04;10

Асимптотический вид радиального профиля релятивистского электронного пучка, распространяющегося в газоплазменной среде при наличии внешнего магнитного поля и компенсирующего ионного фона

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт математики и механики им.В.И.Смирнова
198904 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 9 апреля 1996 г. В окончательной редакции 12 сентября 1996 г.)

При помощи H-теоремы Больцмана и вариационных методов найден асимптотический по времени вид радиального профиля плотности тока параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в рассеивающей газоплазменной среде вдоль постоянного внешнего магнитного поля и компенсирующего ионного фона. Показано, что в этом случае указанный радиальный профиль имеет гауссовский вид.

1. В последнее время значительное внимание уделяется исследованию процессов, сопровождающих транспортировку релятивистских электронных пучков (РЭП) в газоплазменных средах. Среди указанных процессов одно из основных мест занимает проблема поперечной эволюции пучка при наличии внешних электромагнитных полей. В частности, для ослабления поперечной дисперсии пучка в линейных ускорителях может использоваться как продольное внешнее магнитное поле, так и предварительно созданный фокусирующий ионный канал [1–3]. Кроме того, при космических исследованиях могут быть использованы РЭП, распространяющиеся вдоль геомагнитного поля в режиме ионной фокусировки [3]. В известных работах [1,2] был развит подход, основанный на использовании уравнений огибающей, который позволяет сравнительно просто устанавливать основные качественные и количественные особенности динамики транспортировки осесимметричных РЭП в газоплазменных средах. Однако применение указанного метода к решению конкретных задач создает необходимость в определенных предположениях о характере радиального профиля плотности пучка. Значительно более строгим является подход, основанный на решении кинетического уравнения для функции распределения $f^\tau(t, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$ частиц пучка в тонком поперечном сегменте, характеризуемом расстоянием $\xi = \tau c$ от фронта РЭП, где c — скорость света, $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$ — точка в поперечном фазовом пространстве. В общем случае эта задача является весьма сложной и может быть решена только на основе использования соответствующих численных методов. Однако, как показывают теория и эксперимент [1,2,4], в определенных условиях сравнительно просто может быть найден вид функции распределения f^τ в асимптотическом пределе по времени. В частности, в соответствии с результатами работы [1] произвольное распределение частиц в поперечном сегменте параксиального аксиально-симметричного РЭП, который распространяется в однородной рассеивающей газоплазменной среде в состоянии, близком к динамическому равновесию, с течением времени асимптотически приближается к изотермическому распределению Беннета. Этот вывод, сделанный на основе теоретических выкладок, подтвержден экспериментальными данными, приведенными в работах [4,5].

В настоящей работе показано, что соответствующее асимптотическое распределение при выполнении определенных условий устанавливается и в пучке, распространяющемся в однородной рассеивающей газоплазменной среде при наличии компенсирующего ионного фона и внешнего магнитного поля, которые, как указывалось выше, часто встречаются на практике.

2. Рассмотрим параксиальный моноэнергетический аксиально-симметричный РЭП, распространяющийся вблизи динамического равновесия вдоль цилиндрической системы координат (r, θ, z) в однородной рассеивающей газоплазменной среде при наличии однородного компенсирующего ионного фона вдоль стационарного внешнего магнитного поля. Кроме того, будем предполагать, что в процессе транспортировки потерями энергии и изменением тока и заряда системы плазма-пучок можно пренебречь, т. е.

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \qquad \frac{d(\varkappa T_B)}{dt} = 0, \tag{1}$$

где γ — релятивистский фактор, $T_B = e\beta I_b/(2c)$ — эффективная температура Беннета,

$$\varkappa = \left(1 - f_m\right) - \frac{(1 - f_c)}{\beta^2}, \tag{2}$$

f_m, f_c — соответственно коэффициенты магнитной и зарядовой нейтрализации; $\beta = v_z/c$, v_z–z — компонента вектора скорости частиц РЭП; I_b — ток пучка; e — заряд электрона.

Далее для простоты будем считать, что средний обобщенный угловой момент произвольного рассматриваемого сегмента пучка $P_\theta = 0$.

Покажем теперь, что при указанных предположениях функция распределения f^τ частиц пучка в произвольном поперечном сегменте РЭП со временем асимптотически приближается к некоторой функции f_a^τ, не зависящей от вида начальной функции распределения f_0^τ в момент инжекции $t = \tau$. Для построения функции f_a^τ воспользуемся известным методом H-функций Больцмана, использованном, в частности, в работе [1] для нахождения асимптотического вида функции распределения частиц квазиравновесного самофокусирующегося РЭП в рассеивающей газоплазменной среде в отсутствие внешних магнитных и электрических полей. В [1] показано, что в этой ситуации пучок эволюционирует к беннетовскому изотермическому распределению. Больцмановскую H-функцию поперечного сегмента РЭП определим известным образом [1,6]

$$H^\tau(t) = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f^\tau \ln f^\tau, \tag{3}$$

где функция f^τ удовлетворяет кинетическому уравнению, которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{p_\perp}{m\gamma}\nabla_\perp f^\tau + \Big[e\nabla_\perp\big(\beta\mu A_z - \Phi_i\big) + \Omega_c \mathbf{p}_\perp x \mathbf{i}_z\Big]\nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2}\,\Delta_{p_\perp} f^\tau. \tag{4}$$

Заметим, что уравнение (4) является обобщением соответствующего уравнения работы [1] на случай наличия продольного внешнего магнитного поля и компенсирующего однородного ионного фона. В (4) $\mathbf{p}_\perp = m\gamma v_\perp$ — поперечная компонента релятивистского импульса, γ — лоренц-фактор; e и m — заряд и масса электрона; $\Omega_c = eB_0/(m\gamma c)$ — циклотронная частота частиц пучка во внешнем магнитном поле с индукцией B_0; $\mu = \varkappa/(1 - f_m)$; S — величина, характеризующая среднюю скорость закачки энергии из продольного движения частиц в их поперечное движение в результате многократного кулоновского рассеяния электронов пучка на атомах фонового газа (в этом случае интеграл столкновений в правой части уравнения (4) является частным случаем интеграла столкновений Фоккера–Планка для изотропного и упругого рассеяния [1,6]). Наконец, величины $\Phi_i(r)$ и $A_z(r)$ представляют собой соответственно скалярный потенциал внешнего радиального электрического поля, созданного компенсирующим ионным фоном, и z-компоненту векторного потенциала самосогласованного магнитного поля. В рассматриваемом приближении квазистационарного параксиального РЭП потенциал A_z удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}\big(1 - f_m\big) J_b, \tag{5}$$

где $J_b = \eta I_b$ — радиальный профиль плотности тока пучка, I_b — полный ток РЭП, а функция

$$\eta(\mathbf{r}_\perp, t) = \int d\mathbf{p}_\perp f^\tau(t, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp) \tag{6}$$

характеризует радиальный профиль плотности тока пучка в сегменте, определяемом временем инжекции τ.

3. Для решения поставленной задачи прежде всего покажем, что в рассматриваемом случае справедлива H — теорема Больцмана, то есть выполнено условие $dH/dt < 0$. Действительно, как нетрудно проверить, для функции f^τ, удовлетворяющей кинетическому уравнению (4), имеем

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \frac{\partial}{\partial f^\tau}\left(f^\tau \ln f^\tau\right)\frac{\partial f^\tau}{\partial t} = -\int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \frac{m\gamma S}{2}\frac{|\nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau|^2}{f^\tau} < 0. \tag{7}$$

Далее предположим, что функция распределения электронов рассматриваемого сегмента пучка на выходе из инжектора является заданной. Дальнейшая эволюция функции распределения будет описываться решением кинетического уравнения, которое в рассматриваемом случае должно удовлетворять интегральным соотношениям

$$N = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f^\tau = N_0, \tag{8}$$

$$\tilde{P}_\theta = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f^\tau \left(r p_\theta + \frac{r^2}{2}\gamma m \Omega_c\right) = \tilde{P}_\theta^0, \tag{9}$$

$$\Psi(t) = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f^\tau \left(\frac{p_\perp^2}{2m\gamma} - e\Psi_i + \frac{e\beta\mu A_z}{2}\right) = \Psi_0 + S_0 t, \tag{10}$$

$$\varepsilon_\perp(t) = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f^\tau \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} = \varkappa T_B + \left(\frac{e^2\pi}{2} n_i + \frac{m\gamma\Omega_c^2}{8}\right) R_\tau^2(t), \tag{11}$$

где N_0, $\tilde{P}_\theta^0$, Ψ_0 — известные постоянные, которые определяются начальной функцией распределения частиц сегмента f_0^τ; $R_\tau^2(t)$ — среднеквадратичный радиус пучка в момент времени t на расстоянии τ от фронта РЭП; $n_i(r)$ — плотность ионного фона, создающего дополнительное радиальное фокусирующее поле.

Условия (8) и (9) выражают соответственно закон сохранения полного числа частиц и обобщенного углового момента рассматриваемого сегмента, условие (10) следует из уравнения энергии, а условие (11) является условием динамического равновесия пучка, записанного с учетом указанных выше предположений.

Далее по аналогии с (3) и (7) введем в рассмотрение функционалы

$$H(g) = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp g \ln g, \tag{12}$$

$$\frac{dH}{dt}(g) = -\int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \frac{m\gamma S}{2}\frac{|\nabla_{\mathbf{p}_\perp} g|^2}{g}, \tag{13}$$

где g — произвольная функция, определенная на фазовом пространстве $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$.

Покажем, что задача об определении амимптотической функции распределения частиц РЭП может быть сведена к нахождению функции f_a, которая минимизирует функционалы $H(g)$ и $(dH/dt)(g)$ на пространстве функций, задаваемом условиями (8)–(11). Действительно, пусть найдена функция f_a, такая что в любой момент времени t для произвольной функции f выполняются соотношения

$$H(f_a) < H(f), \tag{14}$$

$$-\frac{dH}{dt}(f_a) < -\frac{dH}{dt}(f), \tag{15}$$

где f_a и f удовлетворяют условиям (8)–(11), записанным для момента t.

Кроме того, предположим, что функция f_a удовлетворяет дополнительному условию

$$\frac{dH}{dt}(f_a) = \frac{dH(f_a)}{dt}. \tag{16}$$

Пусть f^τ — точное решение кинетического уравнения (4) с начальным условием $f^\tau\big|_{t=\tau} = f_0^\tau$. Тогда в силу условий (14)–(16) для любого момента времени t имеют место соотношения

$$H_a(t) \equiv H(f_a) < H(f^\tau) = H^\tau(t), \tag{17}$$

$$\frac{dH}{dt} > \frac{dH^\tau}{dt}. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что условия (17) и (18) являются достаточными для асимптотической сходимости функции $H_a(t)$ к монотонно убывающей (в силу (7)) функции $H^\tau(t)$. Таким образом, определяемая из решения задачи (14)–(16) функция f_a в асимптотическом пределе по времени будет сходиться по функционалу H к точному решению кинетического уравнения (4).

4. Проанализируем сначала вопрос об отыскании вида функции f_a, минимизирующей функционал $H(f)$ при изопериметрических условиях (8)–(11). В соответствии с методом постоянных множителей Лагранжа указанная изопериметрическая задача сводится к задаче на экстремум для функционала

$$R_1(f) = H + \tau_1 N_0 + \tau_2 \tilde{P}_\theta + \tau_3 \Psi = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \Big[f \ln f + \tau_1 f + \tau_2 f \tilde{p}_\Theta + \tau_3 f \left(u - e\beta\mu A_z \frac{1}{2} \right) \Big], \tag{19}$$

где τ_i $(i = 1, 2, 3)$ — постоянные множители Лагранжа,

$$\tilde{p}_\Theta = r p_\Theta + \frac{r^2}{2}\gamma m \Omega_c, \quad u = \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} - e\Phi_i + e\beta\mu A_z. \tag{20}$$

Запишем условие экстремума функционала $R_1(f)$ как $\delta R_1 = 0$, откуда с учетом соотношения

$$\delta \left\{ \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp f \left(u - e\beta\mu A_z \frac{1}{2} \right) \right\} = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \delta f u \tag{21}$$

получим

$$\int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp \delta f \Big(\ln f + 1 + \tau_1 + \tau_2 \tilde{p}_\theta + \tau_3 u \Big) = 0. \tag{22}$$

Для произвольной вариации δf условие (22) выполнено для функций f_a вида

$$f_a = G \exp\Big[-(\tau_2 \tilde{p}_\theta + \tau_3 u) \Big], \tag{23}$$

где $G = \exp[-(1 + \tau_1)]$.

Нетрудно показать, что функция f_a удовлетворяет условию $\tilde{p}_\theta = 0$ при $\tau_2/\tau_3 = \Omega_c/2$. В этом случае имеем

$$f_a = G \exp\left\{ -\frac{(\tilde{p}_\theta \Omega_c \frac{1}{2} + u)}{T} \right\}, \tag{24}$$

где $T = \tau_3^{-1}$.

Множитель G в (24) может быть найден из условия нормировки (8). Тогда, полагая в (8) $N_0 = 1$, получим

$$G = \left[2\pi m \gamma T \int d\mathbf{r}_\perp \exp\left(\frac{e\beta\mu A_z - e^2 \pi r^2 n_i^f}{T} \right) \right]^{-1}, \tag{25}$$

где n_i^f — среднее значение $n_i(r)$ по профилю пучка.

Параметр T в (24) определяется условием динамического равновесия (11). Действительно, после подстановки (25) в (11) и соответствующих преобразований приходим к выражению

$$T \simeq \Big[e^2 \pi n_i^f R_a^2(t) - S \cdot t \Big] \frac{1}{2}, \tag{26}$$

где $R_a^2 = \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp r^2 f_a / 2$.

Нетрудно показать, что функция (24) реализует абсолютный минимум функционала $H(f)$ на пространстве функций, задаваемом соотношениями (8)–(11).

5. Покажем теперь, что функция (24), реализующая минимум функционала $H(f)$, одновременно реализует минимум функционала $dH/dt(f)$ в функциональном пространстве, задаваемом соотношениями (8)–(11). В этом случае задача на экстремум сводится к задаче на экстремум для функционала

$$R_2(f) = -\frac{dH}{dt}(f) + \beta_1 N_0 + \beta_2 \Psi + \beta_3 \varepsilon_\perp + \beta_4 \tilde{P}_\theta, \tag{27}$$

где β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные множители Лагранжа.

Можно показать, что функция f, реализующая экстремум функционала R^2, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\gamma m S}{2} \Big(\frac{|\nabla_{p_\perp} f|^2}{f^2} - \frac{2\Delta_{p_\perp} f}{f} \Big) + \beta_1 + \beta_2 u + \beta_3 \frac{p_\perp^2}{2\gamma m} + \beta_4 \tilde{p}_\Theta = 0. \tag{28}$$

Решение уравнения (28) будем искать в классе функций $f = F(u, \tilde{p}_\Theta)$. Можно показать, что в этом случае в силу независимости F от r из (28) вытекают два уравнения

$$\frac{\pi e^2 n_i}{m\gamma}\left[\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - \frac{2}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\beta_3}{S}\right] + \Omega_c\left[\frac{1}{2F^2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_\Theta} - \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \tilde{p}_\Theta}\right] + \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{p}_\Theta^2} - \frac{1}{2F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_\Theta}\right)^2 = 0, \quad (29)$$

$$u\left[\frac{2S}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{S}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - \beta_2 - \beta_3\right] + \tilde{p}_\theta\left[\frac{2S}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \tilde{p}_\Theta} - \frac{S}{F^2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_\Theta} - \beta_4\right] + \frac{2S}{F}\frac{\partial F}{\partial u} - \beta_1 = 0. \quad (30)$$

Покажем, что при определенном наборе коэффициентов β_i функция (24) удовлетворяет уравнениям (29), (30). Подставляя (24) в (29), после соответствующих преобразований получим

$$\beta_3 = \frac{S}{T^2}\frac{n_i^f}{n_i^0}, \quad (31)$$

где $n_i^0 = n_i^f$ при $t = 0$.

Аналогично из (24) и (30) имеем

$$\beta_1 = -\frac{2S}{T}, \quad \beta_2 = \frac{S}{T^2}\left(1 - \frac{n_i^f}{n_i^0}\right), \quad \beta_4 = \frac{S\Omega_c}{2T^2}. \quad (32)$$

Таким образом, функция (24) действительно реализует минимум функционала $R_2(f)$, а следовательно, и функционала $dH/dt(f)$ при изопериметрических условиях (8)–(11).

6. Покажем теперь, что функция (24) удовлетворяет условию

$$\frac{dH}{dt}(f_a) = \frac{dH(f_a)}{dt}. \quad (33)$$

Подстановка (24) в (7) дает

$$\frac{dH}{dt}(f_a) = -\frac{2}{T}. \quad (34)$$

Кроме того, с учетом (11), (26) и условия $\tilde{P}_\Theta = 0$ в асимптотическом состоянии получим

$$H(f_a) = \ln G - S\frac{t}{T}, \quad (35)$$

$$G = \frac{e^2 n_i^f}{(2\pi m\gamma T^2)}, \quad (36)$$

$$\frac{dH(f_a)}{dt} = -\frac{2}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{T}. \quad (37)$$

Итак, в асимптотическом пределе функция f_a удовлетворяет условиям (14)–(16) и, следовательно, в соответствии с изложенным ранее является функцией, к которой с течением времени будет асимптотически приближаться точное решение кинетического уравнения Фоккера–Планка (4). Как следует из (24), (26) и (36), функция f_a может быть записана в виде

$$f_a(t, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp) = \frac{1}{\pi^2 m\gamma T R_a^2}\exp\left[-2\left(\frac{r}{R_a}\right)^2\right] \times \exp\left\{-\frac{1}{2m\gamma}\left[p_r^2 + \left(p_\Theta + \frac{rm\gamma\Omega_c}{2}\right)^2\right]\right\}, \quad (38)$$

где $R_a(t) = \left(S\cdot t/\left(e^2\pi n_i^f\right)\right)^{1/2}$, $T(t) = S\cdot t/2$.

Соответствующий функции распределения (38) асимптотический профиль плотности тока пучка определяется интегралом

$$\chi_a(r) = \int d\mathbf{p}_\perp f_a = \frac{2}{\pi R_a^2}\exp\left[-2\left(\frac{r}{R_a}\right)^2\right]. \quad (39)$$

Таким образом, при наличии внешнего продольного магнитного поля и радиального фокусирующего электрического поля со стороны однородного ионного фона многократное кулоновское рассеяние электронов пучка на атомах однородной фоновой газоплазменной среды будет приводить к формированию автомодельного гауссова профиля плотности РЭП (в отличие от профиля Беннета, который устанавливается в самосжимаемом пучке, распространяющемся в рассеивающей среде при отсутствии внешних электромагнитных полей [1]).

Список литературы

[1] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[2] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[3] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.
[4] *Briggs R.J., Hester R.E., Lauer E.J.* et al. // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 7. P. 1007–1011.
[5] *Hughes T.P., Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1984: Vol. 27. N 6. P. 1531–1537.
[6] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978. 495 с.