

01

Одномерная цепочка отображений с однонаправленной пороговой связью

© А.А.Короновский

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Государственный учебно-научный центр "Колледж"

Поступило в Редакцию 19 ноября 1996 г.

В работе рассмотрена полубесконечная или замкнутая в кольцо цепочка логистических отображений с принципиально новым типом связи, которую мы называем однонаправленной пороговой связью. Цепочка представляет собой последовательное однонаправленное соединение бистабильных элементов, у которых перевод из одного состояния в другое осуществляется за конечный промежуток времени.

Системы с дискретным временем весьма широко изучены физиками и математиками [1–2]. Внимание к системам с дискретным временем определяется, во-первых, их относительной простотой и возможностью их довольно быстрого исследования в широком диапазоне изменения значений управляющих параметров, во-вторых, именно на языке систем с дискретным временем возможно наиболее понятное и "прозрачное" объяснение природы хаотической динамики, сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [3–4]. Кроме того, на основе отображений, в том числе и на основе логистического отображения, строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, модулирующих распределенные системы и играющих важную роль в понимании динамики подобных систем [5–8].

В рамках настоящей работы мы будем рассматривать цепочку (полубесконечную или замкнутую в кольцо) логистических отображений с принципиально новым типом связи, которую мы называем однонаправленной пороговой связью. Динамика подобной цепочки описывается отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij} [a - x_{ij} \pm s \cdot \text{th}(k(x_{i-1j} - x_s))],$$

где i — пространственная координата элемента цепочки, а j — момент дискретного времени. В случае, если цепочка состоит из N элементов и

замкнута в кольцо, то имеет место соотношение

$$x_{1j+1} = x_{1j} [a - x_{1j} \pm s \cdot \text{th}(k(x_{Nj} - x_s))].$$

Поскольку связь является принципиально новой, следует ожидать, что поведение рассматриваемой цепочки будет отличаться от поведения цепочек логистических отображений с "традиционными" типами связей (например, с диссипативной связью), которые широко исследуются в настоящее время в литературе (см., например, [9]). Выбор параметров a и s осуществляется таким образом, чтобы в отсутствие связи поведение каждого элемента цепочки не демонстрировало никакой сложной динамики. При наличии связи поведению каждого элемента цепочки соответствует притягивающая точка $x_{ij+1}^* = a - 1 \pm s \cdot \text{th}(k(x_{i-1j} - x_s))$ (при $k \rightarrow \infty$ $x_i^* = a - 1 \pm s$), если значение в соседнем $(i-1)$ элементе меньше некоторого порога x_s . При превышении значением x_{i-1j} этого порога поведению i -го элемента соответствует притягивающая точка $x_{ij+1}^* = a - 1 \mp s \cdot \text{th}(k(x_{i-1j} - x_s))$ (при $k \rightarrow \infty$ $x_i^* = a - 1 \mp s$). Далее мы будем рассматривать цепочку, описываемую отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij} [a - x_{ij} + s \cdot \text{th}(k(x_{i-1j} - x_s))].$$

Вполне понятно, что если данную полубесконечную цепочку предоставить самой себе, то после переходного процесса в ней установится одно из двух состояний равновесия, в зависимости от значения первого элемента: $x_{ij}^0 > x_s$, если $x_{1j} > x_s$, и $x_{ij}^0 < x_s$, если $x_{1j} < x_s$. Фактически подобная цепочка представляет собой последовательное однонаправленное соединение бистабильных элементов, у которых переход из одного состояния в другое осуществляется за конечный промежуток времени (в данном случае имеется в виду дискретное время). Понятно также, что если на вход подобной цепочки подать какое-либо внешнее воздействие (так как цепочка состоит из бистабильных элементов, то имеет смысл рассматривать в дальнейшем прямоугольный импульс определенной длительности), то от входа цепочки начнет распространяться возмущение, обусловленное этим внешним воздействием. Как будет эволюционировать внесенное в полубесконечную однонаправленную цепочку внешнее возмущение при $t \rightarrow \infty$? Изначально мы можем предположить три сценария развития событий: во-первых, внешнее воздействие в виде прямоугольного импульса может начать распространяться почти без искажений с постоянной скоростью в направлении, обусловленном

связью (однонаправленной) предыдущего элемента с последующим. Подобная ситуация возможна, если передний и задний фронты импульса распространяются с одинаковой скоростью, что, в свою очередь, определяется временем, необходимым для перехода любого элемента цепочки из одного состояния в другое и, в конечном счете, параметрами среды. В случае, если наша система замкнута в кольцо, то внесенный импульс будет циркулировать по цепочке неограниченно долго при условии, что длина цепочки больше, чем длительность внесенного возмущения, умноженного на скорость распространения импульса; в противном случае все элементы цепочки окажутся в "возмущенном" состоянии.

Во-вторых, может случиться так, что передний фронт импульса распространяется с большей скоростью, чем задний (иными словами, время перехода элемента цепочки из "невозмущенного" ($x_{ij}^0 < x_s$) состояния в "возмущенное" ($x_{ij}^0 > x_s$) меньше, чем наоборот); тогда передний фронт импульса "убегает" от заднего и по цепочке распространяется прямоугольный расширяющийся импульс. Понятно, что в цепочке элементов, замкнутой в кольцо, по истечении некоторого интервала времени передний фронт импульса догоняет свой задний фронт и все элементы оказываются в "возбужденном" состоянии.

Наконец, передний фронт импульса может распространяться медленнее, чем задний, и тогда длительность распространяющегося импульса будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока задний фронт импульса не достигнет переднего фронта, что приведет к схлопыванию импульса. Очевидно, что тоже самое происходит и в цепочке, замкнутой в кольцо.

Как следует из проведенного нами исследования, в цепочке (которая, фактически, может рассматриваться как дискретная модель некоторой среды) в зависимости от параметров возможны все три сценария развития событий: при $x_s = 0.095$ происходит распространение по цепочке импульса постоянной длительности с постоянной скоростью, при $x_s = 0.08$ распространяется уширяющийся импульс, а при $x_s = 0.22$ — сжимающийся импульс, который по истечении определенного интервала дискретного времени схлопывается. (Значения параметров $a = 1.5$, $s = 0.45$).

Однако существует еще один возможный сценарий распространения внесенного в цепочку возмущения, который реализуется при значениях параметров: $a = 1.5$, $s = 0.45$, $k \rightarrow \infty$, $0.096 < x_s < 0.215$. Задний фронт прямоугольного импульса распространяется быстрее, чем

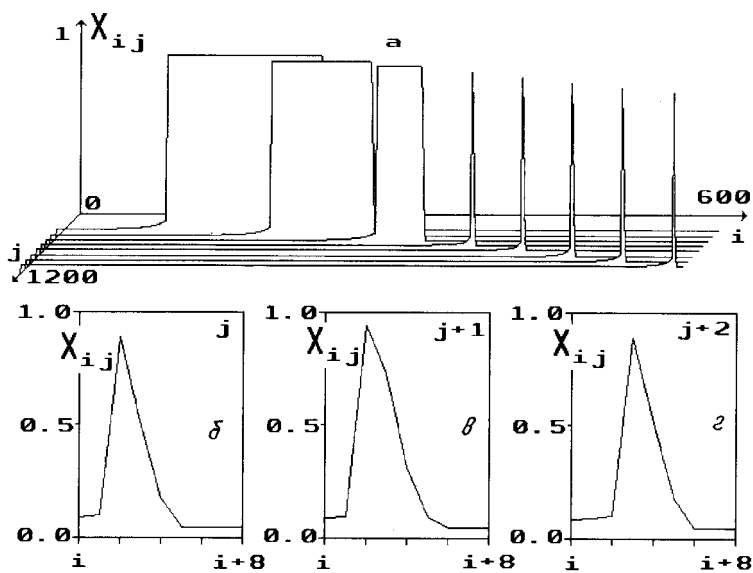


Рис. 1. Внесенное внешнее возмущение, которое трансформируется в уединенный импульс, распространяющийся затем по цепочке (*a*). Профиль уединенного импульса в три последовательных момента дискретного времени (*б-г*).

передний, однако, когда задний фронт "настигает" передний, окончательного "схлопывания" импульса не происходит и далее по цепочке распространяется уединенный импульс (рис. 1, *a*). Этот импульс является устойчивым в том смысле, что любое начальное возмущение с амплитудой, большей, чем x_s , и длительностью, большей, чем длительность уединенного импульса, которая определяется параметрами среды, внесенное в цепочку, через определенный интервал времени превращается в этот уединенный импульс. Заметим, что уединенный импульс нельзя назвать "стационарным" (по аналогии со стационарными волнами в непрерывных средах, см., например, [10]), так как его профили в различные моменты дискретного времени различны. На рис. 1, *б-г* показаны профили уединенного импульса, распространяющегося по цепочке в три последовательных момента дискретного времени j , $(j+1)$ и $(j+2)$ для значения $x_s = 0.1$. Из этих рисунков видно, что в данном случае уединенный импульс является устойчивой пространствен-

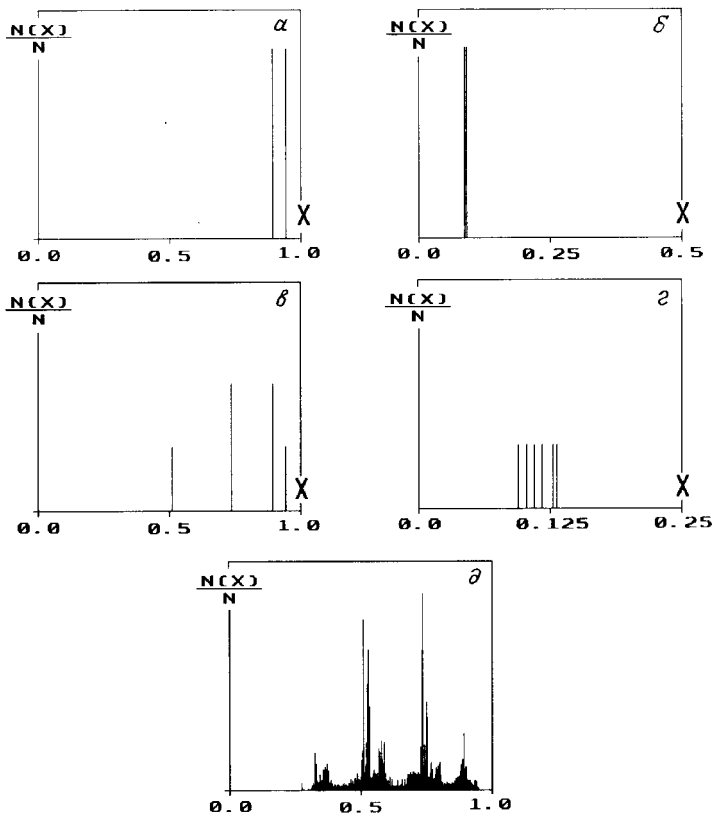


Рис. 2. Гистограммы уединенного импульса для различных значений параметров (a-θ).

ной структурой, периодически изменяющейся в дискретном времени с периодом 2. Похожая ситуация имеет место в клеточных автоматах (см., например, об игре "жизнь" [11]). Заметим, однако, что профиль уединенного импульса может изменяться как сложнопериодическим, так и хаотическим образом. На рис. 2 приведены гистограммы для характерных точек профиля импульса для различных значений параметров: рис. 2, a показывает гистограмму для "вершины" уединенного импульса при значениях параметров $a = 1.5$, $s = 0.45$, $k \rightarrow \infty$, $x_s = 0.1$, а

рис. 2, б — гистограмму для точки уединенного импульса, отстоящей от вершины импульса на две пространственные единицы (при тех же самых значениях параметров). На рис. 2, в, г показаны гистограммы для этих же двух точек при значениях параметров $a = 1.5$, $s = 0.45$, $k \rightarrow \infty$, $x_s = 0.15$, а на рис. 2, е приведена гистограмма для "вершины" уединенного импульса при $a = 1.5$, $s = 0.45$, $k = 100$, $x_s = 0.19$. Как видно из этого рисунка, в данном случае профиль уединенной волны является устойчивой структурой с хаотической динамикой, распространяющейся по рассматриваемой цепочке.

В заключение автор выражает признательность Д.И. Трубецкову за постоянное внимание и поддержку, а также В.И. Пономаренко за ряд ценных советов, использованных автором при написании настоящей работы.

Список литературы

- [1] *Kaneko K.* // Theory and applications of coupled map lattices. John Wiley and Sons. Ltd. Baffins Lane. Chichester. West Sussex. PO19 1UD. England. 1993. 191 P.
- [2] *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
- [3] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. ПНД. Т. 1. № 1, 2. С. 15–33.
- [4] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1. № 3, 4. С. 17–35.
- [5] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 10, 11, 12.
- [6] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 4. С. 357–364.
- [7] *Кузнецов С.П.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. В. 2. С. 94.
- [8] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 2. С. 142–146.
- [9] *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар: Межвуз. сб. науч. тр. Кн. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 1996. С. 51–77.
- [10] *Скотт Э.* Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
- [11] *Гарднер М.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.