

01

Взаимная синхронизация процессов переключений в связанных системах Лоренца

© В.С. Анищенко, А.Н. Сильченко, И.А. Хованов

Саратовский государственный университет

Поступило в Редакцию 23 декабря 1996 г.

В работе методом численного эксперимента исследуется эффект синхронизации средних частот переключений в двух симметрично связанных системах Лоренца, функционирующих в режиме хаоса. Обнаруженному эффекту на плоскости параметров "связь-расстройка" соответствует область синхронизации процессов переключений, внутри которой средние частоты переключений совпадают с заданной точностью.

Одним из механизмов самоорганизации нелинейных колебательных систем является синхронизация, в результате которой взаимодействующие подсистемы демонстрируют тенденцию к колебаниям на равных (или рационально связанных) частотах [1]. При слабых взаимодействиях реализуется эффект "захвата частоты", при достаточно сильных — эффект подавления одной из собственных частот. В ходе физических и численных экспериментов было установлено, что эффекты взаимной и вынужденной синхронизации также имеют место при взаимодействии как хаотических, так и стохастических систем.

Эффект стохастической синхронизации через захват средней частоты переключений сигналом внешнего воздействия был обнаружен при исследовании бистабильной системы, возмущаемой внешней периодической силой и белым шумом [2]. При рассмотрении двух симметрично связанных бистабильных систем, возмущаемых статистически независимыми источниками шума, в работе [3] была обнаружена стохастическая синхронизация процессов переключений.

В работах [5,6] классическая концепция синхронизации динамических систем была обобщена на случай систем, имеющих хаотический аттрактор седлофокусного типа, в спектре которого имеется четко различимая базовая частота. Эффект вынужденной синхронизации пе-

переключений, обусловленных перемежаемостью типа "хаос-хаос" в цепи Чуа был рассмотрен в работе [7].

С учетом сказанного выше представляется вполне естественной мысль о том, чтобы рассмотреть процесс синхронизации двух симметрично связанных бистабильных систем, переключения в которых обусловлены не действием источников шума, как в [3], а внутренней динамикой самих подсистем. В качестве подсистемы, обладающей подобными свойствами, мы выбрали систему Лоренца [8].

Рассматриваемая динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - z_1) + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - x_1 z_1 - y_1, \\
 \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - z_1 b, \\
 \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - z_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - x_2 z_2 - y_2, \\
 \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - z_2 b.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Как видно из (1), взаимодействующие подсистемы расстроены по параметру r . Параметры подсистем таковы ($\sigma = 10$, $r_1 = 28$, $r_2 = 28.8$, $b = 8/3$), что в каждой из них существует аттрактор Лоренца. В соответствии с методом "двух состояний" [9], введя величины

$$x'_1 = \begin{cases} +1, & x_1 > 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}, \quad x'_2 = \begin{cases} +1, & x_2 > 0 \\ -1, & x_2 < 0 \end{cases},$$

мы переходим к рассмотрению исследуемой модели как системы двух симметрично связанных хаотических бистабильных подсистем. Процесс переключений в подсистемах можно охарактеризовать с помощью плотности распределения времен пребывания $p(\tau)$ в одном из состояний, обозначенных нами как $+1$ и -1 . По аналогии со стохастической бистабильной системой мы можем ввести в рассмотрение среднюю частоту переходов $\langle f \rangle$, определив период переключений как первый момент стационарного случайного процесса с плотностью распределения $p(\tau)$:

$$\langle T \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau, \quad \langle f \rangle = 1/\langle T \rangle.$$

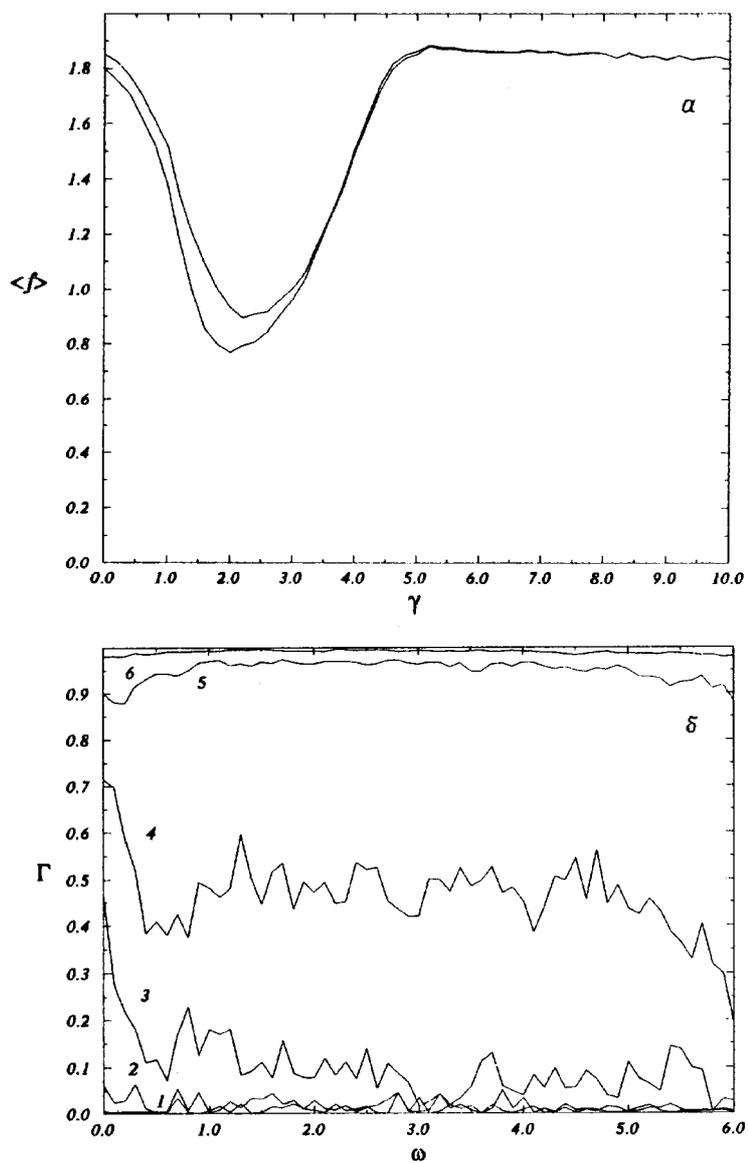


Рис. 1. a — зависимость средних частот переключений от связи; b — функция когерентности при различных значениях связи.

Результаты вычислений зависимости частот переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ от степени связи представлены на рис. 1, а. При $\gamma = 0$ частоты переключений подсистем неидентичны, что обусловлено различием значений параметров r_1 и r_2 . Здесь уместно заметить, что увеличение параметра r подсистемы приводит к медленному монотонному росту ее средней частоты переключений. При увеличении связи средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ вначале уменьшаются. При $\gamma \cong 2.8$ они достигают минимального значения. Дальнейший рост связи обуславливает их постепенное увеличение и сближение. При $\gamma = 6$ частоты переключений совпадают. Следует заметить, что установившаяся средняя частота переключений в режиме синхронизации ($\gamma > 6$) не совпадает с исходными значениями $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ при ($\gamma = 0$).

Эффект сближения частот переключений в подсистемах при увеличении связи по аналогии с классической теорией колебаний естественно назвать эффектом взаимной синхронизации средних частот переключений симметрично связанных бистабильных системах.

Рост степени коррелированности процессов переключений в подсистемах может быть проиллюстрирован с помощью функции когерентности:

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|S_{x_1 x_2}(\omega)|}{S_{x_1}(\omega) S_{x_2}(\omega)},$$

где $S_{x_1 x_2}(\omega)$ — взаимный спектр мощности процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а $S_{x_1}(\omega)$ и $S_{x_2}(\omega)$ — спектры процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно. Как хорошо известно, функция когерентности изменяется от 0 до 1. Стремление Γ к 1 в некоторой частотной области означает рост когерентности. Результаты вычислений приведены на рис. 1, б. В случае нулевой связи $\Gamma = 0$ (см. кривую 1 на рис. 1, б). Постепенное увеличение связи приводит к росту функции когерентности в низкочастотной области, что свидетельствует о возрастании степени коррелированности процессов переключений в подсистемах (кривые 2, 3, 4, 5 и 6 вычислялись для случая $\gamma = 0.5, 1.5, 3.0, 4.5, 5.5$ соответственно).

Качественные изменения в динамике системы обусловлены бифуркациями, имеющими место при увеличении связи: бифуркациями потери симметрии, в результате которых в окрестности симметричного подпространства формируется притягивающее семейство седловых циклов, а также бифуркациями Хопфа состояний равновесия. Детальное рассмотрение бифуркационного механизма явления выходит за рамки данной статьи.

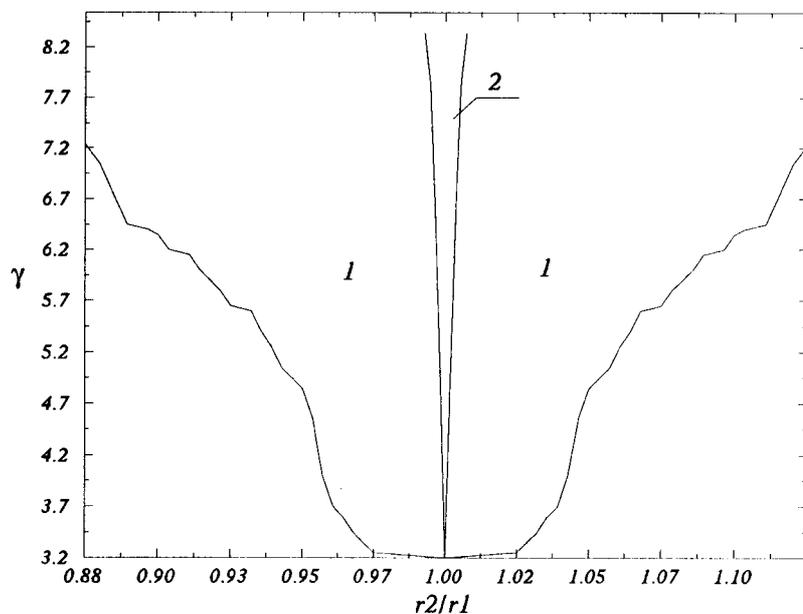


Рис. 2. Области синхронизации переключений — область 1 и полной синхронизации — область 2 на плоскости параметров расстройка–связь.

Как известно, из классической теории колебаний основной характерной чертой явления синхронизации является наличие области когерентного поведения подсистем на плоскости параметров ”связь–расстройка”. По аналогии с классическим случаем вполне естественной представляется мысль о построении подобной области для случая, когда в качестве подсистемы рассматривается бистабильная система с переключениями, обусловленными сложной внутренней динамикой. В качестве параметра, ”управляющего” средней частотой переключений в подсистеме, был выбран параметр r . Под ”расстройкой” систем мы в данном случае понимаем величину $p = r_1/r_2$, где r_1 и r_2 — параметры первой и второй подсистем соответственно.

В силу того что временные масштабы, характеризующие подсистемы, в данном случае связаны со случайными величинами (ими являются средние частоты переключений), говорить о построении четко

ограниченной области на плоскости параметров "расстройка–связь" вряд ли представляется возможным. Более разумной, на наш взгляд, кажется мысль о построении области, внутри которой переключения более когерентны (средние частоты $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ совпадают с заданной точностью), чем вне нее. Результаты построения приведены на рис. 2. Внутри области 1 имеет место синхронизация средних частот переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$, которые отличаются друг от друга на 0.5%. Область 2 — область полной синхронизации подсистем ($x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$). Как видно из рисунка, область 2 лежит внутри области 1, т.е. синхронизация процессов переключений в подсистемах с изменением связи предшествует полной синхронизации хаотических колебаний подсистем.

В заключение отметим, что настоящая работа частично финансировалась за счет средств Российского фонда фундаментального естествознания (грант 95-0-8.3-66).

Список литературы

- [1] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [2] *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4157.
- [3] *Neiman A.B.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 348.
- [4] *Kraters H.A.* // Physica. 1940. V. 7. P. 28.
- [5] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* // РЭ. 1991. Т. 36. № 2. С. 338–351.
- [6] *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos—Models and Experiments. World Scientific, Singapore, 1995. 400 p.
- [7] *Хованов И.А., Анищенко В.С.* // РЭ. 1997 (в печати).
- [8] *Lorenz E.N.* // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
- [9] *Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O.* // J. of Circuits, Systems, and Computers. 1993. V. 3. N 2. P. 553–578.