Краткие сообщения

01

Лавинное перемешивание гранулированных материалов: время исчезновения чистой фракции

© С.Н. Дороговцев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 14 октября 1996 г.)

Рассмотрен процесс перемешивания друх фракций гранулированного материала в медленно вращающемся барабане: частично заполненный цилиндр медленно вращается вокруг продольной, расположенной горизонтально оси и гранулы могут пересыпаться лишь на свободной поверхности материала. Найдено время, через которое в областях, прилегающих к поверхности барабана, не остается одной из чистых фракций, построена его скачкообразная зависимость от степени заполнения барабана и соотношения между объемами перемешиваемых фракций.

В нашей работе [1] было предложено аналитическое описание кинетики перемешивания двух фракций гранулированного материала в медленно вращающемся барабане. В настоящей работе мы ответим на вопрос, относящийся к начальной стадии так называемого лавинного перемешивания: через какое время в областях, прилегающих к поверхности барабана, не останется чистых фракций, иными словами, когда одна из фракций окажется "загрязнена" другой и какова зависимость этого времени от степени заполнения барабана и соотношения между объемами перемешиваемых фракций.

Напомним, что такое лавинное перемешивание. В связи с общим интересом к проблеме самоорганизованной критичности стал интенсивно изучаться процесс пересыпания гранулированных материалов во вращающемся барабане [2–4]. Гранулированный материал помещается в барабан, продольная ось которого горизонтальна (рис. 1, *а*). Барабан заполнен не полностью, и сверху остается пустое пространство. Каким образом развивается во времени процесс перемешивания двух фракций гранулированного материала, помещенного в такой вращающийся барабан? Недавно была экспериментально исследована простая система, которую, как оказалось, можно описать в рамках аналитической теории. Именно эта конфигурация и рассматривается в настоящем сообщении. Барабан в этих экспериментах плоский, т. е. это фактически диск, так что не требуется учитывать продольных перемещений гранул. Вращается этот диск адиабатически медленно, свободная поверхность гранулированного материала плоская и все время находится под углом трения. Пока гранулы внутри объема материала, они не могут ни перемещаться друг относительно друга, ни проскальзывать относительно стенок барабана. Пересыпаться они могут, только когда выходят на свободную поверхность материала. Перемешивание, таким образом, происходит в непрерывно сходящих по свободной поверхности лавинах. Поэтому оно и было названо лавинным (avalanche mixing) [5], хотя точнее его было бы называть перемешиванием в лавинах. Считается, что гранулы разных фракций различаются между собой только цветом. Гранулы малы, и можно ввести понятие концентрации той или иной фракции в данной точке барабана. Пусть в начальный момент времени снизу белая фракция, сверху — черная.

Положим, что барабан вращается против часовой стрелки. Тогда при бесконечно малом повороте барабана перемешивание происходит, когда гранулы разных сортов пересыпаются из сектора A в сектор B (рис. 1, *а*). Потребуется сделать следующее предположение. Будем считать, что если в секторе A есть гранулы обоих сортов, то в каждом месте сектора B фракции будут присутствовать только в смешанном состоянии. При этом степень перемешивания фракций в разных точках сектора B может быть различной, но в чистом виде фракций нигде в секторе B уже не будет.

Ясно, что материал внутри окружности, показанной штриховой линией на рис. 1, *б*, вращается вместе с барабаном, не перемешиваясь. Как будут перемешиваться гранулы вне этой окружности? Вследствие сделанного выше предположения после первого же оборота барабана для каждой из касательных типа обозначенной CD на рис. 1, *б* справедливо следующее утверждение: или все точки этой касательной находятся в смешанном состоянии, или во всех ее точках чистый материал. Чтобы ответить на поставленный в работе вопрос, нам нужно знать, находится материал в данной точке в чистом состоянии или в смешанном. Степень перемешивания материала в данном месте для нас сейчас несущественна, и не важно, как меняется степень перемешивания вдоль введенных касательных. Важно лишь, на какой из касательных находится данная точка. Поэтому для наших целей каждую точку материала достаточно сопоставить только с углом между соответствующим радиус-вектором типа $0C$ и нормалью к свободной поверхности $0E$ (рис. 1, *б*) — угол $C0E$.

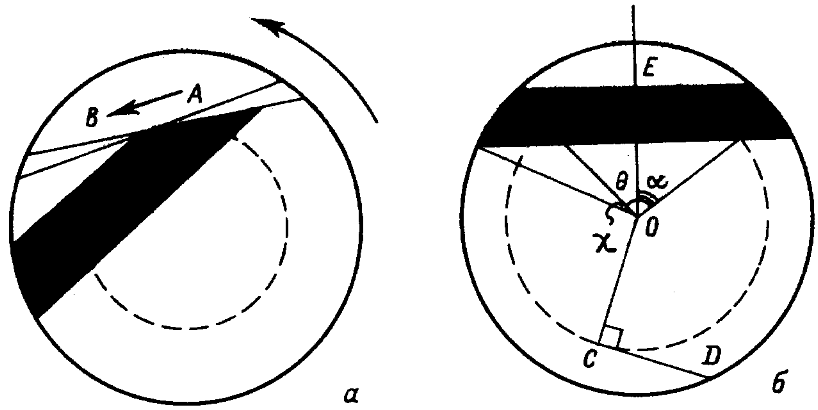

Рис. 1. Схема лавинного перемешивания (a): при бесконечно малом повороте барабана гранулы разных фракций из сектора A, перемешиваясь, пересыпаются в сектор B и расположение фракций до начала вращения цилиндра ($б$).

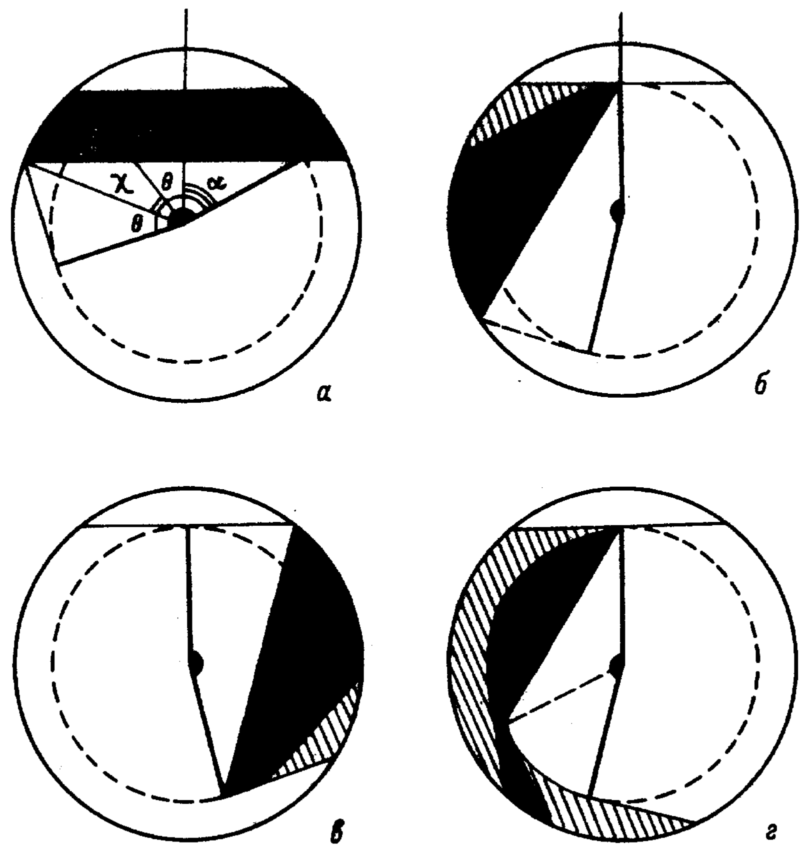

Рис. 2. Вид барабана в некоторые моменты времени при условии $\theta > (\pi - \chi)/2$. a–$г$ — моменты 0, α, $\alpha + 2\pi - (2\theta + \chi + \alpha)$, $\alpha + 2\pi$ соответственно. Угол между выделенными радиус-векторами во все приведенные моменты равен $2\theta + \chi + \alpha$. Штриховкой выделены области с перемешанным материалом (степень перемешивания не показана).

Далее будет удобно ввести обозначения, представленные на рис. 1, $б$. Долю незаполненного пространства в барабане и объем черной фракции будем характеризовать углами раствора θ и χ соответственно. Нам придется еще использовать угол α, также введенный на рис. 1, $б$. Нетрудно убедиться, что он равен

$$\alpha = \arccos\left[\cos(\theta + \chi)/\cos\theta\right]. \tag{1}$$

Так как ответы не будут зависеть от значения угла трения, то далее будем считать, что свободная поверхность горизонтальна. Роль времени будет играть угол поворота барабана. Ниже мы найдем время T исчезновения чистой белой фракции. Действуя аналогичным образом, можно получить и время исчезновения черной фракции.

Обсудим сначала простейшую ситуацию: пусть доля черного материала мала, т.е. $\chi \to 0$. Очевидно, что

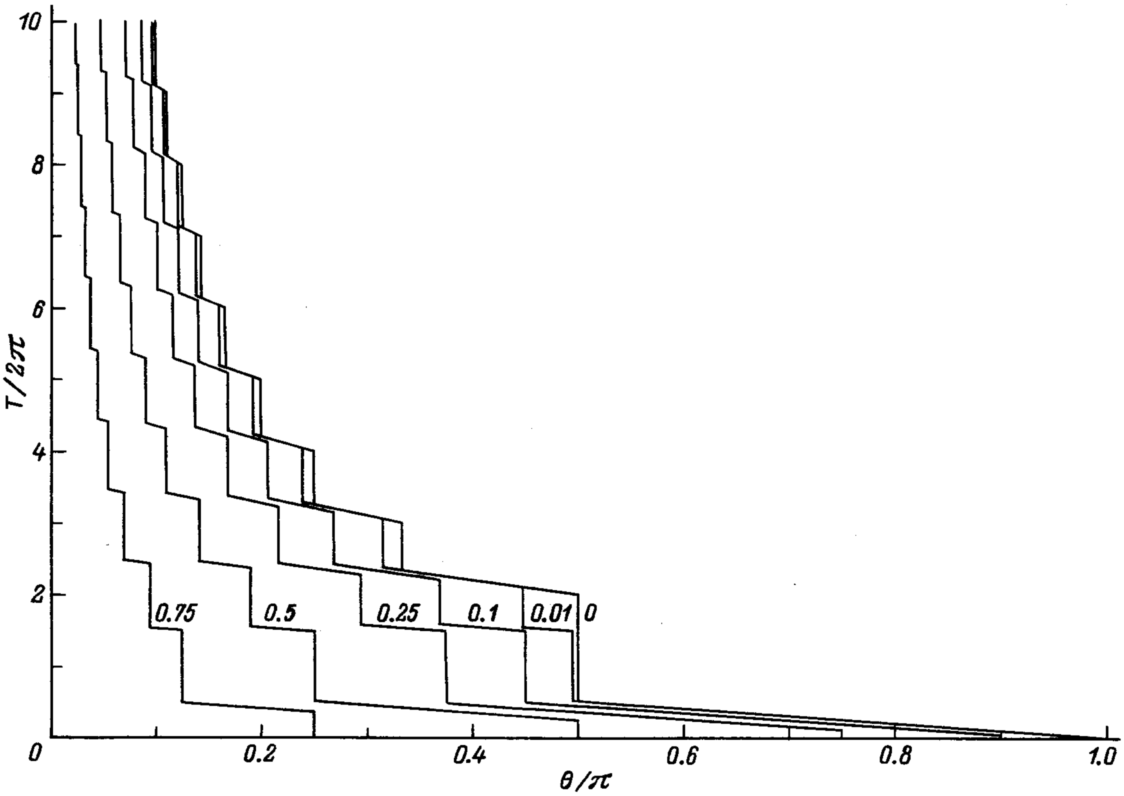

Рис. 3. Время, через которое нигде в барабане (кроме центральной области при более чем половинном заполнении) не останется чистой белой фракции, как функция степени заполнения барабана. Цифры у кривых — значения параметра χ/π, характеризующего объем черной фракции.

при $\pi/2 < \theta < \pi$ барабан заполнен менее, чем наполовину $T = 2(\pi - \theta)$. Пусть теперь $\theta < \pi/2$. В этом случае перемешанный материал будет располагаться между двумя касательными типа введенных выше и в качестве меры количества перемешанного материала или белой фракции во внешнем кольце имеет смысл ввести угол между соответствующими радиус-векторами. Легко видеть, что после каждого нового оборота барабана полный "угол" чисто белой фракции во внешнем кольце уменьшается на 2θ (происходит это уменьшение в моменты, когда касательная, играющая роль фронта "загрязнения", пересекает свободную поверхность материала). Поэтому T будет равно сумме $2\pi[2\pi/(2\theta)]$ и $2\pi - 2\theta[2\pi/(2\theta)]$ (здесь $[\cdot]$ — обозначение целой части). Первое слагаемое соответствует максимальному числу полных оборотов барабана, при котором в областях, прилегающих к поверхности барабана, еще сохраняется белая фракция. Второе же слагаемое — это угол (меньший 2θ), на который нужно еще довернуть барабан, чтобы во внешнем кольце исчезли последние остатки белой фракции. В итоге

$$\frac{T}{2\pi} = 1 + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\left[\frac{\pi}{\theta}\right]. \qquad (2)$$

Полученная зависимость представлена на рис. 3.

Наконец, обсудим общий случай произвольного значения χ, т.е. произвольной толщины слоя черной фракции. Прежде всего должно быть $\theta < \pi - \chi$ (рис. 1, *б*). Далее, если $\theta > (\pi - \chi)/2$, то, как легко видеть, $T = 2\pi - 2\theta - \chi$. Если же $\theta > (\pi - \chi)/2$, то зависимость $T(\theta)$ становится нетривиальной. Некоторые последовательные моменты начальной стадии перемешивания в этой ситуации показаны на рис. 2. После момента времени $\alpha + 2\pi$, показанного на рис. 2, *г*, можно снова обратиться к соображениям, уже использованным при рассмотрении частного случая $\chi \to 0$. Теперь, однако "угол" белого материала, который остается перемешать, равен уже $2\pi - (2\theta + \chi + \alpha)$ (рис. 2, *г*). Поэтому

$$T = \alpha + 2\pi + 2\pi\left[\frac{2\pi - (2\theta + \chi + \alpha)}{2\theta}\right] + 2\pi - (2\theta + \chi + \alpha) - 2\theta\left[\frac{2\pi - (2\theta + \chi + \alpha)}{2\theta}\right]. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\frac{T}{2\pi} = 1 - \frac{\chi}{2\pi} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\left[\frac{\pi - (\chi + \alpha)/2}{\theta}\right], \qquad (4)$$

где угол α выражается через θ и χ с помощью (1).

При $\chi \to 0$ (4) переходит в (2). Полученные кривые показаны на рис. 3.

В итоге, оставаясь в рамках геометрического подхода [1], мы смогли вычислить одно из характерных времен процесса лавинного перемешивания и найти его скачкообразную зависимость от степени заполнения барабана и соотношения между объемами перемешиваемых фракций.

Автор благодарен С.А. Ктиторову, Е.К. Кудинову, А.М. Монахову и Ю.А. Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Дороговцев С.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 246.
[2] *Rajchenbach J.* // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 2221.
[3] *Zik O., Levine D., Lipson S.G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 644.
[4] *Hill K.M., Kakalios J.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. R3610.
[5] *Metcalfe G., Shinbrot T., McCarthy J.J., Ottino J.M.* // Nature. 1995. Vol. 374. P. 39.