delta_\varphi(0) = -\frac{B_0}{\rho} V_0$ и $\frac{d\delta_\varphi}{dt} = 0$. Таким образом, вместо (7) приходим к уравнению

$$\frac{d^2 \delta_\varphi}{dt^2} + \frac{\Gamma_0 B_0}{\gamma R_0} \delta_\varphi^2 = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) с указанными граничными условиями имеет вид соотношения, связывающего безразмерное время $x = t/t_0$ с безразмерным током $y = \delta_\varphi/\delta_\varphi(0)$. Это соотношение имеет вид

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}, \quad (9)$$

а характерное время есть $t_0 = B_0^{-1} \left(\frac{\gamma \rho R_0}{\Gamma_0 V_0} \right)^{1/2}$. Зависимость $y(x)$ может быть выражена с помощью функции Вейерштрасса, она представлена на рис. 1 (кривая 1) и показывает резкий рост азимутального тока. В рамках данной модели имеет место сингулярность — неограниченный

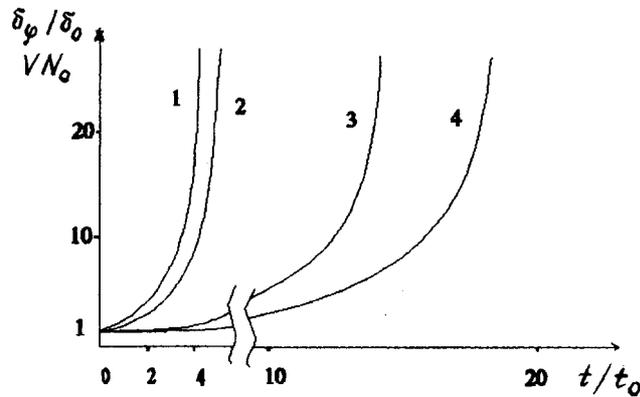


Рис. 1. Зависимости, характеризующие самовозбуждение азимутального тока и движение стенки жидкометаллического цилиндра при его тепловом расширении в сильном магнитном поле: 1 — $\beta = 0$; 2 — $\beta = 1$; 3 — $\beta = 10$; 4 — $\beta = 20$.

рост тока при $t_1 = 2.97t_0$. Вблизи этого момента ток изменяется по закону

$$\delta_\varphi = -\frac{6\gamma R_0}{\Gamma_0 B_0 (t_1 - t)^2}. \quad (10)$$

Приращение плотности тока и скорости стенки от значений $2\delta_\varphi(0)$ и $2V_0$ до соответственно $20\delta_\varphi$ и $20V_0$ происходит за промежуток времени от 1.5 до 2.4 t_0 . Для алюминия ($\rho \approx 10^{-7}$ Ом·м, $\gamma \approx 3 \cdot 10^3$ кг/м³) $t_0 \approx 0.6$ мкс, если $R_0 = 3$ см, $B = 100$ Тл, $V_0 = 1$ Км/с. В этом примере приращение радиуса за время ускорения до $20V_0$ составляет около 2.5 мм. Рассмотренный пример показывает, что при тепловом расширении оболочки в сильном поле развивается своего рода неустойчивость: чем быстрее идет расширение, тем больший ток индуцируется в оболочке и тем интенсивнее идет джоулев нагрев, приводящий к расширению. Разумеется, при неограниченном росте тока в окрестности точки t_1 роль последнего члена в уравнении (5) перестает быть малой. Влияние этого члена должно быть рассмотрено отдельно, а полученный результат является асимптотическим решением, описывающим предельный случай $h \rightarrow 0$. Можно показать, что нагрев оболочки происходит за счет энергии магнитного поля: она убывает, так как при неизменном

внешнем поле с индукцией $B_e \approx B_0$ растет область более слабого поля с индукцией $B_i < B_e$. Действие силы электромагнитного торможения, которая учитывается вторым членом в левой части уравнения (7), не снимает эффект самовозбуждения азимутального тока, а приводит лишь к смещению этого процесса во времени. Это показывает серия кривых 2, 3, 4 (рис. 1), построенная для разных значений безразмерного параметра $\beta = B_0(R_0/\gamma \cdot \rho \cdot r_0 V_0)^{1/2}$, характеризующего эффект торможения.

Влияние сильного аксиального поля на тепловое расширение твердого проводника можно описать в рамках модели, которая описывает расширение стенки цилиндра, обладающего свойствами упругого тела (при допущениях: $E = \text{const}$, $\rho = \text{const}$). В этом случае следует использовать полное уравнение (7). Ограничимся случаем, когда ток δ_z включается толчком, а потом не меняется во времени. При этом упомянутое уравнение может иметь стационарное решение, когда $\delta_\varphi = \text{const}$ и $dR/dt = \text{const}$. Данное уравнение описывает асимптотический вид зависимости $\delta_\varphi(t)$. Эта зависимость имеет место в установившемся режиме после затухания переходного процесса. В этом случае приходим к уравнению

$$\delta_\varphi^2 + \frac{E\delta_\varphi}{B_0\Gamma_0 R_0} + \delta_z^2 = 0, \quad (11)$$

решение которого имеет вид

$$\delta_\varphi = \delta_\infty = -\frac{E}{2B_0\Gamma_0 R_0} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2B_0\Gamma_0 R_0}\right)^2 - \delta_z^2}. \quad (12)$$

Здесь лишь первый корень уравнения имеет физический смысл, поскольку в пределе $B_0 \rightarrow 0$ он дает значение $\delta_\infty = 0$. Это решение показывает, что при заданном значении δ_z азимутальная плотность тока тем больше, чем сильнее поле B_0 . В асимптотическом режиме электромагнитная сила уравновешивает азимутальное напряжение, радиус растет с постоянной скоростью $d(\Delta R)/dt = -\rho\delta_\infty/B_0$ и азимутальная плотность тока не зависит от проводимости. Как следует из (12), указанный режим возможен лишь при условии, что плотность аксиального тока не превышает значения

$$\delta_0 = \frac{E}{2B_0\Gamma_0 R_0}. \quad (13)$$

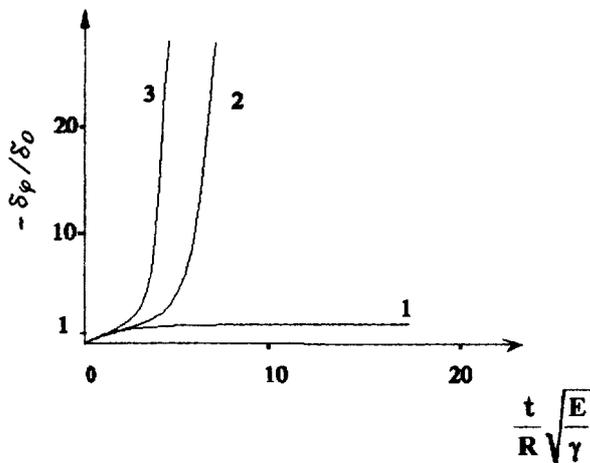


Рис. 2. Изменение во времени азимутального тока, возбуждаемого при нагреве и расширении упругого цилиндра в сильном магнитном поле: 1 — $\alpha = (B_0/\rho)\sqrt{2R/E\gamma} = 2$, $\delta_z/\delta_0 = 1$; 2 — $\alpha = 2$, $\delta_z/\delta_0 = 1.2$; 3 — $\delta_z/\delta_0 = 2$.

Значение этого параметра выходит за рамки данного примера. Он является характерной величиной для процесса ускорения упругой цилиндрической оболочки в аксиальном поле. Если $\delta_z > \delta_0$, то асимптотический режим отсутствует и имеет место нестационарный процесс, в ходе которого в рамках данной модели скорость и ток δ_φ неограниченно растут за конечное время; финальная стадия этого процесса описывается уравнением (8), а решение вблизи точки разрыва — формулой (10).

Три примера численного решения полного уравнения (7), в одном из которых (кривая 1) реализуется асимптотический режим, а в двух других (кривые 2, 3) — непрерывное ускорение, представлены на рис. 2. Отметим, что сингулярный режим в данном примере, как и в предыдущем, реализуется несмотря на действие силы электромагнитного торможения. Режим самовозбуждения азимутального тока интересен тем, что, несмотря на противодействие упругой и электромагнитной сил, он позволяет разогнать оболочку до состояния, при котором лишь инерция

материала ограничивает ускорение стенки. При заданном токе δ_z этот режим, являющийся проявлением отмеченной выше неустойчивости, реализуется, если выполняется условие

$$B > B_1 = \frac{E}{2\Gamma_0 R_0 \delta_z} = \frac{\pi E h}{\Gamma_0 i_z}, \quad (14)$$

где i_z — аксиальный ток в металлическом цилиндре из фольги толщиной h . Из этого условия следует, что в случае медной фольги ($E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\Gamma_0 \approx 2$) толщиной $h = 0.1$ мм при токе $i_z \approx 3 \cdot 10^5$ А имеем: $B_1 \approx 100$ Тл. Пример показывает, что для реализации режима самовозбуждения азимутального тока и резкого ускорения стенки цилиндрической оболочки необходимо использовать очень сильное магнитное поле.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-19185а).

Список литературы

- [1] Колгатин С.Н., Шнеерсон Г.А. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 5. С. 67–71.