

07

## К вопросу о дифракции света на псевдоглубокой голографической решетке

© С.Я. Горелик

Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики  
(технический университет)

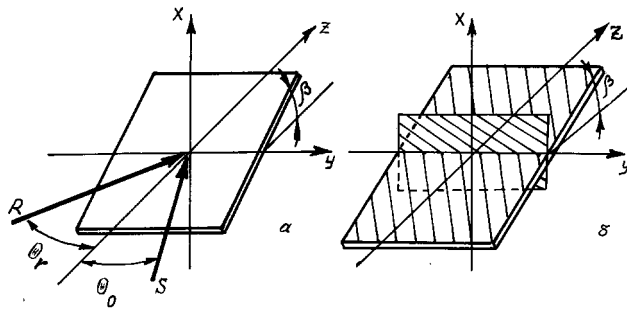
Поступило в Редакцию 22 мая 1996 г.

В работе приведены результаты теории и эксперимента по записи псевдоглубоких голограмм. В области теории предложена математическая модель процесса дифракции света на структуре псевдоглубокой голограммы. Теория подтверждена экспериментально в журнале "Письма в ЖТФ".

Ранее был предложен метод записи и восстановления изображений с помощью псевдоглубоких голограмм [1,2] и предложен графический метод построения восстановленного такой голограммой изображения [3]. В настоящей работе предлагается математическая модель дифракции излучения на псевдоглубокой голографической решетке.

Пусть имеет место интерференция двух плоских волн — объектной  $S$  и референтной  $R$ , комплексные амплитуды которых описываются функциями  $S = \exp[-jk(y \sin \Theta_0 + z \cos \Theta_0)]$  и  $R = \exp[-jk(y \sin \Theta_r + z \cos \Theta_r)]$ , где  $\sin \Theta_0$ ;  $\cos \Theta_0$ ;  $\sin \Theta_r$ ;  $\cos \Theta_r$  — направляющие косинусы объектной и референтной волн соответственно;  $k = 2\pi n/\lambda$  — модуль их волновых векторов;  $\lambda$  — длина волны в вакууме;  $n$  — показатель преломления среды распространения. В плоскости фотопластинки  $z = x \operatorname{ctg} \beta$ , наклоненной под углом  $\beta$  к горизонтальной плоскости  $YOZ$  (рис. 1, а), комплексные амплитуды этих волн будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} S &= \exp[-jk(y \sin \Theta_0 + x \operatorname{ctg} \beta \cos \Theta_0)], \\ R &= \exp[-jk(y \sin \Theta_r + x \operatorname{ctg} \beta \cos \Theta_r)], \end{aligned} \quad (1)$$



**Рис. 1.** Схема записи пропускающей псевдоглубокой голограммы (а) и результат проекции следов пересечения плоскостей равной интенсивности волны с плоскостью фотопластинки на плоскость  $z = 0$  (б).

а распределение интенсивности стоячей волны, представляющей собой результат интерференции волн (1), определится как

$$I = 2 + \exp\left\{-jk[y(\sin \Theta_0 - \sin \Theta_r) + x \operatorname{ctg} \beta (\cos \Theta_0 - \cos \Theta_r)]\right\} + \exp\left\{jk[y(\sin \Theta_0 - \sin \Theta_r) + x \operatorname{ctg} \beta (\cos \Theta_0 - \cos \Theta_r)]\right\}. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) в показателях экспонент множители при  $x$  и  $y$  определяют пространственные частоты вдоль осей  $x$  и  $y$  решеток, являющихся проекциями следов пересечения плоскостей равной интенсивности объектной, референтной и стоячей волн с плоскостью фотопластинки на плоскость  $z = 0$  (рис. 1, б). Отметим, что далее речь везде будет идти именно об этих пространственных частотах.

Рассмотрим процесс восстановления полученной решеткой объектной волны. Пусть на стадии восстановления решетка освещается волной, волновой вектор которой лежит в плоскости  $YOZ$ , а направление распространения отличается от имевшего место при записи на величину  $\Delta\Theta_r$ . Непосредственной подстановкой легко убедиться, что при этом пространственные частоты восстанавливающей волны как вдоль оси  $y$ , так и вдоль оси  $x$  будут отличными от пространственных частот волны, являвшейся референтной при записи. В силу этого изменятся углы дифракции как в горизонтальной, так и в

вертикальной плоскости. Аналогичная картина будет наблюдаться и при изменении длины волны восстанавливающего излучения.

Нетрудно показать, что если на этапе восстановления пространственная частота вдоль оси  $y$  изменится на величину

$$\Delta\varphi = \sin\Theta_r(\mu \cos\Delta\Theta_r - 1) + \mu \sin\Delta\Theta_r \cos\Theta_r, \quad (3)$$

где  $\mu = \lambda/(\lambda + \Delta\lambda)$ , то величина изменения угла дифракции  $\Delta\Theta_0$  в горизонтальной плоскости может быть определена из выражения

$$\sin(\Theta_0 + \Delta\Theta_0) = \sin\Theta_0 + \Delta\varphi. \quad (4)$$

Это изменение вызовет изменение пространственной частоты восстановленной волны вдоль оси  $x$  на величину

$$\Delta\Psi_0 = \text{ctg}\beta \left[ \cos\Theta_0(\mu \cos\Delta\Theta_0 - 1) - \mu \sin\Delta\Theta_0 \sin\Theta_0 \right]. \quad (5)$$

С другой стороны, изменение направления распространения восстанавливающей волны также вызовет изменение ее пространственной частоты вдоль оси  $x$  на величину  $\Delta\Psi_r$ , которая определяется из выражения (5) при замене символа "0" на символ "r". В то же время, согласно основному уравнению дифракции, разность пространственных частот восстанавливающей и восстанавливаемой волн должна оставаться постоянной. Нетрудно показать, что для выполнения этого условия должен измениться угол дифракции в вертикальной плоскости на величину

$$\Delta\beta \approx \Delta\Psi_0 - \Delta\Psi_r \approx (\Theta_r - \Theta_0)\Delta\Theta_r \text{ctg}\beta, \quad (6)$$

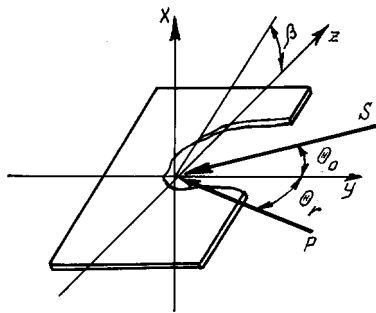
а комплексная амплитуда восстановленной волны в общем случае может быть описана выражением

$$S_{out} = \exp\left\{-jk[y \sin(\Theta_0 + \Delta\Theta_0) + x \text{ctg}(\beta + \Delta\beta) \cos(\Theta_0 + \Delta\Theta_0)]\right\}. \quad (7)$$

Условия исчезновения восстановленной волны определяются из следующих соображений.

1.  $\Delta\beta = \beta$ . При этом восстановленная волна распространяется в плоскости фотопластинки.

2.  $\Delta\beta = -\beta$ . При выполнении этого условия функция  $\text{ctg}(\beta + \Delta\beta)$  терпит разрыв, вследствие чего направление распространения восстановленной волны становится неопределенным.



**Рис. 2.** Схема записи отражательной псевдоглубокой голограммы в симметричной двухлучевой схеме.

Очевидно, что если при восстановлении одновременно будет изменено и направление распространения, и длина падающей волны таким образом, что выполнится условие  $\Delta\varphi = 0$ , то восстановленная волна будет распространяться в горизонтальной плоскости. Вследствие этого при восстановлении протяженным некогерентным источником на восстановленное изображение наложатся неустраняемые фильтрующей выходной щелью [2] помехи.

Нетрудно показать, что результат интерференции волн  $S$  и  $R$ , регистрируемый в плоскости  $z = x \operatorname{ctg} \beta$ , будет совпадать (в смысле проекции на плоскость  $z = 0$ ) с результатом интерференции некоторых волн  $S_1$  и  $R_1$ , регистрируемым в плоскости  $z = -x \operatorname{ctg} \beta$ . При этом волны  $S_1$  и  $R_1$  должны быть определены следующим образом: волна  $S_1$  строит действительное изображение объекта и распространяется в направлении, определяемом углом  $\Theta_r$ , а волна  $R_1$  — референтная волна, направление распространения которой определяется углом  $\Theta_0$ . Из вышеизложенного ясно, что в силу различия пространственных частот волн  $R$  и  $R_1$  при освещении псевдоглубокой решетки волной  $R$  восстановленная волна  $S_1$  будет распространяться вне горизонтальной плоскости.

Из выражений (1) и (2) нетрудно видеть, что на тонкой псевдоглубокой голограмме может быть записана и отражательная решетка, а все сделанные выводы должны остаться справедливыми и для нее. Это подтверждается проведенными экспериментами, в которых

отражательная решетка записывалась на фотопластинках ФП-Р в симметричной двухлучевой схеме (рис. 2). Пространственная частота решетки определялась разрешающей способностью фотопластинок и составляла в воздухе около  $1500 \text{ мм}^{-1}$ . Источником излучения служил He-Cd лазер с длиной волны  $\lambda = 0.4416 \text{ мкм}$ , а угол наклона  $\beta$  фотопластинки составлял около  $20^\circ$  с горизонтальной плоскостью.

Таким образом, объектная и референтная волны, а также являющаяся результатом их интерференции стоячая волна могут быть представлены в виде эквивалентных волн, пространственные частоты которых определяются проекциями следов пересечения их плоскостей равной интенсивности с плоскостью фотопластинки на плоскость  $z = 0$  эквивалентной вертикальной решетки. Особенности же дифракции волн на псевдоглубокой решетке связаны с изменением этих пространственных частот при изменении условий восстановления.

В заключение хотелось бы выразить признательность Ю.Н. Денисюку за полезные обсуждения, а также за любезно предоставленную возможность проведения экспериментов.

### Список литературы

- [1] Денисюк Ю.Н. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 8. С. 84–89.
- [2] Денисюк Ю.Н. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 2. С. 15–20.
- [3] Денисюк Ю.Н., Ганжсерли Н.М. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 11. С. 154–161.