01;12

Перемешивание гранулированных материалов в наполовину заполненном вращающемся барабане

© *С.Н. Дороговцев*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 4 октября 1996 г.

В работе предоставлено точное описание процесса так называемого лавинного перемешивания двух фракций гранулированного материала в наполовину заполненном вращающемся барабане и показано, что полного перемешивания фракций в этой ситуации вообще не происходит.

Пересыпание гранулированных материалов во вращающемся барабане (продольная ось цилиндра горизонтальна, и барабан заполнен не полностью, так что сверху остается свободное пространство) — ситуация, которая в последнее время исследуется особенно интенсивно (см., например, работы [1–4]). Причина этого интереса — очевидная связь с задачами о рассыпании кучи песка [5] и проблемой самоорганизованной критичности [6–8].

В экспериментальной работе [4] была предложена конфигурация, которая позволяет аналитически исследовать (см. [9]) в принципе очень сложную проблему перемешивания фракций гранулированного материала во вращающемыся барабане. Именно предложенную в работе [4] систему мы и будем рассматривать ниже.

Барабан у нас — плоский, так что это, скорее, диск. Поэтому не нужно учитывать перемещений гранул вдоль оси вращения барабана. Поле тяжести направлено перпендикулярно оси вращения. Барабан вращается адиабатически медленно, и в каждый момент времени свободная поверхность находится под углом трения к горизонтали (рис. 1). (Как следует из работы [4], свободную поверхность при этом можно считать плоской).

Напомним теперь, что такое лавинное перемешивание гранулированных материалов. Пусть гранулы (их размеры много меньше радиуса барабана) могут пересыпаться лишь выходя на свободную

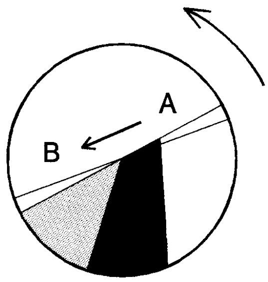

Рис. 1. Схема лавинного перемешивания при половинном заполнении барабана. При бесконечно малом повороте барабана гранулы разных фракций из сектора A, перемешиваясь, пересыпаются в сектор B. Если же гранулы находятся внутри объема материала, они поворачиваются вместе с барабаном, не смещаясь относительно друг друга. Серым цветом выделены области с перемешанным материалом (здесь и на рис. 2 степень перемешивания не показана).

поверхность материала по мере того, как поворачивается барабан. Гранулы же, не находящиеся на свободной поверхности, просто поворачиваются вместе с барабаном, не смещаясь друг относительно друга (рис. 1). Таким образом, материал перемешивается только в лавинах, которые при вращении барабана непрерывно сходят по свободной поверхности. Такое перемешивание и было названо лавинным (avalanche mixing) [4], хотя на наш взгляд, его было бы корректнее называть перемешиванием в лавинах.

Считается, что гранулы разных фракций различаются между собой только цветом. Поскольку гранулы малы, можно ввести понятие концентрации той или иной фракции в данной точке барабана. Таким образом, состояние каждой отдельной точки $\mathbf{x}$ материала в определенный момент t описывается величиной $\rho(\mathbf{x}, t)$ — концентрацией черной фракции. Для чистой черной фракции $\rho = 1$, для чистой белой — $\rho = 0$. Пусть в начальный момент времени снизу белая фракция, сверху — черная. Нам будет удобно ввести обозначение, представленное на рис. 2, *a*: объем черной фракции будем характеризовать углом раствора $\chi \leq \pi/2$. В таком случае относительная доля черной фракции в материале равна $[2\chi + \sin(2\chi)]/\pi$.

В ответы не войдет ни угол трения гранулированного материала, ни радиус барабана. Поэтому удобно на схемах распределения фрак-

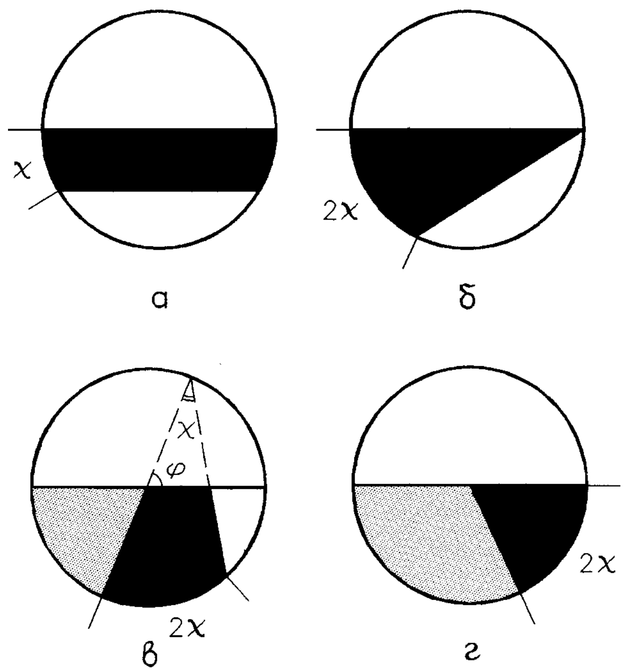

Рис. 2. Расположение фракций в барабане в разные моменты времени. Для удобства угол трения положен равным нулю, и свободная поверхность материала горизонтальна. *а* — расположение фракций в начальный момент — $t = 0$. Угол характеризует относительный объем черной фракции в барабане; *б* — $t = \chi$; *в* — $\chi < t < \pi - \chi$. $\varphi = t - \chi$; *г* — момент исчезновения чистой белой фракции — $t = \pi - \chi$.

ций изображать свободную поверхность горизонтальной (рис. 2), а радиус барабана положить равным единице. Ответы не зависят и от скорости вращения барабана, так что под "временем" t будем понимать полный угол поворота барабана. Для определенности будем считать, что барабан вращается против часовой стрелки.

Покажем, что перемешивание материала только на свободной поверхности приводит в случае половинного заполнения к отсутствию полного перемешивания в рассматриваемой системе. Пусть *во всех точках* какого-то радиус-вектора барабана находится чистая фракция. В момент, когда этот радиус-вектор выйдет на поверхность, материал пересыпается на левую половину поверхности и во всех ее точках снова окажется та же чистая фракция! (Так как барабан вращается адиабатически медленно, можно считать, что гранулы по свободной пересыпаются мгновенно.) После этого весь соответствующий радиус-вектор с чистой фракцией поворачивается вместе с барабаном до тех пор, пока снова не выйдем на правую половину свободной поверхности. Далее все повторяется с периодом π, равным половине периода оборота барабана.

Таким образом, стоит однажды на каком-то радиус-векторе барабана оказаться чистой фракции, и эта чистая фракция уже никогда не исчезнет. Из рис. 2, на котором приведен ряд картин расположения фракций в последовательные моменты времени, легко видеть, что чистая белая фракция исчезает в момент $t = \pi - \chi$. Таким образом, все то, о чем мы говорили выше, должно относиться к черной фракции.

Положение радиус-вектора можно задать углом отклонения его от правой половины свободной поверхности — угол ψ. Из рис. 2 следует, что на левой половине свободной поверхности будет

$$\rho(\psi = 0,\, 0 \le t \le \chi) = \rho(\psi = 0,\, \pi - \chi \le t \le \pi) = 1. \qquad (1)$$

Эта картина повторяется с периодом π: $\rho(0,\, t + \pi) = \rho(0,\, t)$. Из-за отсутствия перемешивания в объеме материала, по известному распределению концентрации черной фракции на левой половине свободной поверхности легко найти все распределение фракций в барабане. В частности, если вдоль радиусов концентрация $\rho = \text{const}$ (тогда имеет смысл ввести $\rho(\psi,\, t)$), то при $0 \le \psi \le \pi$ и $t \ge \psi$ имеем

$$\rho(\psi,\, t) = \rho(0,\, t - \psi). \qquad (2)$$

Нам придется теперь сделать весьма сильное предположение. Будем считать, что материал в лавинах перемешивается полностью (рис. 1: если выполняется сделанное предположение, после пересыпания во всех точках сектора B концентрация ρ одинакова). Такое предположение представляется естественным выбрать в качестве начального приближения, если не вникать в тонкости, связанные со структурой гранул (их слипанием, зацеплением и т. п.). В самом деле, компьютерное моделирование [4], основанное на этом предположении, удивительно хорошо описало реальный эксперимент.

Тогда нетрудно видеть, что уже после момента времени $t = \pi - \chi$ во всех точках каждого отдельного радиус-вектора концентрация ρ одинакова. Таким образом, после этого момента времени распределение $\rho(\psi, t)$ исчерпывающим образом описывает состояние системы.

Теперь мы можем найти $\rho(0, t)$ на промежутке $\chi \leq t \leq \pi - \chi$. Глядя на рис. 2, *б*, нетрудно понять, что в этой области

$$\frac{1}{2}\rho(0, t) = \frac{\partial S(t-\chi)}{\partial t}. \qquad (3)$$

Здесь $S(\varphi)$ — площадь треугольника, показанного пунктиром на рис. 2, *в* ($\varphi = t - \chi$), а коэффициент 1/2 в левой части соотношения появился, так как при повороте на малый угол δt радиус-вектор заметает площадь $\delta t/2$. По стандартным формулам для площадей

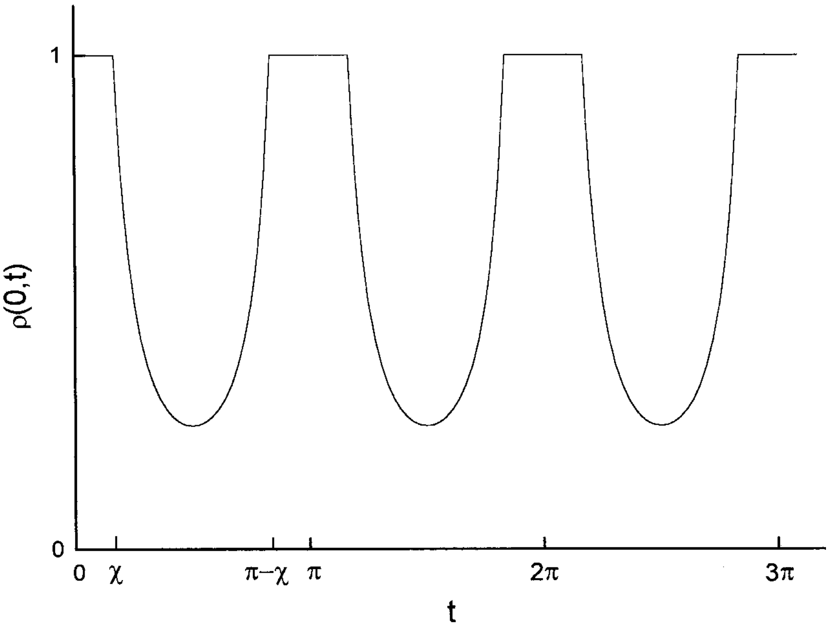

Рис. 3. Зависими концентрации черной фракции материала на левой половине свободной поверхности.

треугольников $S(\varphi) = \frac{1}{2}\sin\varphi\sin\chi/\sin(\varphi+\chi)$. В результате

$$\rho(0,\,t) = \sin^2\chi/\sin^2 t. \tag{4}$$

Соотношения (1) и (4) вместе с условием периодичности определяют полный вид зависимости $\rho(0,\,t)$ (рис. 3).

Наши выводы относятся только к ситуации в точности половинного заполнения. В остальных случаях весь материал (кроме находящегося в центральной части барабана, если тот заполнен более чем наполовину) в конце концов окажется равномерно перемешан [9].

В заключение подчеркнем, что наш вывод об отсутствии полного перемешивания фракций гранулированного материала при половинном заполнении вращающегося барабана не зависел от сделанного предположения о полном перемешивании гранул в лавинах! И без этого весьма сильного предположения на зависимости $\rho(0,\,t)$ (рис. 3) периодически повторяются участки чистой черной фракции $\rho = 1$. Предположить, что материал полностью перемешивается, ссыпаясь по свободной поверхности, нам потребовалось только для того, чтобы иметь возможность ввести $\rho(0,\,t)$ между этими участками и найти ее конкретный вид.

Автор благодарен Е.Н. Антонову, С.А. Ктиторову, Е.К. Кудинову, А.М. Монахову, А.Н. Самухину и Ю.А. Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Jaeger H.M., Liu C.H., Nagel S.R.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 40.
[2] *Rajchenbach J.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2221.
[3] *Bretz M., Cunningham J.B., Kurczynski P.L., Nori F.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2431.
[4] *Metcalfe G., Shinbrot T., McCarthy J.J., Ottino J.M.* // Nature. 1995. V. 374. P. 39.
[5] *Rosendahl J., Vekic M., Rutledge J.E.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 537.
[6] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 59. P. 381.
[7] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 364.
[8] *Tang C., Bak P.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2347.
[9] *Дороговцев С.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 246.