

01;09

Неограниченное возрастание размерности хаотических аттракторов при линейной фильтрации

© А.А. Кипчатов, Е.Л. Козленко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Государственный учебно-научный центр "Колледж"

Поступило в Редакцию 13 ноября 1996 г.

Работа посвящена анализу предельных возможностей усложнения хаотических колебаний в фильтрах высокого порядка. Утверждается, что предельная размерность аттракторов хаотических колебаний в линейных фильтрах может увеличиваться до бесконечности, что позволяет генерировать детерминированные тестовые хаотические колебания с любой наперед заданной размерностью.

То, что линейные радиофизические и цифровые фильтры могут приводить к усложнению хаотических колебаний, т. е. к запутыванию траекторий аттрактора и увеличению его размерности, известно [1–6]. Возможны два типа усложнения аттракторов: 1) для фильтров с конечным откликом траектории аттрактора, восстановленного по выходным колебаниям, вытягиваются и многократно складываются, но их тонкая структура сохраняется и размерность повышается только для конечных масштабов наблюдения, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ сохраняется (наблюдаемое увеличение размерности); 2) для фильтров с бесконечным откликом траектории восстановленного аттрактора расслаиваются фрактальным образом и размерность реально возрастает [6]. Величина предполагаемого увеличения размерности для фильтров 1-го порядка равна единице по гипотезе Бадии и Полити [1], экспериментальные факты подтверждают это [1,2,5]. Но для фильтров более высокого порядка степень повышения размерности неясна. Настоящая работа посвящена анализу предельных возможностей усложнения хаотических колебаний в фильтрах высокого порядка.

По аналогии с [6] рассмотрим простейшие хаотические колебания, генерируемые квадратичным отображением вида

$$x_n = 1 - \lambda x_{n-1}^2. \quad (1)$$

При $\lambda = 1.9$ в системе (1) реализуются развитые хаотические колебания и последовательность $\{x_n\}$ почти всюду покрывает интервал $[-1, 1]$. Ясно, что размерность аттрактора таких колебаний стремится к 1 снизу.

Простейший рекурсивный фильтр первого порядка имеет вид

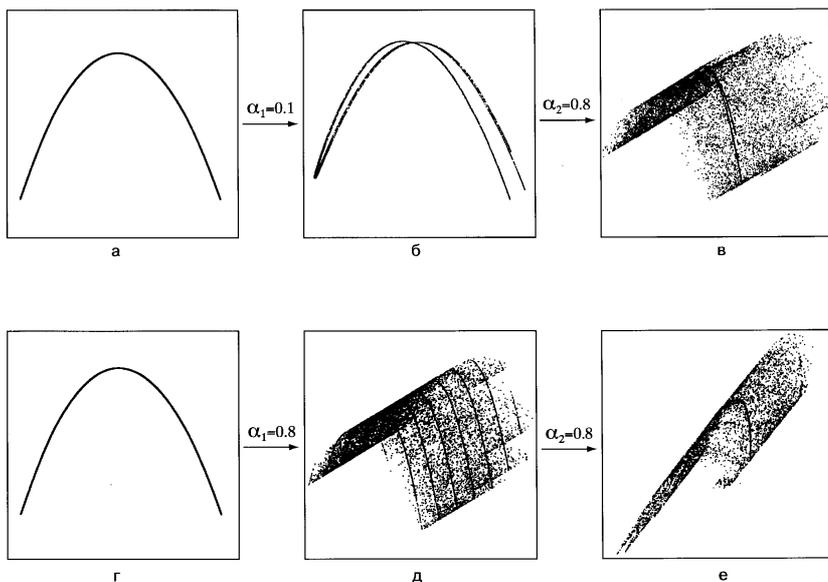
$$z_n = \alpha z_{n-1} + x_n, \quad (2)$$

где z_n — выходной сигнал, x_n — входные колебания, α — коэффициент, определяющий частоту среза фильтра. Именно такому цифровому фильтру соответствуют радиофильтры вида $\dot{z} = \eta z + x$. Механизм усложнения аттракторов хаотических колебаний при их прохождении через рекурсивный фильтр первого порядка, приводящий к фрактальному расслоению аттрактора, рассмотрен в [6]. Благодаря линейности рассматриваемых фильтров переход к фильтрам i -порядка возможен простым последовательным соединением i рекурсивных фильтров 1-го порядка. В последнем случае мы приходим к цепочке вида

$$\begin{aligned} z_{n,i} &= \alpha_i z_{n-1,i} + z_{n,i-1}, \\ z_{n,0} &= x_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где i — порядковый номер фильтра в цепочке. Анализ аттракторов, восстановленных методом временных задержек [7] по выходным колебаниям цепочки рекурсивных фильтров, может быть осуществлен либо качественно — по проекциям аттракторов, либо количественно — по их корреляционной размерности. Однако ни тот, ни другой способ не позволяют уверенно идентифицировать уровень сложности получаемых колебаний из-за возрастания размерности фазового пространства и существенного перемешивания точек аттрактора. Поэтому был выбран метод визуального анализа структуры аттракторов по многократным сечениям Пуанкаре.

Ясно, что сечение объема дает поверхность, сечение этой поверхности — линию, а сечение линии — точку. Поэтому, проводя процедуру последовательных сечений, можно за k шагов получить простые геометрические образы, доступные для визуальной идентификации. Полученные результаты анализа структуры восстановленных аттракторов сводятся к следующему. Единственный рекурсивный фильтр приводит к трансформации аттрактора из линии при $\alpha = 0$ (см. рисунок, *a, z*) в поверхность при $\alpha \rightarrow 1$ (см. рисунок, *б, d*). Результирующий аттрактор,



Эволюция аттрактора квадратичного отображения при линейной фильтрации: *a, г* — аттрактор входного сигнала (квадратичная парабола); *б* — аттрактор сигнала, прошедшего один рекурсивный фильтр, в пространстве (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) (для удобства наблюдения аттрактор повернут относительно осей), параметр фильтра $\alpha_1 = 0.1$; *д* — аттрактор сигнала, прошедшего один рекурсивный фильтр, в пространстве (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) (аттрактор повернут относительно осей), параметр фильтра $\alpha_1 = 0.8$, произведено несколько сечений по координате x_{n+1} ; *в* — аттрактор сигнала, прошедшего два рекурсивных фильтра, в пространстве (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) (аттрактор повернут относительно осей), параметры фильтров $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.1$, координата сечения $x_{n+1} = 0.2$; *е* — аттрактор сигнала, прошедшего два рекурсивных фильтра, в пространстве (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) (аттрактор повернут относительно осей), параметры фильтров $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.8$, координата первого сечения $x_{n+3} = 0.2$, координата второго сечения $x_{n+1} = 0.2$.

восстановленный в трехмерном фазовом пространстве (z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) , представляет собой "параболический лоток" (см. рисунок, *д*), структура которого проявляется линиями сечений Пуанкаре. Полная поверхность реализуется лишь при $\alpha \rightarrow 1$ (частота среза фильтра стремится к 0). При более высоких частотах среза фильтра поверхность "лотка" остается разреженной и его структура так явно не проявляется (см. рисунок, *б*). При оценке корреляционной размерности это приведет к тому, что на корреляционном интеграле не будет плато, а его локальный наклон, т. е. размерность будет расти от 1 на масштабах наблюдения, соизмеримых с размером аттрактора, до 2 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда ясно, что для периодических колебаний аналогичное усложнение невозможно, так как конечное число точек, из которых состоит периодический аттрактор, как бы они ни перестраивались в фазовом пространстве, не может привести к какой-либо фрактальной структуре, а следовательно, не даст усложнения аттрактора и его размерность сохранится.

Из вышесказанного следует, что для выявления трансформации структуры аттрактора фильтром 2-го порядка необходимо иметь на выходе 1-го фильтра колебания, аттрактор которых хорошо идентифицируется как поверхность. Поэтому анализ прохождения колебаний через фильтр 2-го порядка проводился при $\alpha_1 = 0.8$. При $\alpha_2 = 0.1$ фильтр дает в восстановленном трехмерном пространстве картину фрактального расслоения поверхности аттрактора (см. рисунок, *в*), аналогичную фрактальному расслоению линии для фильтра 1-го порядка (см. рисунок, *б*). Относительная величина расслоения растет с ростом α_2 , и при $\alpha_2 = 0.8$ двойное сечение четырехмерного пространства вложения $(z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3})$ вновь дает линию (параболу), свидетельствующую о том, что однократное сечение — "параболический лоток", а полный аттрактор — 3-мерный объем (см. рисунок, *е*). Полученное качественное подобие топологических структур аттракторов исходных нефильтрованных хаотических колебаний и сечений Пуанкаре аттрактора хаотических колебаний, прошедших через фильтры, ярко иллюстрирует повторяемость нарастания сложности хаотических колебаний при их прохождении через фильтры высокого порядка. Добавление каждого последующего рекурсивного фильтра дает качественно подобные картины усложнения: 1-й фильтр 1-го порядка преобразует линию в поверхность через суперфрактализацию; 2-й фильтр фрактально расслаивает поверхность, трансформируя ее в трехмерный объем; n -й фильтр приведет к фрактальному расслоению n -мерного объема и его преобразованию в

$n + 1$ -мерный объем. Самоподобная фрактальная структура усложнения аттрактора при увеличении порядка рекурсивного фильтра свидетельствует о том, что при фильтрации хаотических колебаний основную роль играет природа исходного сигнала. Характерное для хаоса перемешивание траекторий (точек) аттрактора выделяется фильтром как фрактальное расслоение аттрактора, причем это расслоение происходит в направлении дополнительной степени свободы, связанной с фильтром.

Таким образом, можно утверждать, что *предельная* размерность аттракторов хаотических колебаний, прошедших через фильтр, равна

$$S_{out} = D_{in} + i, \quad (4)$$

где i — порядок фильтра. И следовательно, размерность аттракторов хаотических колебаний в линейных фильтрах *может* увеличиваться до бесконечности, что позволяет генерировать детерминированные тестовые хаотические колебания с любой наперед заданной размерностью.

Здесь следует особо оговорить понятие *предельная* размерность, так как аттрактор, рождающийся в результате рекурсивной фильтрации, — неоднородный (или мультифрактальный), т. е. имеющий различные масштабы подобия вдоль различных направлений. Эта неоднородность однозначно связана с коэффициентами фильтра α_i и тем меньше, чем они больше. Кроме того, размерность (емкость, информационная размерность, корреляционная и т. п.) по определению есть показатель D в соотношении подобия вида $N(\varepsilon) = k\varepsilon^D$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому здесь под *предельной* размерностью понимается размерность, которую можно получить при больших α_i (слабая неоднородность) и $\varepsilon \rightarrow 0$ (разрешение тонкой структуры). При конечной длине представления данных и их конечной точности размерность определяется в ограниченном диапазоне изменения ε и для неоднородных аттракторов, восстановленных после рекурсивных фильтров, получается размерность как функция масштаба пространственного наблюдения $D(\varepsilon)$ [9], спадающая при возрастании ε . И при счете по данным обозримой длины *предельная* размерность *может* быть и не получена. Но в любом случае неограниченное возрастание размерности в пределе сильной фильтрации и бесконечного разрешения имеет место и, следовательно, фильтрация хаотических колебаний — один из вероятных путей возникновения в реальных системах детерминированных высокоразмерных колебаний, почти неотличимых от шума.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16753).

Список литературы

- [1] *Badii et al.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 979–982.
- [2] *Mitschke F., Moller M., Lange W.* // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. N 11. P. 4518–4521.
- [3] *Theiler J., Eubank S.* // Chaos. 1993. V. 3. P. 771–782.
- [4] *Sauer T. and Yorke J.* // Int. J. Bifurcations and Chaos. 1993. V. 3. N 3. P. 737–744.
- [5] *Кипчатов А., Красичков Л., Андрушкевич А.* // Нелинейные цепи и системы. М., 1992. Т. 2. С. 308–317.
- [6] *Кипчатов А., Красичков Л.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 4. С. 1–6.
- [7] *Takens F.* // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1981. V. 898. P. 366–381.
- [8] *Grassberger P., Procaccia I.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346–349.
- [9] *Кипчатов А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 15. С. 90–95.