

01

Нерегулярная динамика цепочки отображений окружности с квазипериодическим воздействием

© Т.Е. Вадивасова, О. Сосновцева, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет

Поступило в Редакцию 16 декабря 1996 г.

В работе анализируется пространственная эволюция квазипериодических режимов в цепочке связанных отображений окружности. Исследуются механизмы возникновения странной нехаотической динамики и свойства нерегулярных аттракторов.

Цепочки и решетки из отдельных элементов, обладающих нетривиальной динамикой, представляют собой простейшую модель распределенной среды и в связи с этим достаточно интенсивно исследовались [1-9]. По сравнению с другими одномерными отображениями, отображение окружности

$$x(n+1) = x(n) + \Omega - (K/2\pi) \sin(2\pi x(n)), \text{ mod } 1$$

обладает гораздо более богатой динамикой. Оно демонстрирует различные периодические, квазипериодические и хаотические режимы. Цепочка, состоящая из таких элементов, дает большие возможности для изучения различных сценариев развития нетривиальной динамики, однако до сих пор почти не исследовалась.

Можно предполагать, что однонаправленное воздействие предыдущих элементов на последующие с учетом существования в них квазипериодических колебаний должно при некоторых условиях порождать так называемые странные нехаотические аттракторы, т. е. фрактальные множества, не обладающие свойством перемешивания. Понятие странные нехаотические аттракторы было введено в [10]. Как показали исследования [11,12], странный нехаотический аттрактор является типичным объектом для систем с квазипериодическим возбуждением. Известны механизмы разрушения эргодических квазипериодических колебаний, приводящие к странным нехаотическим аттракторам: 1) кризис тора,

когда образование фрактальной структуры происходит в момент касания устойчивой инвариантной кривой (которая является математическим образом двухчастотных квазипериодических колебаний) с неустойчивой в некотором множестве точек [12,13]; 2) потеря гладкости тором [14]. Таким образом, понятие нерегулярной динамики должно включать в себя не только хаотические режимы, но и режимы, соответствующие странному нехаотическому поведению.

Цель настоящей работы состоит в анализе механизмов развития хаотических и нехаотических колебаний в цепочке однонаправленно связанных отображений окружности.

Исследуемая дискретная модель может быть записана в виде:

$$x_0(n+1) = x_0(n) + \theta_0, \text{ mod } 1$$

$$x_1(n+1) = x_1(n) + \Omega_1 - (K_1/2\pi) \sin(2\pi x_1(n)) + A \cos(2\pi x_0(n)), \text{ mod } 1$$

$$x_j(n+1) = x_j(n) + \Omega_j - (K_j/2\pi) \sin(2\pi x_j(n)) + \gamma \cos(2\pi x_{j-1}(n)), \text{ mod } 1$$

где $j = 2, 3, \dots, m$ — номер парциальной ячейки (пространственная координата), n — дискретное время. Все парциальные ячейки ($j > 1$) предполагаются идентичными. Воздействие предыдущей ячейки на последующую характеризуется коэффициентом связи γ . На ячейку с номером $j = 1$ подается воздействие ячейки с номером $j = 0$, обладающее числом вращения θ_0 . Если θ_0 иррационально, то такое воздействие является квазипериодическим (в потоковой системе этому соответствует двухчастотное воздействие с соотношением частот $\omega_1/\omega_2 = \theta_0$). Интенсивность воздействия характеризуется параметром A .

Перечислим кратко эффекты, наблюдаемые в цепочке при различном выборе параметров.

1. В закритической области ($K > 1$) при $A = 0$ можно наблюдать возникновение хаоса в результате конечного числа бифуркаций удвоения вдоль цепочки (аналогично результатам, полученным в [3,5]). Однако очень слабое квазипериодическое воздействие приводит к разрушению хаоса и возникновению странных нехаотических аттракторов. На рис. 1,а представлены (x_0-x_j) проекции фазовых траекторий для ячеек с номерами $j = 4, 5, 6$. Параметры выбирались равными $K = 1.55$, $\Omega = 0.5$, $\gamma = 0.13$, $A = 0$. При этом в пятой ячейке возникает хаотическая динамика. Ляпуновский показатель, соответствующий данной подсистеме, $\lambda = +0.0434$. Последующие

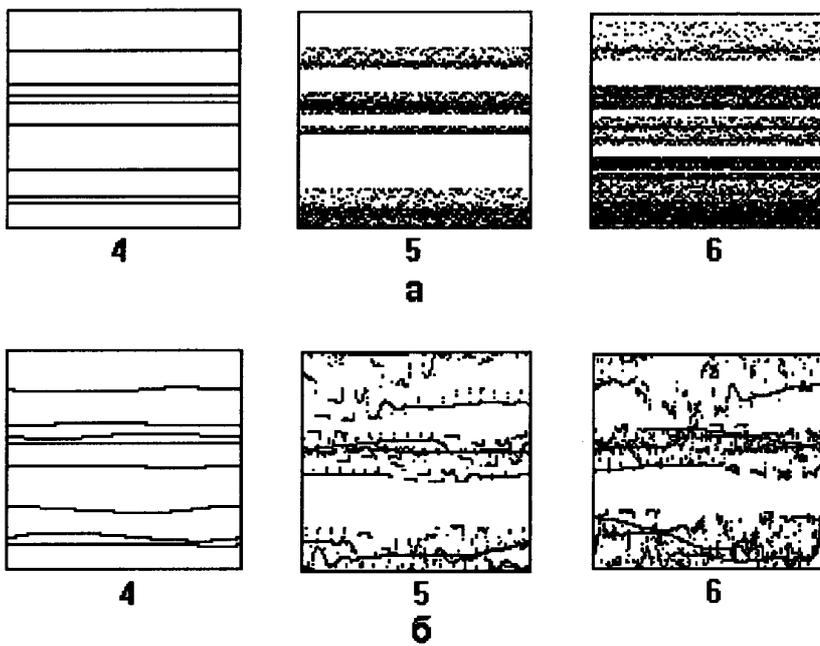


Рис. 1. $(x_0 - x_j)$ проекции фазовых портретов для $j = 4, 5, 6$ при $K = 1.55$, $\Omega = 0.5$, $\gamma = 0.13$: *а* — в случае отсутствия внешнего воздействия $A = 0$; *б* — при внешнем квазипериодическом воздействии $A = 0.001$.

ячейки не добавляют положительных ляпуновских показателей, а как бы ретранслируют хаотическую динамику, возникающую в пятой ячейке. На рис. 1, *б* изображены фазовые портреты в тех же ячейках, при тех же значениях параметров и тех же начальных условиях, но при слабом квазипериодическом воздействии $A = 0.001$ с числом вращения, равным золотому сечению $\theta_0 = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Вместо хаоса в пятой и последующих ячейках наблюдается режим странных нехаотических аттракторов ($\lambda = -0.0516$). Дальнейшее увеличение воздействия приводит к фрактализации инвариантной кривой в ячейках с номерами $j < 5$.

2. Квазипериодическое воздействие на элементы цепочки в области $K > 1$ может не только разрушать, но и индуцировать развитие

хаотической динамики вдоль цепочки. Например, при $K = 1.65$, $\Omega = 0.5$, $A = 0.15$, $\theta_0 = 0.5(\sqrt{5} - 1)$ в первой ячейке ($j = 1$) имеет место режим странных нехаотических аттракторов, а в последующих в некоторой области изменения параметра связи $\gamma \in [0.13, 0.29]$ возможно наблюдать развитие хаоса. Так при $\gamma = 0.2$ каждая последующая ячейка $j = 2, 3 \dots 9$ добавляет положительный ляпуновский показатель в ляпуновский характеристический показатель. Таким образом, вдоль цепочки развивается гиперхаос. Вне отмеченной области значений γ хаос не возникает ни в одной ячейке.

3. При достаточно сильной связи вдоль цепочки можно наблюдать явление стабилизации хаоса, аналогичное исследованному в [4]. Так, при выборе значений параметров $K = 2.0$, $\Omega = 0.5$, $A = 0.15$ и малых $\gamma \sim 0.1-0.2$ в первых 30 ячейках наблюдается практически линейный рост энтропии Колмогорова $H_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i^+$ с ростом j . С увеличением параметра связи γ последующие ячейки перестают добавлять положительные ляпуновские показатели и энтропия вдоль цепочки перестает расти (например, при $\gamma = 0.4$ она стабилизируется уже начиная со второй ячейки).

4. Если в докритической области ($K > 1$) вдоль цепочки возможно развитие двух типов нетривиальной динамики, то при $K < 1$ хаотическое поведение исключено (парциальная ячейка при $K < 1$ представляет собой обратимое одномерное отображение, которое не может обладать хаотической динамикой ни само по себе, ни при внешнем воздействии). Как показали исследования, в этом случае типично развитие непериодических нехаотических колебаний вдоль цепочки. Такая эволюция имеет место при различных значениях параметров ячеек и степени связи.

5. Нужно отметить, что в докритической области ($K < 1$) странный нехаотический аттрактор может возникнуть не только в результате разрушения двухчастотных квазипериодических колебаний (инвариантной кривой), но и в результате разрушения трехчастотных квазипериодических колебаний (и, по-видимому, в общем случае N -частотных квазипериодических колебаний). На рис. 2,а представлены $(x_0 - x_j)$ проекции фазовых траекторий в ячейках с номерами $j = 4, 5, 6$ для случая квазипериодического воздействия с числом вращения $\theta_0 = \sqrt{2-1}$ (серебряное сечение) на первый элемент цепочки при амплитуде воздействия $A = 0.058$. Параметры элементов цепочки были выбраны равными $K = 0.8$, $\Omega = 0.610074$, что соответствует квазипериодическому режиму в парциальной ячейке с числом вращения, приблизительно равным

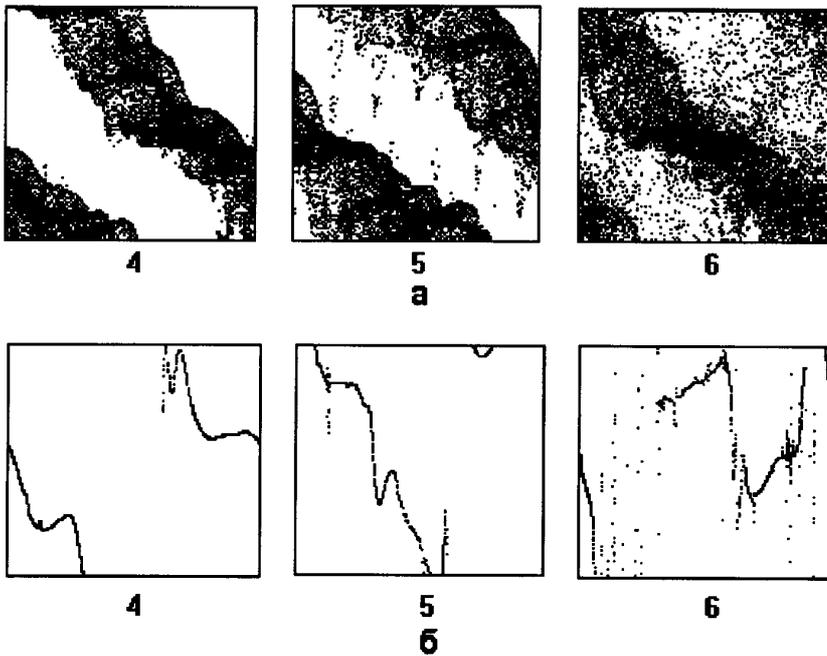


Рис. 2. Для $j = 4, 5, 6$ при $K = 0.8$, $\Omega = 0.60074$, $\gamma = 0.2$, $A = 0.058$. a — $(x_0 - x_j)$ проекции фазовых портретов; δ — сечение Пуанкаре плоскостью $x_1 = 0.5$.

золотому сечению. Параметр связи γ был выбран равным 0.2. В первых элементах цепочки имеет место трехчастотный квазипериодический режим. Его эволюцию с ростом j трудно проследить по двумерной проекции фазового портрета. Поэтому для анализа характера динамики вводится сечение фазового портрета плоскостью, что позволяет снизить размерность исследуемого множества на единицу. На рис. 2, б $(x_0 - x_j)$ проекции сечений фазового портрета плоскостью $x_1 = 0.5$ для $j = 4, 5, 6$. Точность построения сечений задана равной 10^{-4} . Можно видеть, что при $j = 4, 5$ кривая, получаемая в сечении, является гладкой, что соответствует трехчастотному квазипериодическому режиму. В шестой ячейке наблюдается фрактализация кривой в сечении

аналогично тому, как происходит фрактализация инвариантной кривой, соответствующей двухчастотным квазипериодическим колебаниям.

Таким образом, исследования показали, что для цепочки отображений окружности характерны как явления, уже исследованные на цепочках с другими парциальными элементами (бифуркации удвоения периода и развитие хаоса вдоль пространственной координаты, мультистабильность, насыщение хаоса вдоль цепочки и т. д.), так и новые явления, связанные с возможностью квазипериодических режимов. Задание квазипериодического режима хотя бы в нулевом элементе цепочки (квазипериодическое воздействие) своим типичным следствием имеет возникновение в ячейках цепочки начиная с некоторого номера j , грубых странных нехаотических аттракторов в широкой области значений параметров.

Цепочка отображений окружности также предоставляет возможность введения расстройки параметров ячеек, управляющих их числами вращения, что обеспечит возможность получения многочастотных квазипериодических режимов и исследования их разрушения. Такое исследование является целью дальнейших экспериментов.

Работа частично финансировалась на средства гранта Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66).

Список литературы

- [1] Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 39. В. 12. С. 561–264.
- [2] Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27. № 6. С. 87–96.
- [3] Кузнецов С.П., Пиковский А.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 3. С. 308–319.
- [4] Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 12. В. 24. С. 1505.
- [5] Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1120.
- [6] Crutchfield J.P., Kaneko K. // Singapore: World Scientific Publ. Co. 1987.
- [7] Kaneko K. Physica D. 1989. N 37. P. 60–82.
- [8] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 2. С. 142–146.
- [9] Kuznetsov S.P. // Chaos, Solutions and Fractals. 1992. V. 2. N 3. P. 281–301.
- [10] Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. // Physica D. 1994. V. 13. P. 261–268.

- [11] *Ding M., Grebogy C., Ott E.* // *Phys. Rev. A.* 1998. V. 39. N 5. P. 2593–2598.
- [12] *Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* // *Physica D.* 1995. V. 88. P. 176–186.
- [13] *Heagy J.F., Hammel S.M.* // *Physica D.* 1994. V. 70. P. 140–153.
- [14] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnoblseva O.* // *Physical Review E.* 1996. V. 53. N 5. P. 4451–4457.