

01;05

## Пиннинг плоских вихрей и проникновение магнитного поля в трехмерную джозефсоновскую среду

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 26 апреля 1996 г.)

Рассмотрено поведение плоских (ламинарных) вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при учете пиннинга, вызванного ячеистостью среды, в зависимости от параметра  $I$ , пропорционального критическому току контакта и размеру ячейки. Рассчитаны минимальные возможные расстояния между двумя изолированными вихрями. Проведен расчет системы вихрей, образующейся в образце при монотонном росте внешнего магнитного поля. Наименьшее расстояние от крайнего вихря до ближайшего соседа пропорционально  $I^{-1.1}$ . При  $I \leq 1.3$  вихри содержат по одному кванту потока  $\Phi_0$ , расстояние между ними не убывает с приближением к границе, а остается примерно постоянным, из чего следует, что магнитное поле не зависит от координаты в области, куда проникли вихри. Эти факты противоречат общепринятой модели Бина. Кривая намагничивания образца имеет вид, типичный для сверхпроводников 2-го рода. Учет пиннинга приводит к росту критического поля  $H_c$  и к возникновению резкого скачка на кривой при  $H = H_c$ .

### Введение

Исследования последних лет показали, что в процессах, происходящих в объемных высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), находящихся в не очень сильных магнитных полях, важную роль играют вихри. При малых полях вихрей нет, поле выталкивается из образца. При некотором значении поля становится энергетически выгодным возникновение вихрей. В отсутствие пиннинга в образце устанавливается однородная вихревая решетка, соответствующая равномерному проникновению поля, которая по мере роста поля становится более плотной. При наличии пиннинга вихри не могут сразу заполнить весь образец, они возникают сначала возле поверхности и с ростом поля постепенно продвигаются в глубь образца. Характер этого процесса определяется структурой вихрей, их пиннингом и его зависимостью от магнитного поля [1–7].

Для расчета проникновения магнитного поля в образец обычно пользуются моделью Бина [1], согласно которой все вихри в области, в которую проникло магнитное поле, находятся в "критическом состоянии", т.е. сила, действующая на каждый вихрь со стороны всех остальных, равна максимальной силе его "зацепления" за структурные дефекты. Расчет критического состояния приводит к соотношению [1]

$$\left| \frac{B}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x} \right| = \alpha_m, \quad (1)$$

где  $\alpha_m$  — максимальное значение силы пиннинга.

Для вычисления  $B(x)$  в критическом состоянии необходимо знать зависимость  $\alpha_m$  от магнитной индукции  $B$  (т.е. от плотности вихрей). Первоначально Бин предположил, что зависимость  $\alpha_m(B)$  линейна, что дает линейную зависимость  $B$  от координаты внутри образца. Ким и др. [2] экспериментально обосновали предположение о независимости  $\alpha_m$  от  $B$ , что приводит к параболическому

профилю  $B(x)$ . В настоящее время рассматриваются и другие виды зависимости  $\alpha_m(B)$ , получаемые из эмпирического анализа экспериментальных данных, например  $\alpha_m \sim B/(B + B_0)^\beta$  [3,4] и т.д.

Вид зависимости  $\alpha_m(B)$  определяется физической природой пиннинга. Существуют различные механизмы зацепления вихрей на всевозможных дефектах кристаллической решетки, являющихся центрами пиннинга. Например, в работах [5,6] рассматривается взаимодействие непрерывного вихря с дискретно расположенными центрами пиннинга при различных соотношениях между размерами вихря и расстоянием между центрами пиннинга. Джозефсоновская среда в [5,6] представляет собой по сути сверхпроводник, прорезанный решеткой одномерных слабых связей. Центры пиннинга не связаны непосредственно с этой решеткой, а созданы какими-то другими факторами: примесями, неоднородностями и т.п. В работах [7–10] анализируется джозефсоновская среда другой структуры: кубическая решетка, каждая связь которой содержит один точечный джозефсоновский контакт. В такой среде вихрь описывается не непрерывным распределением разности фаз, а дискретными ее значениями на отдельных контактах. При этом существует пиннинг, связанный с ячеистой структурой среды, определяемый конечной величиной энергии, необходимой для смещения центра вихря в соседнюю ячейку.

В [8,9] проведен подробный анализ возможных самоподдерживающихся токовых структур в такой среде, получена система уравнений квантования флюксоида в петлях для случаев экранирующих токов, плоских и линейных вихревых структур. В [10] проведен расчет энергии пиннинга уединенного плоского вихря в трехмерном образце, связанного с ячеистой структурой джозефсоновской среды. Однако для расчета магнитного поля, проникающего в образец, как говорилось выше, необходимо знать зависимость силы пиннинга от плотности вихрей. При этом следует учитывать, что нелинейность

системы уравнений [9] не позволяет рассматривать взаимодействие вихрей по принципу суперпозиции. Иными словами, взаимодействие вихря с соседями приводит к изменению его формы, что не позволяет воспользоваться результатами, полученными для уединенного вихря. Поясним сказанное следующим примером. Рассмотрим цепочку из массивных шаров, связанных пружинками, надетую на уединенный острый пик. Система имеет два равновесных состояния: 1) устойчивое — пик проходит через середину промежутка между соседними шарами, 2) неустойчивое — один из шаров на вершине пика. При этом энергией "пиннинга" можно назвать разность энергий этих двух состояний. Именно такой расчет проведен в [10]. Предположим, теперь, что меняется профиль структуры например, область справа от пика поднимается. В какой-то момент вся цепь начнет перемещаться влево. При этом энергия структуры не будет равняться энергии "пиннинга", вычисленной выше. Именно это и происходит при взаимодействии вихря с соседями.

Поэтому для нахождения возможных токовых конфигураций в такой джозефсоновской среде, а на их основе и профиля проникающего магнитного поля следует проводить непосредственный расчет всей конфигурации в целом, не основываясь на силах пиннинга, вычисленных для изолированного вихря. В работе [7] приведены результаты численного анализа возможных токовых распределений и соответствующих профилей магнитного поля вблизи границы джозефсоновского образца такого типа. При этом подтвердилась правильность концепции "критического состояния", т.е. модели Бина. Однако рассмотрение в [7] проводилось только для случая большого значения критического тока контактов, когда в токовой конфигурации нельзя выделить отдельные вихри (подробнее об этом далее в тексте).

В настоящей работе исследуется взаимодействие и пиннинг плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде типа рассмотренной в [7–10] при малых значениях критического тока контактов. Проводится расчет возможных расстояний между вихрями для случая двух уединенных вихрей, а также для системы вихрей, устанавливающейся в среде при ее помещении во внешнее магнитное поле. На основе этих результатов проведен анализ профиля магнитного поля, проникающего в образец. Показано, что концепция Бина, согласно которой все вихри находятся на "границе движения", в этом диапазоне значений  $I$  несправедлива. Полученные результаты применимы также в одномерном случае длинных джозефсоновских контактов.

## Уравнения квантования флюксоида в ячейках

Рассмотрение будет проводиться, как и в [8,9], на упрощенной модели, представляющей собой кубическую решетку с постоянной решеткой  $h$ , состоящую из сверхпроводящих проводов, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты

обладают одной и той же величиной критического тока  $J_c$ . Токовое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных внешнему магнитному полю или оси вихря и расположенных на расстоянии  $h$  друг от друга, токи распределены идентично.

Пусть образец, имеющий форму толстой пластины, бесконечной в двух направлениях, помещен во внешнее магнитное поле  $H_e$ , параллельное плоскости пластины. При малых  $H_e$  имеем эффект Мейсснера: в образце возникают экранирующие токи, текущие вдоль его поверхности и замыкающиеся на бесконечности. При превышении магнитным полем  $H_e$  некоторого порогового значения в образце начинают возникать вихри. Мы будем рассматривать далее плоские (ламинарные) вихревые структуры, хотя возникновение линейных вихрей энергетически более выгодно и именно линейные вихри реализуются на практике. Однако случай плоских вихрей поддается расчету, что дает возможность понять все математические и физические нюансы и качественно распространить полученные результаты и на случай линейных вихрей. Особое внимание в данной работе будет обращено на справедливость модели Бина.

На рис. 1, *a* показано сечение образца плоскостью, перпендикулярной полю  $H_e$ . В случае экранирующих токов (мейсснеровский случай) величины токов убывают по мере углубления в образец и в глубине его равны нулю. Для уединенного плоского вихря, расположенного вдали от поверхности, токи убывают и стремятся к нулю по мере удаления от центрального ряда [8]. В общем случае имеются и поверхностные экранирующие токи, и система вихрей, периодическая при отсутствии пиннинга или разрезающаяся по мере углубления внутрь образца при наличии пиннинга.

В [8] выведено условие квантования флюксоида в  $m$ -й ячейке (номера ячеек указаны в кружках на рис. 1, *a*) — формула (8) в [8]

$$x_e - I \sum_{i=0}^m \sin \varphi_i - (bI \sin \varphi_m + \varphi_m) + (bI \sin \varphi_{m+1} + \varphi_{m+1}) = 2\pi K_m, \quad (2)$$

где  $x_e \equiv 2\pi\Phi_e/\Phi_0$  — нормированный на квант потока  $\Phi_0$  поток внешнего магнитного поля  $\Phi_e = \mu_0 H_e h^2$  через ячейку,  $\varphi_i$  — разность фаз на  $i$ -м контакте,

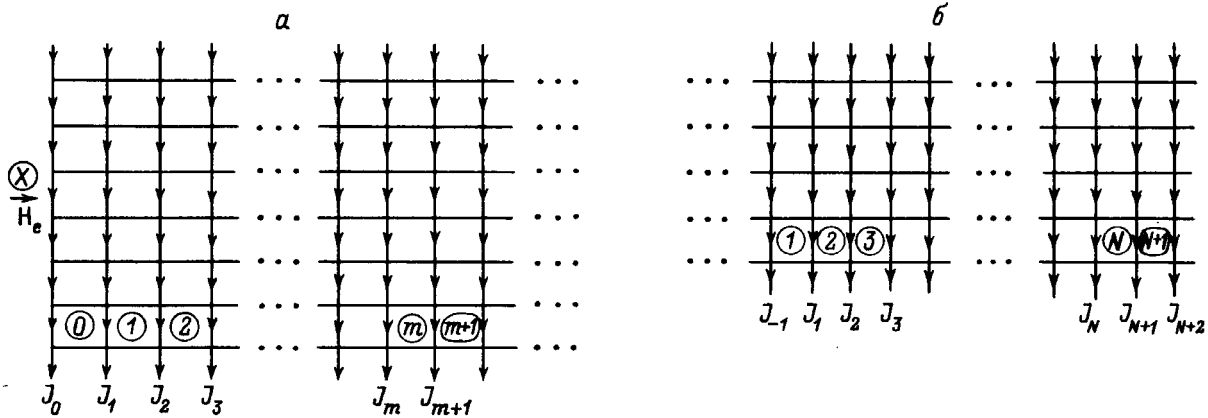
$$I \equiv 2\pi\mu_0 h J_c / \Phi_0, \quad b \equiv -\frac{1}{2\pi} \ln \left( 2 \operatorname{sh} \frac{\pi\delta}{h} \right), \quad (3)$$

$\delta$  — радиус провода,  $K_m$  — число квантов  $\Phi_0$  в  $m$ -й ячейке.

Далее для простоты будем считать  $b = 0$ . Тогда (2) примет вид:

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m = I \sum_{i=0}^m \sin \varphi_i - x_e + 2\pi K_m. \quad (4)$$

В ячейках центрального столбца каждого вихря  $K_m = 1$ , в остальных  $K_m = 0$ .



**Рис. 1.** Распределение токов в плоскости, перпендикулярной внешнему полю  $H_e$ . а — экранирующие токи вблизи границы, б — два взаимодействующих вихря вдали от границы.

Вычтя из (4) аналогичное уравнение для  $(m - 1)$ -й ячейки, получим

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m (\pm 2\pi), \quad (5)$$

где в правой части могут появляться члены  $+2\pi$  или  $-2\pi$ , если значение  $m$  соответствует центру какого-либо из вихрей.

Казалось бы, что, решая систему уравнений (5) с граничным условием, полученным из (4) при  $m = 0$

$$\varphi_1 - \varphi_0 = I \sin \varphi_0 - x_e, \quad (6)$$

можно найти распределение  $\varphi_m$  при заданном  $x_e$  (т.е. внешнем магнитном поле). Однако это не так. Существование пиннинга приводит к тому, что данному  $x_e$  может соответствовать бесчисленное множество различных комбинаций  $\varphi_m$ . Иначе говоря, профиль магнитного поля в образце при наличии пиннинга зависит от предыстории. Мы будем интересоваться случаем монотонного возрастания внешнего поля. При этом вихри постепенно проникают внутрь образца, двигаясь от поверхности. Соответствующее распределение вихрей в образце можно найти из того условия, что наиболее удаленный от границы вихрь находится на "границе движения".

С ростом параметра  $I$  размер вихря уменьшается [8,9], а сила пиннинга растёт (что легко понять, так как  $I \sim J_c$ ). Поэтому с ростом  $I$  расстояние между вихрями убывает и при больших  $I$ , когда центры вихрей могут находиться в соседних ячейках, понятие отдельных вихрей теряет смысл.

### Взаимодействие и пиннинг двух изолированных вихрей

Рассмотрим два плоских вихря, находящихся далеко от границы, центры которых расположены на расстоянии  $N$  ячеек друг от друга (рис. 1, б), в рядах с номерами 1 и  $(N + 1)$  (номера указаны в кружках на рис. 1, б). При

$I \geq 1$  [10] значения  $\varphi_m$  вне центральных ячеек малы, система (5) линеаризуется и ее решение имеет вид

$$\varphi_m = \varphi_{-1} \gamma^{-m-1} \quad (m \leq -1), \quad (7a)$$

$$\varphi_m = C_1 \gamma^{m-1} + C_2 \gamma^{N-m} \quad (1 \leq m \leq N), \quad (7б)$$

$$\varphi_m = \varphi_{N+1} \gamma^{m-N-1} \quad (m \geq N + 1), \quad (7в)$$

где

$$\gamma = 1 + \frac{I}{2} - \sqrt{I + \frac{I^2}{4}}$$

— решение уравнения  $\gamma^2 - (2 + I)\gamma + 1 = 0$ .

Будем считать распределение токов и фаз симметричным относительно середины расстояния между вихрями. Тогда  $C_1 = -C_2 = \varphi_1 / (1 - \gamma^{N-1})$ ,

$$\varphi_2 = \varphi_1 k, \quad (8)$$

где коэффициент  $k = \gamma(1 - \gamma^{N-3}) / (1 - \gamma^{N-1})$ .

Подставляя (8) в граничные условия на центральной ячейке вихря

$$I \sin \varphi_1 = \varphi_{-1} - 2\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi, \quad (9a)$$

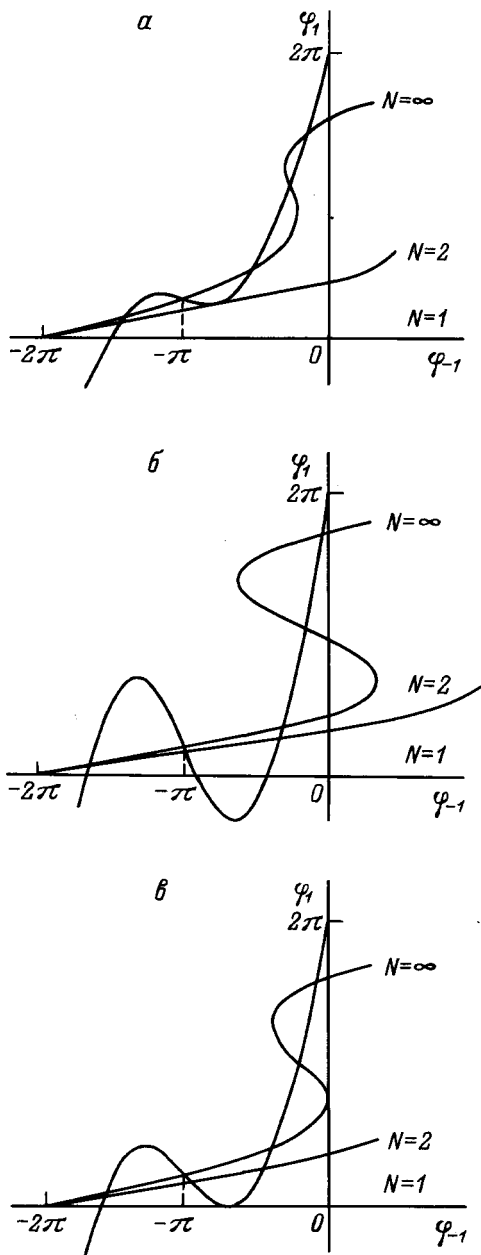
$$I \sin \varphi_{-1} = \varphi_1 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2} - 2\pi, \quad (9б)$$

получим следующую систему уравнений для  $\varphi_{-1}$  и  $\varphi_1$

$$\varphi_{-1} = I \sin \varphi_1 + (2 - k)\varphi_{-1} - 2\pi, \quad (10a)$$

$$\varphi_1 = I \sin \varphi_{-1} + (2 - \gamma)\varphi_{-1} + 2\pi. \quad (10б)$$

В (10) от расстояния между вихрями зависит только коэффициент  $k$ :  $k(\infty) = \gamma$ ,  $k(2) = -1$ ,  $k(3) = 0$  и т.д. На рис. 2 приведены графики зависимостей (10) для  $I = 1, 2.85, 4$ , из которых можно видеть, что при каждом значении  $I$  система (10) имеет решения в определенном диапазоне  $N$ , т.е. вихри могут находиться на различных расстояниях друг от друга, начиная с какого-то минимального и до бесконечности. Это результат пиннинга, так как в его отсутствии вихри разбежались



**Рис. 2.** Графическое решение системы (10) при различных значениях параметра  $I$ . Кривые, исходящие из точки  $\varphi_1 = 2\pi$ , соответствуют (10б), а исходящие из точки  $\varphi_{-1} = -2\pi$  — уравнению (10а).  $I$ : а — 2, б — 4, в — 2.85.

бы на бесконечность, т.е. при конечных  $N$  решений бы не было. Найдя  $N$ , мы найдем наименьшее расстояние, на котором силы пиннинга еще могут компенсировать взаимное отталкивание вихрей. Из рис. 2 видно, что при  $I = 2$   $N_{\min} = 2$ , а при  $I = 4$  центры вихрей могут располагаться даже в соседних ячейках.

Найдем минимальное значение  $I$ , при котором центры вихрей могут располагаться в соседних ячейках. В этом случае  $N = 1$ ,  $k = \infty$  и из (10а) следует, что  $\varphi_1$  должно равняться нулю (что легко понять, исходя из симметрии картины). Наименьшему  $I$ , удовлетворяющему (10) при

$\varphi_1 = 0$ , соответствует кривая на рис. 2, которая в своем минимуме касается оси  $\varphi_{-1}$ . Точный численный расчет дает значение  $I_{\min} = 2.9$ .

### Равновесие крайнего вихря

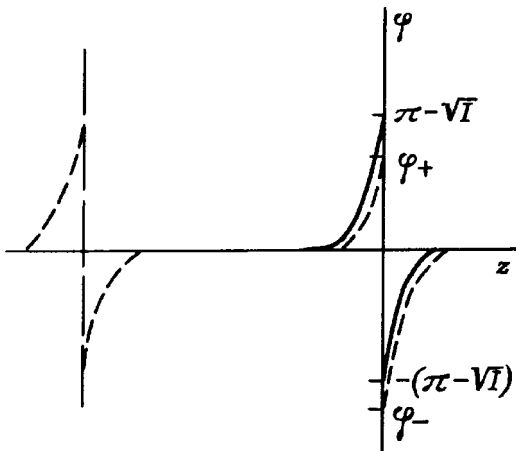
Найдем такие значения  $I$ , при которых понятие вихрей хорошо определено. В предыдущем разделе показано, что при  $I < 2.9$  центры вихрей не могут располагаться в соседних ячейках. Однако этот вывод относится только к случаю двух уединенных вихрей, так как в этом случае они как бы раздвинуты на крайние возможные позиции в соответствующих ячейках. Если же правее правого вихря есть еще и другие, которые позволяют ему отодвинуться еще правее в той же ячейке, то левый вихрь сможет удерживаться на расстоянии, меньшем полученного в предположении двух изолированных вихрей, а реальный  $N_{\min}$  окажется меньше. Иначе говоря,  $I$ , соответствующий данному  $N_{\min}$ , меньше полученного для случая двух вихрей, в частности, проведя численный расчет по методике, изложенной далее, получим для  $N_{\min} = 1$   $I_{\min} = 2.7$ .

В настоящем разделе мы будем рассматривать такие значения  $I$ , при которых крайний вихрь хорошо определен, т.е.  $I < 2.7$ .

Систему уравнений (5) можно рассматривать как рекуррентный закон для нахождения следующего значения  $\varphi_{m+1}$  (или  $\varphi_{m-1}$ ) из известных  $\varphi_m$  и  $\varphi_{m-1}$  (или  $\varphi_{m+1}$ ) при продвижении влево (или вправо). Проблему учета членов  $\pm 2\pi$  в (5) можно устранить, наложив условие  $|\varphi_m| \leq \pi$ . При этом если получающееся новое значение  $\varphi_{m+1}(\varphi_{m-1}) < -\pi$ , то к нему надо прибавить  $2\pi$ , а если  $\varphi_{m+1}(\varphi_{m-1}) > \pi$ , то вычесть. Такой обобщенный рекуррентный закон позволяет, задавшись значениями  $\varphi$  в двух соседних точках, рассчитать распределение  $\varphi_m$  во всей области. Варьируя заданные значения  $\varphi$ , можно находить различные распределения вихрей в образце и соответствующие магнитные поля.

Искомая ситуация, при которой крайний вихрь находится на грани движения, соответствует такой картине, когда сосед справа от какого-то вихря удален от него на максимально большое расстояние (в идеале на бесконечное), а сосед слева — на минимально возможное.

Предложенный рекуррентный закон был реализован численно на ЭВМ. В качестве исходных двух значений  $\varphi$  выбирались значения  $\varphi_-$  и  $\varphi_+$  на правой и левой границах центральной ячейки выбранного вихря. При этом его соседи справа и слева должны иметь ту же ориентацию, что и он, т.е. имеет место отталкивание с обеих сторон. Конкретный вычислительный алгоритм был таким: при фиксированном значении  $\varphi_+$  значение  $\varphi_-$  монотонно уменьшалось до того момента, когда правый от исходного вихря впервые приобрел ориентацию, противоположную исходному. Это значение последовательно уточнялось, при этом правый и левый соседи монотонно отодвигались от исходного вихря. Постепенно расстояние до правого соседа становилось



**Рис. 3.** Решение уравнения (11) для уединенного вихря (сплошная линия) и его смещение при приближении слева соседнего вихря (штриховые).

больше, чем до левого, и, начиная с некоторого момента, расстояние до левого соседа переставало меняться, в то время как правый отодвигался все дальше. Это значение расстояния  $d$  регистрировалось. Далее та же процедура проводилась при другом значении  $\varphi_+$ . Из всех полученных таким образом расстояний  $d$  выбиралось наименьшее  $d_{\min}$ ; соответствующее распределение  $\varphi_m$  и являлось решением поставленной задачи.

Для отыскания отправных значений  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  рассмотрим поведение вихря по мере приближения к нему другого. В [10] показано, что для значений  $I \leq 1$  форма и энергия уединенного вихря удовлетворительно описываются выражениями, полученными в приближении  $I \ll 1$ , когда дискретный набор  $\varphi_m$  переходит в непрерывную функцию  $\varphi(z)$ , где  $z$  — координата, нормированная на размер ячейки  $h$ . Конечно, такой подход не позволяет найти силы пиннинга, поскольку они обусловлены именно дискретностью среды, но он достаточен для качественного анализа изменений формы вихря при приближении к нему другого вихря, пока расстояние между ними велико в сравнении с размером самого вихря. При этом система (5) переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = I \sin \varphi. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) для случая уединенного вихря приведено на рис. 3 (сплошные кривые). При приближении слева другого вихря той же ориентации первый вихрь начинает смещаться вправо (штриховые кривые на рис. 3). Из условия (5) на центральной ячейке вихря следует

$$\varphi_+ - \varphi_- \approx 2\pi - \varphi'_0 \sqrt{I}, \tag{12}$$

где  $\varphi'_0$  — значение производной  $\varphi'_z$  при  $z = 0$ .

Для уединенного вихря  $\varphi'_0 = 2$ . Поскольку второй вихрь находится далеко от первого, то можно считать,

что  $\varphi'_0$  мало отличается от 2. Поэтому условие (12) принимает вид

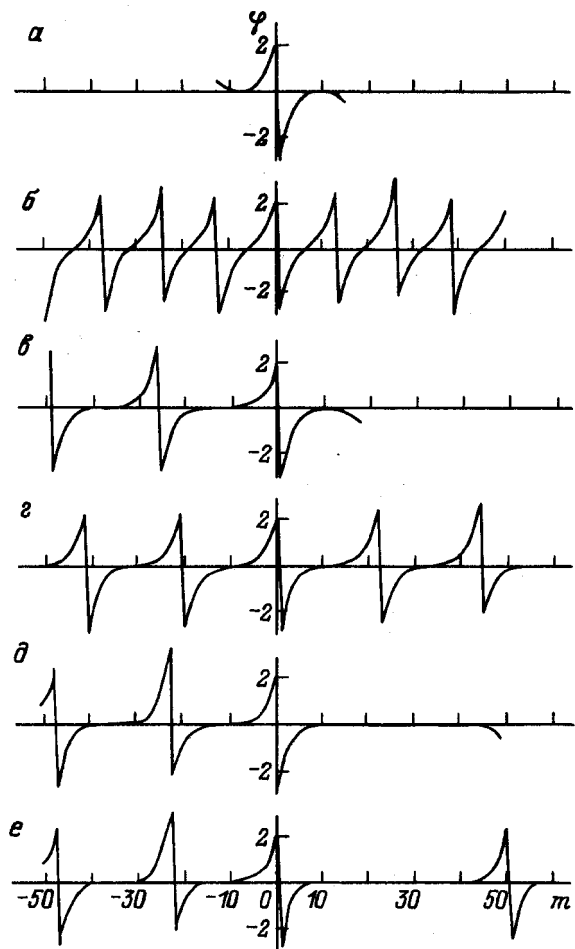
$$\varphi_+ - \varphi_- = 2\pi - 2\sqrt{I}. \tag{13}$$

Уединенный вихрь имеет 3 равновесных состояния [10]: 1) устойчивое:  $\varphi_+^s = -\varphi_-^s = \pi - \sqrt{I}$  (сплошная линия на рис. 3); 2) правое неустойчивое:  $\varphi_+^u = -\pi$ ,  $\varphi_-^u = \pi - 2\sqrt{I}$ ; 3) левое неустойчивое:  $\varphi_+^u = \pi$ ,  $\varphi_-^u = -\pi + 2\sqrt{I}$ .

Таким образом, значениям  $\varphi_+^s = \pi - \sqrt{I}$  и  $\varphi_-^u = \pi - 2\sqrt{I}$  соответствует бесконечно большое расстояние до соседнего вихря. При конечных расстояниях между вихрями  $\varphi_+$  находится между этими значениями. Из этого интервала и следует выбирать значения  $\varphi_+$  для численного расчета. Соответствующие отправные значения  $\varphi_-$  выбираются равными на основании (13)

$$\varphi_- = \varphi_+ + 2\sqrt{I} - 2\pi. \tag{14}$$

На рис. 4 приведены графики распределения  $\varphi_m$ , поясняющие вышеизложенный алгоритм. Расчеты произведены для  $I = 0.3$ ,  $\varphi_+ = 2.24$ , отправное значение



**Рис. 4.** Графики распределения  $\varphi_m$ .  $\varphi_- = -2.96$  (а),  $-2.95$  (б),  $-2.9524$  (в),  $-2.9523$  (г),  $-2.95235812$  (д),  $-2.95235811$  (е).

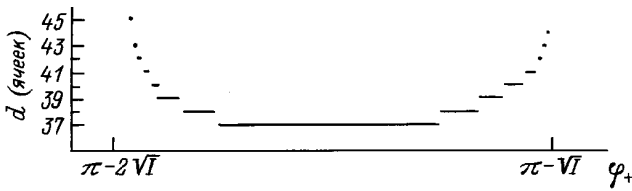


Рис. 5. Зависимость расстояния  $d$  между крайним вихрем и его соседом от значения  $\varphi_+$ .

$\varphi_- = -2.95$ . При  $\varphi_- = -2.95$  ближайшие вихри слева и справа от центрального вихря имеют ту же ориентацию, что и он. При  $\varphi_- = -2.96$  (а) и слева, и справа вихри приобретают противоположную ориентацию, что видно из соответствующих изгибов кривой на концах (при возникновении таких изгибов расчет прекращался). При  $\varphi_- = -2.95$  (б) и слева, и справа вихри приобретают нужную ориентацию. Значит, искомое значение  $\varphi_-$  лежит в интервале  $(-2.96, -2.95)$ . При  $\varphi_- = -2.9524$  (график в) вихрь справа имеет противоположную ориентацию, а при  $\varphi_- = -2.9523$  (график г) — уже нужную. Аналогично для графиков д и е. Из рис. 4 можно видеть, что с уточнением значения  $\varphi_-$  вихри отодвигаются от центрального влево и вправо (графики б и г), далее левый останавливается, а правый продолжает отодвигаться (г и е). На графике е правый вихрь настолько дальше от центрального, чем левый, что можно считать, что он уже не влияет на центральный, что подтверждается неизменностью картины слева от центра при изменении ориентации правого вихря, т.е. при смене притяжения на отталкивание (д и е). В результате при  $\varphi_+ = 2.24$  расстояние между левым и центральным вихрями равно 23 ячейкам.

Из результатов рис. 4 видно, что точность вычислений для решения поставленной задачи должна быть очень высокой: в некоторых случаях до 15-го знака после запятой.

На рис. 5 приведена зависимость расстояния  $d$  (в ячейках) от значения  $\varphi_+$  для  $I = 0.2$  (для других значений  $I$  картина аналогична). Минимальное возможное расстояние  $d_{\min}$  реализуется в широком диапазоне  $\varphi_+$ , что позволяет для нахождения  $d_{\min}$  выбрать, например,  $\varphi_+ = \pi - 1.5\sqrt{I}$ , т.е. в середине промежутка.

Отметим, что для значений  $I$  в диапазоне 0.5–1.3 при расчете с точностью до 15-го знака после запятой правый вихрь удален от центрального на 40–50 ячеек, при  $I = 0.3$  — на 70, при  $I = 0.2$  — на 90, при  $I = 0.1$  — на 120. Таким образом, можно считать, что справа от центрального вихря вихрей нет.

На рис. 6 показана зависимость  $d_{\min}$  от  $I$  в логарифмическом масштабе. Из линейности этой зависимости следует степенная зависимость

$$d_{\min} = 6.1 \cdot I^{-1.1}, \quad (15)$$

соблюдающаяся вплоть до значений  $I \approx 1$ .

### ”Критическое” состояние системы вихрей при монотонном увеличении внешнего поля

При малых внешних полях имеет место эффект Мейснера, поле выталкивается из образца за счет поверхностных токов, вихрей нет. При некотором значении поля образование вихрей становится энергетически выгодным и вблизи границы образуется первый вихрь. Пиннинг мешает ему продвигаться внутрь образца. При дальнейшем росте поля у границы образуется следующий вихрь, который отталкивает первый вихрь на минимально возможное расстояние  $d_{\min}$ . Далее возникает третий вихрь, вследствие чего первые два продвигаются внутрь и располагаются на соответствующих расстояниях, и т.д. Согласно модели Бина, в критическом состоянии все вихри находятся на грани движения, что означает уменьшение расстояния между вихрями (т.е. увеличение среднего поля  $B$ ) по мере приближения к границе. Наконец, возникает ситуация, когда силы отталкивания вихрей, даже находящихся в соседних ячейках, недостаточно для того, чтобы сдвинуть вихрь, пересилив отталкивание от вихрей с другой стороны. Тогда с ростом внешнего поля в ближайший к границе вихрь проникает еще один квант потока  $\Phi_0$ , что приводит к увеличению сил отталкивания до величины, достаточной для того, чтобы сдвинуть предыдущий вихрь. При дальнейшем росте поля и продвижении всей решетки вихрей вглубь новые приграничные вихри будут содержать все большее количество квантов  $\Phi_0$ , в результате чего эффективное магнитное поле будет возрастать по мере приближения к границе образца. Так выглядит ситуация в рамках модели Бина. Однако в настоящем разделе мы покажем, что описанная модель несправедлива при  $I < 1.3$ .

Рассмотрим ”критическое” состояние решетки вихрей, когда наиболее удаленный от границы вихрь находится на грани перехода в соседнюю ячейку. Легко понять,

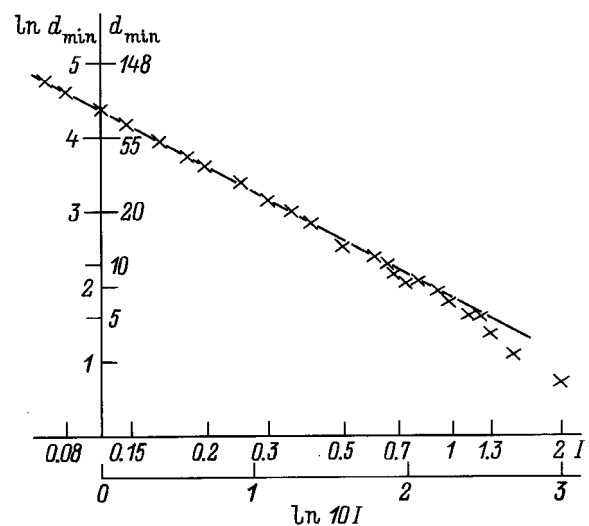
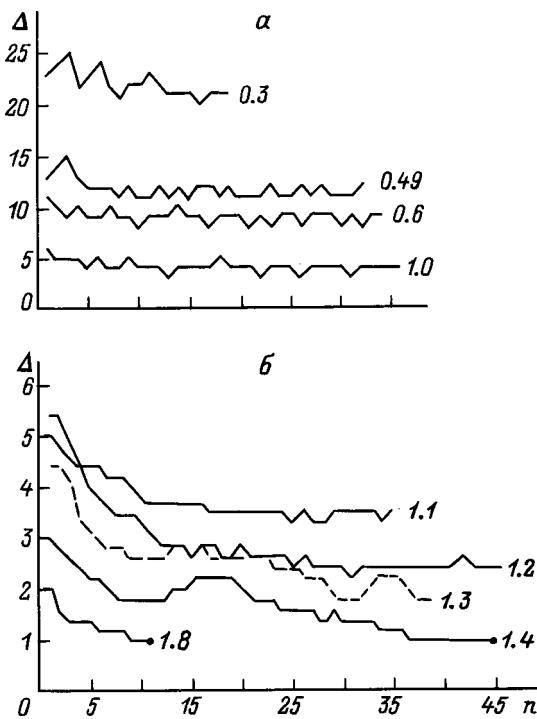


Рис. 6. Зависимость  $d_{\min}$  (в ячейках) от  $I$ . Крестики — рассчитанные значения.



**Рис. 7.** Результаты расчета расстояний  $\Delta$  от  $(n-1)$ -го вихря до  $n$ -го в "критическом" состоянии для различных значений  $I$  (а) и результаты усреднения величины  $\Delta$  по пяти последовательным вихрям (б). Цифры у кривых — значения  $I$ .

что именно с него должно начинаться продвижение всей решетки вихрей вглубь.

В предыдущем разделе мы нашли диапазон значений  $\varphi_+$ , соответствующий наименьшему расстоянию  $d_{\min}$  до соседнего вихря. Варьируя  $\varphi_+$ , минимизируем расстояние до следующего вихря. Повторяя ту же процедуру, многократно и последовательно сужая диапазон  $\varphi_+$ , можно найти искомое "критическое" состояние решетки вихрей, возникающее при монотонном увеличении внешнего поля  $H_e$ . Вычисления с точностью до 15-го знака после запятой позволяют найти положение 20–50 вихрей (в зависимости от  $I$ ).

На рис. 7,а приведены результаты компьютерного расчета расстояний  $\Delta$  (в ячейках) от  $(n-1)$ -го вихря до  $n$ -го (крайний вихрь имеет номер 0, следующий — 1, и т.д.) для самых "сгущающихся" к границе конфигураций при различных значениях  $I \leq 1$ . При  $I > 1$  расстояния  $\Delta$  равны нескольким ячейкам (при  $I = 1.2$   $\Delta = 2-3$ ) и флуктуации величиной в 1–2 ячейки не позволяют увидеть закономерность из рис. 7,а. На рис. 7,б приведены результаты усреднения величины  $\Delta$  по пяти соседним вихрям

$$\bar{\Delta}(n) = 0.2 \sum_{i=0}^4 \Delta(n+i). \quad (16)$$

Из графиков рис. 7 можно сделать следующие выводы.

1) При  $I \geq 1.4$  усредненное расстояние между вихрями  $\bar{\Delta}$  с ростом  $n$  монотонно убывает до 1. Далее

центры вихрей располагаются в соседних ячейках. При дальнейшем приближении к границе образца количество квантов потока  $\Phi_0$  в вихре начинает увеличиваться. Точками на рис. 7,б отмечено положение первого вихря, число квантов  $\Phi_0$  в котором равно 2. Из этого следует, что при  $I \geq 1.4$  предложенный подход, основанный на концепции отдельных взаимодействующих вихрей, неприменим. Этот случай требует специального анализа.

2) При  $I \leq 1.3$  усредненное расстояние  $\bar{\Delta}$ , как следует из рис. 7,б и а, не уменьшается до 1. Претерпев изменения при малых  $n$ , т.е. вблизи края структуры, величина  $\bar{\Delta}$  выходит на насыщение: она остается примерно постоянной, незначительно флуктуируя около среднего значения. В этом диапазоне  $I$  при монотонном возрастании внешнего поля вихри, содержащие более одного кванта  $\Phi_0$ , не образуются. Поскольку величина среднего расстояния между вихрями  $\bar{\Delta}$  не зависит от расстояния до границы, то и индукция магнитного поля внутри образца, в области, куда проникли вихри, также не зависит от координаты. Этот факт, противоречащий модели Бина, объясняется тем, что все вихри сразу не находятся на "границе движения", как это предполагается в модели Бина. Когда крайний вихрь смещается в соседнюю ячейку, его сосед еще остается на месте, для его движения вся решетка вихрей должна слегка сместиться внутрь, так же дело обстоит со следующим вихрем и т.д. Эту ситуацию можно пояснить на следующем примере: пусть в системе периодически расположенных углублений лежит цепочка массивных шаров, связанных между собой слегка сжатыми пружинами. Приложив силу вдоль поверхности, эту цепочку можно сдвинуть. При переходе крайнего шара в соседнее углубление его сосед остается на месте, он сдвинется позже, следующий еще позже и т.д. Цепочка будет продвигаться не как единое целое, а отдельными шарами по очереди. Таким образом, для перемещения цепочки надо преодолеть силу пиннинга одного или нескольких шаров, а не всех шаров цепочки. Легко понять, что степень сжатия может заметно отличаться лишь в нескольких ближайших к краю пружинах. При удалении от края ситуация усредняется и монотонного увеличения сжатия пружин при приближении к краине образца, как это было бы при одновременном движении шаров, не будет.

Среднюю магнитную индукцию можно найти, разделив магнитный поток через площадку  $h \times h\Delta$ , соответствующий одному вихрю и равный  $\Phi_0$ , на ее площадь

$$B = \Phi_0/h^2\Delta. \quad (17)$$

Найдем внешнее поле  $H_e$ , при котором в образце начинают возникать вихри. Термодинамический потенциал Гиббса единицы объема равен

$$G = N_b E_0/h - B H_e/2 = 0.5B(H_c - H_e), \quad (18)$$

где  $N_b$  — число плоских вихрей на 1 метр, т.е.  $B = \Phi_0/S = N_b\Phi_0/h$ ;  $E_0$  — средняя энергия одного вихря,

$$H_c = 2E_0/\Phi_0. \quad (19)$$

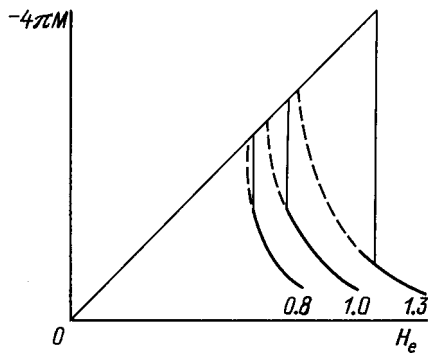


Рис. 8. Кривые намагничивания образца на основе данных таблицы.

При  $H_e < H_c$   $G$  растет с ростом  $B$ , т.е.  $G$  имеет минимум при  $B = 0$  — полный эффект Мейсснера. При  $H_e > H_c$  с ростом  $B$  убывает  $G$ , т.е. становится выгодным возникновение вихрей. При этом вихри заполняют сразу все сечение образца. Плотность вихрей определяется внешним полем и взаимодействием между ними. Она может быть рассчитана при учете в потенциале Гиббса энергий взаимодействия вихрей друг с другом (например, [11]). В результате расчета можно получить кривую намагничивания образца. Она будет иметь типичный для сверхпроводников 2-го рода вид (рис. 8). Учет пиннинга приводит к росту  $H_c$  и к возникновению резкого скачка на кривой, обусловленного тем фактом, что вихревая решетка в образце не может иметь период больше того, который соответствует критическому состоянию (рис. 7). При  $H_e = H_c$  поле в образце скачком меняется с нуля до  $H_0/\bar{\Delta}$ , где  $\bar{\Delta}$  — усредненный период решетки,  $H_0 \equiv \Phi_0/\mu_0 h^2$  — величина внешнего поля, при котором через каждую ячейку  $h \times h$  проходит поток  $\Phi_0$ . При  $I < 0.5$  можно считать, что  $\bar{\Delta}$  примерно соответствует  $d_{\min}$  из (15), а энергия на 1 метр высоты и длины вихря приближенно равна [10]

$$E_0 = 8\sqrt{I}\epsilon_0 = 2\Phi_0^2\sqrt{I}/\pi^2\mu_0 h^2. \quad (20)$$

При этом величина  $-4\pi M = H_e - B$  скачком уменьшается от  $4\sqrt{I}H_0/\pi^2$  до  $(4\sqrt{I}/\pi^2 - I^{1.1}/6.1)H_0$ . При  $I \ll 1$  расстояние между вихрями много больше размера вихря, поэтому энергия взаимодействия вихрей мала в сравнении с собственной энергией изолированного вихря. Поэтому величина  $H_c$  практически не изменяется в сравнении со случаем отсутствия пиннинга, а скачок  $4\pi M$  мал, т.е. пиннинг почти не влияет на вид кривой намагничивания. При  $I \gtrsim 1$  изменения кривой намагничивания становятся заметными.

В таблице приведены значения средних расстояний между вихрями  $\bar{\Delta}$ , численно рассчитанных средних энергий

$I$	$\bar{\Delta}$	$E_0$	$E_{0\text{уед}}$	$H_c$	$\Delta(4\pi M)$
0.8	6	$7.16\epsilon_0$	$7.09\epsilon_0$	$0.36H_0$	$0.17H_0$
1.0	4	$8.60\epsilon_0$	$7.80\epsilon_0$	$0.44H_0$	$0.25H_0$
1.3	2	$12.1\epsilon_0$	$8.90\epsilon_0$	$0.61H_0$	$0.50H_0$

$E_0$ , приходящихся на 1 вихрь, и энергий уединенного вихря  $E_{0\text{уед}}$  [10], а также значения критических полей  $H_c = 2E_0/\Phi_0 = E_0H_0/2\pi^2\epsilon_0$  и скачка  $\Delta(4\pi M) = H_0/\bar{\Delta}$  при учете пиннинга для значений  $I = 0.8, 1, 1.3$ .

На рис. 8 приведены кривые намагничивания, построенные на базе данных таблицы. Штриховые кривые соответствуют отсутствию пиннинга для выбранных значений  $I$  (цифры у кривых).

## Заключение

Рассмотрено поведение плоских (ламинарных) вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, представляющей собой кубическую решетку, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт. Ячеистость среды приводит к возникновению пиннинга, определяющегося величиной энергии, необходимой для перемещения центра вихря в соседнюю ячейку.

1. Показано, что расстояние между двумя покоящимися изолированными вихрями одинаковой ориентации может варьироваться от бесконечности до некоторого минимального значения. Этот факт является следствием пиннинга, так как при его отсутствии взаимодействие между вихрями развело бы их на бесконечность. С ростом параметра  $I$  (пропорционального критическому току контактов и размеру ячейки) пиннинг увеличивается, а отталкивание между вихрями уменьшается, в результате чего минимальное расстояние между вихрями убывает. При  $I > 2.9$  центры вихрей могут располагаться даже в соседних ячейках.

2. Для нахождения кривой намагничивания образца рассмотрена система вихрей, образующаяся в образце при монотонном увеличении внешнего магнитного поля. Наименьшее расстояние от ближайшего соседа зависит от  $I$  степенным образом  $d_{\min} \approx 6.1 \cdot I^{-1.1}$ .

3. При  $I \geq 1.4$  среднее расстояние между вихрями  $\bar{\Delta}$  при приближении к границе убывает до 1 ячейки, далее центры вихрей располагаются в соседних ячейках. При дальнейшем приближении к границе количество квантов потока  $\Phi_0$  в вихрях начинает расти. При этих значениях  $I$  концепция отдельных взаимодействующих вихрей теряет смысл. Этот случай требует специального рассмотрения.

4. При  $I \leq 1.3$  величина  $\bar{\Delta}$  не убывает по мере приближения к границе, она остается примерно постоянной, из чего следует независимость магнитного поля от координаты в области, куда проникли вихри.

5. Кривая намагничивания образца при  $I \leq 1.3$  имеет вид, типичный для сверхпроводников 2-го рода. Учет пиннинга приводит к росту критического поля  $H_c$  и возникновению резкого скачка на кривой, обусловленного тем, что решетка вихрей не может иметь период больше того, который соответствует рассчитанному критическому состоянию.

На основе перечисленных фактов можно сделать вывод о том, что в ситуации взаимодействующих вихрей, содержащих не более одного кванта потока  $\Phi_0$ , для пиннинга, связанного с ячеистостью среды, модель Бина несправедлива.



## Список литературы

- [1] *Been C.P.* // Rev. Mod. Phys. 1969. Vol. 36. P. 31–40.
- [2] *Kim Y.B., Anderson P.W.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 39–60.
- [3] *Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R.* // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 158. P. 69–84.
- [4] *Lam Q.H., Kim Y., Jeffries C.D.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42. P. 4848–4857.
- [5] *Kivshar Y.S., Malomed B.A.* // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 61. P. 763–780.
- [6] *Брыксин В.В., Дороговцев С.Н.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1025–1033..
- [7] *Parodi F., Vaccarone R.* // Physica C. 1991. Vol. 173. P. 56–63.
- [8] *Зеликман М.А.* // СФХТ. 1992. Т. 5. № 1. С. 60–72.
- [9] *Зеликман М.А.* // СФХТ. 1992. Т. 5. № 10. С. 1819–1829.
- [10] *Зеликман М.А.* // СФХТ. 1994. Т. 7. № 6. С. 946–957.
- [11] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. С. 270.