Журнал технической физики, 1997, том 67, № 9

01;12

Использование спектра скоростей для пространственно-временно́го исследования высокоскоростных процессов

© А.А. Аливердиев

Дагестанский государственный университет,
367025 Махачкала, Дагестан

(Поступило в Редакцию 17 октября 1995 г. В окончательной редакции 12 апреля 1996 г.)

Решается задача восстановления в динамике внутренней структуры по комплекту интегралов, зависящих от времени и скорости интегрируемых сигналов. Результаты могут быть использованы для исследования динамических объектов различной природы.

Использование компьютерной томографии в пространстве скоростей не раз обсуждалось в литературе. Так, в [1] предлагалось ее использование для улучшения качества фотографического регистрирования быстропротекающих процессов, а в [2,3] — для определения трехмерного распределения частиц по скоростям. Однако задача изучения внутренней структуры динамического объекта, используя спектр скоростей регистрируемых сигналов, решена на была. Разработке математической части этой задачи и посвящена настоящая работа.

Итак, пусть известен набор n-кратных интегралов по области Ω (снимаемых датчиками, расположенными по n-мерной сфере радиуса r, охватывающей эту область) для множества моментов времени t и множества скоростей v. Тогда математическая задача может быть сформулирована следующим образом. Зная

$$G(\alpha, t, v) = \int\limits_{\Omega} f(x, t + a/v)dx, \tag{1}$$

можно найти $f(x,t)$. Здесь x — n-мерная координата исследуемого объекта (практически n может принимать значения 1, 2, 3); α — n-мерный единичный вектор, характеризующий расположение датчика (очевидно, что при $n = 1$ α есть безразмерная величина, которая может принимать значения 1 и -1); a — расстояние от точки x до датчика α.

Для решения задачи положим $g(\vartheta, s) = G(\alpha, t - 1/v, v)$, где $\vartheta = \big(\alpha\cos(\psi), \sin(\psi)\big)$ — $(n+1)$-мерный вектор, первые n координаты которого равны координатам вектора $\alpha\cos(\psi)$, а последняя координата — $\sin(\psi)$: $s = c(t - \tau - 1/v)\sin(\psi)$; $\psi = \operatorname{arcctg}(v/c) + \pi/2$ (как видно $\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi$, а этого диапазона достаточно, потому что время не может принимать отрицательные значения); c, τ — постоянные новой системы координат $z = \big(x, c(t-\tau)\big)$, выбираемые для наиболее удобного представления в ней конкретного объекта.

Тогда формулу (1) можно представить в виде

$$g(\vartheta, s) = \int\limits_{\Gamma(s,\vartheta)} f(z)dz. \tag{2}$$

К сожалению, для $n > 1$ область $\Gamma(s, \vartheta)$ является нелинейной, что существенно затрудняет решение. Рассмотрим частный случай $r \gg r_0$, где r_0 — радиус минимальной сферы, охватывающей Ω, в концентрической сфере датчиков. В этом случае можно считать, что $a = r - x\alpha$, а область $\Gamma(s, \vartheta)$ представляет собой гиперплоскость, перпендикулярную ϑ и расположенную на расстоянии s от начала координат. Тогда определение f из g представляет собой классическую задачу Радона. Следовательно, можно считать, что

$$f(x,t) = f(z) = \mathbf{R}^{-1}g(\vartheta, s), \tag{3}$$

где $\mathbf{R}^{-1}$ — обратное преобразование Радона.

В настоящее время существует множество способов решения задачи Радона, в том числе с неполными данными [1,3,4]. Таким образом, формулу (3) можно считать решением сформулированной задачи для $r \gg r_0$ (а для $n = 1$ и без этого дополнительного условия).

При практической реализации предлагаемого метода из-за принципиальной невозможности иметь полный набор скоростей использование стандартных алгоритмов реконструкции в большинстве случаев будет невозможно. Однако на сегодняшний день разработана достаточно обширная теория решения задач с использованием априорной информации об исследуемом объекте, что позволяет надеяться на успех и при предельно малом числе угловых (в данном случае "скоростных") проекций.

Рассмотрим два конкретных примера для одномерной области пространственного интегрирования. Допустим, что функция f представляет собой характеристическую функцию некоторого множества ϕ на пространственно-веременно́й плоскости $z = \big(x, c(t-\tau)\big)$. Предположим также, что любой выходящий из начала координат луч пересекает область ϕ ровно один раз (здесь потребуется оптимальный выбор τ). Граница области ϕ в полярных координатах (ρ, φ) будет задаваться формулой $\rho = F(\varphi)$. Причем функция F будет определяющей для функции f и искомой. В этом случае фурье-образ функции f будет иметь вид

$$\hat{f}(\sigma\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\phi}\exp(-i\sigma\vartheta z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{F(\varphi)}\rho\exp(-i\sigma\vartheta\omega)d\rho d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}F^2(\varphi)K\big(\sigma\vartheta\omega F(\varphi)\big)d\varphi,$$

где

$$K(u) = \begin{cases} u^{-2}\big((1+iu)\exp(-iu)-1\big), & u \neq 0,\\ 1/2, & u = 0,\end{cases}$$

$\omega = \big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)$, σ — пространственная частота фурье-образа, i — мнимая единица.

Из проекционной теоремы [4] следует, что $\hat{g}(\vartheta,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\sigma\vartheta)$. Отсюда имеем

$$\hat{g}(\vartheta,\sigma) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{0}^{2\pi}F^2(\varphi)K\big(\sigma\vartheta\omega F(\varphi)\big)d\varphi. \tag{4}$$

Если функция g задана для p-направлений, то (4) представляет собой систему нелинейных интегральных уравнений первого рода относительно функции F (в этой системе $\vartheta = \vartheta_j$, $j = 0, 1, \ldots, p$). В [5,6] доказывается, что если функция f отвечает оговоренным выше требованиям, то для $p = 4$ существует единственное решение $f = \mathbf{R}^{-1}g$, а в [4] приводятся результаты решения системы подобной (3) по методу Тихонова–Филлипса для $p = 3$. Все это позволяет надеяться на восстановление искомой функции f, используя один высокоскоростной и один низкоскоростной сигналы, снятые с двух сторон. А это в свою очередь дает возможность исследования высокоскоростных процессов, сопровождающихся оптическим и акустическим или двумя акустическими (продольным и поперечным) излучениями.

Рассмотрим еще один пример. Пусть искомая функция может быть задана в виде произведения $f(x,t) = X(x)T(t)$. Покажем, что для ее восстановления может быть достаточно всего двух проекций:

$$G_1(t) = \int\limits_{-r}^{r}X(x)T\big(t+(r-x)/v_1\big)dx \tag{5}$$

и

$$G_2(t) = \int\limits_{-r}^{r}X(x)T\big(t+(r-x)/v_2\big)dx, \tag{6}$$

одна из которых снята при очень высокоскоростном сигнале ($v_1 \to \infty$). В самом деле, при $v_1 \to \infty$ формула (5) стремится к

$$G_1(t) = \int\limits_{-r}^{r}X(x)T(t)dx = \Big[\int\limits_{-r}^{r}X(x)dx\Big]T(t). \tag{7}$$

Вычислив из (7) функцию $T(t)$ и подставив ее в (6), получим

$$G_2(t) = \int\limits_{-r}^{r}X_n(x)G_1\big(t+(r-x)/v_2\big)dx, \tag{8}$$

где

$$X_n(x) = X(x)\Big[\int\limits_{-r}^{r}X(x)dx\Big]^{-1}. \tag{9}$$

Формула (8) представляет собой уравнение Фредгольма первого рода относительно $X_n(x)$, которое может быть решено стандартными методами [7]. После чего окончательно получим $f(x,t) = X_n(x)G_1(t)$ (хотя скорее всего именно $X_n(x)$ будет содержать исчерпывающую информацию об исследуемом объекте).

Очевидно, что высокоскоростной сигнал в этом случае может быть не только сопровождающим, но и инициирующим. Таким образом, предлагаемый метод может быть использован для исследования структуры некоторых нелинейных кристаллов путем анализа вторичного акустического излучения, инициированного лазерной накачкой.

Интересен также случай, когда функция g может быть представлена в виде разряженных стохастических потоков коррелированных квантов. Тогда для восстановления искомой функции можно ограничиться только одним сигналом, снятым с двух сторон. Этот случай рассматривается в [8,9]. При наличии же существенной дисперсии интегрируемого сигнала не исключена возможность использования более стандартных решений радоновской задачи.

В заключение отметим, что для случая $n > 1$ также необходимо построение алгоритмов восстановления для сильно ограниченного числа проекций, так как это может найти применение для n-мерного исследования процессов, сопровождающихся излучением, которое не может быть рассмотрено в приближении геометрической оптики.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Исследовательского центра Даггосуниверситета М.Г. Каримову за плодотворное обсуждение рассматриваемой проблемы.

Список литературы

[1] *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
[2] *Баландин А.Л., Преображенский Н.Г., Седельников А.Н.* // ПМТФ. 1989. № 6. С. 34–37.
[3] *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 230 с.
[4] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 280 с.
[5] *Gardner R.J., McMullen P.* // J. London Math. Soc. 1980. Vol. 21. P. 171–175.

[6] *Falconer K.J.* // Proc. London Math. Soc. 1983. Vol. 46. P. 241–262.
[7] *Васильев А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во Московского университета, 1989. 160 с.
[8] *Aliverdiev A.A., Karimov M.H.* Using of Stream at Nonlinear Enviroment for Investigation of Inside Structure of Bioobjects. Lals 94. Minsk, 1994. 130 p.
[9] *Аливердиев А.А.* // Решение стохастической реконструктивной задачи при помощи теории потоков. Сб. ст. студентов и аспирантов университета. Естественные науки. Махачкала: Издательско-полиграфический центр ДГУ, 1995. С. 14–17.