

01;05

Нелинейная динамика критического состояния в жестких сверхпроводниках и композитах на их основе

© В.Р. Романовский

Российский научный центр "Курчатовский институт",
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 18 декабря 1995 г.)

В рамках модели критического состояния исследована нелинейная динамика магнитного потока внутри сверхпроводящей пластины при непрерывном увеличении ее температуры на протяжении всего процесса ввода магнитного поля. Результаты численного моделирования, выполненные на основе разработанного метода решения системы уравнений Фурье и Максвелла с неизвестной внутренней границей проникновения магнитного потока, сопоставлены с соответствующими аналитическими выражениями изотермической теории. Показано, что различие между изотермической и неизотермической моделями увеличивается при уменьшении коэффициента теплоотдачи, при увеличении скорости нарастания внешнего магнитного поля и поперечного размера сверхпроводника. Появляющиеся при этом ошибки изотермического приближения весьма существенны в случае теплоизолированного массивного проводника. Вследствие этого расчетные значения тепловых потерь, выделяемые за время, предшествующее скачку магнитного потока, в изотермическом приближении могут быть значительно ниже соответствующих неизотермических значений.

Введение

Как известно, жесткий сверхпроводник в ответ на любое внешнее воздействие, приводящее к появлению в нем электрического поля, переходит в критическое состояние [1]. Изучение динамики критического состояния лежит в основе решения ряда фундаментальных проблем физики сверхпроводников и композитных структур на их основе, представляющих собой регулярную композицию большого числа жил из жесткого сверхпроводника в нормально проводящей матрице. С использованием этой концепции была развита теория термомагнитной неустойчивости [2–4], которая позволяет определить условия стабильности сверхпроводящего состояния по отношению к бесконечно малым возмущениям. В [5–8] изложены результаты многочисленных исследований потерь энергии в сверхпроводниках, условий возникновения неустойчивостей различной природы, проведенных в рамках линейного приближения, предполагающего незначительное повышение температуры сверхпроводника. Линейные модели значительно упрощают исходную систему уравнений, с помощью которой описывается динамика критического состояния. Однако при этом из внимания упускается влияние ряда факторов (например, особенности теплообмена проводника с хладагентом, характер изменения внешнего магнитного поля и др.), на формирование температурного поля в сверхпроводнике, предшествующего возникновению неустойчивости. В то же время в [9] показано, что вариация фоновой температуры сверхпроводника играет существенную роль в условиях стабильности критического состояния. Причем априорное задание его начальной температуры будет искажать результаты анализа границы устойчивых состояний.

Следует также отметить, что существующие немногочисленные исследования проблемы устойчивости кри-

тического состояния в неизотермическом приближении [10–14] не только не позволяют сформулировать общие закономерности допустимого увеличения температуры сверхпроводника, но и в силу неадекватной оценки роли температурного фактора в возникновении неустойчивости содержат ряд ошибочных результатов. Так, согласно [13], зависимость тока срыва от скорости его ввода немонотонна. Решение этой проблемы с точки зрения существования связи между допустимым нагревом композита и скоростью ввода в него тока [15] не подтверждает этот вывод: при увеличении скорости ввода предельный ток монотонно уменьшается, приближаясь к своему адиабатическому пределу. В [14] при определении условий адиабатической устойчивости получен критерий, согласно которому учет влияния фоновой температуры сверхпроводника приводит к уменьшению области устойчивых состояний по сравнению с известным изотермическим критерием. Однако анализ адиабатических условий стабильности критического состояния, выполненный в предположении существования конечного допустимого повышения температуры сверхпроводника [9], показывает противоположную тенденцию — изотермический критерий устойчивости накладывает избыточно сильные ограничения на параметры сверхпроводника по сравнению с соответствующим неизотермическим условием устойчивости.

Таким образом, корректное исследование динамики критического состояния следует выполнять на основе анализа процессов непрерывного изменения температурного и электромагнитного полей внутри сверхпроводника. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования процессов неизотермической диффузии магнитного потока в сверхпроводящую пластину в случае нарастания внешнего однородного магнитного поля с постоянной скоростью.

Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим простейшую задачу о проникновении магнитного потока внутрь охлаждаемой плоскопараллельной сверхпроводящей пластины, находящейся во внешнем однородном магнитном поле, параллельном его поверхности и нарастающим с постоянной скоростью. Будем определять распределение температуры в поперечном сечении пластины, охлажденной в начальный момент до температуры хладагента T_0 , из решения уравнения теплопроводности вида

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_p, \\ EJ, & x_p < x < a, \end{cases} \quad (1)$$

в котором размер тепловыделяющей области и плотность джоулевых потерь зависят от глубины проникновения магнитного потока $x_p(t)$, описываемой уравнением его непрерывности

$$\mu_0 \int_{x_p}^a J(x, t) dx = \frac{dB}{dt} t, \quad (2)$$

а также соответствующего распределения плотности экранирующего тока, электрического и магнитного полей, удовлетворяющих системе уравнений ($x_p < x < a$, $t > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \mu_0 J, & \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial B}{\partial t}, \\ J &= \eta J_C + \frac{1}{\rho} E. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c — объемная теплоемкость пластины, λ — коэффициент ее теплопроводности, a — полуширина пластины, ρ — удельное электросопротивление пластины, η — коэффициент заполнения пластины сверхпроводником, J_C — критическая плотность тока сверхпроводника.

Для упрощения анализа получаемых результатов предполагается, что J_C зависит только от температуры

$$J_C = J_{C0} \frac{T_{CB} - T}{T_{CB} - T_0} \quad (J_{C0}, T_{CB} - \text{const}).$$

Поставим системе (1)–(3) начально-краевые условия вида

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0, & B(x, 0) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) + h(T(a, t) - T_0) &= 0, & B(a, t) &= \frac{dB}{dt} t, \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) &= 0, & B(x_p, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (1)–(4) описывает диссипативный процесс диффузии магнитного потока, в результате которого в соответствии с моделью критического состояния экранирующие токи проникают в пластину с ее поверхности и существуют только в области $x_p < x < a$. Записанная система уравнений позволяет в рамках одномерной модели сплошной среды исследовать динамику

критического состояния как в жестком сверхпроводнике, так и сверхпроводящем композите в предположении, что сверхпроводник равномерно распределен по сечению пластины. В первом случае следует положить $\eta = 1$, а во втором расчетную модель дополнить так называемыми соотношениями смеси [16]

$$\begin{aligned} c &= \eta c_s + (1 - \eta) c_m, & \frac{1}{\rho} &= \frac{\eta}{\rho_s} + \frac{1 - \eta}{\rho_m}, \\ \lambda &= \lambda_m \frac{(1 - \eta) \lambda_m + (1 + \eta) \lambda_s}{(1 + \eta) \lambda_m + (1 - \eta) \lambda_s}, \end{aligned}$$

в которых индексы s и m относятся к сверхпроводнику и матрице соответственно.

Граничные условия учитывают конвективный теплообмен пластины и хладагента с заданным коэффициентом теплоотдачи h и нарастание внешнего магнитного поля с постоянной скоростью dB/dt . Наличие особого условия (2), в которое входит движущаяся неизвестная граница проникновения магнитного потока, делает задачу (1)–(4) существенно нелинейной даже в том случае, когда линейны как исходные дифференциальные уравнения, так и граничные условия. При этом неявная форма записи закона изменения во времени $x_p(t)$ усложняет использование известных методов решения уравнений параболического типа для многофазных областей с неизвестной границей раздела сред. Поэтому для ее решения был разработан численный метод, учитывающий специфику рассматриваемой проблемы. Он основывался на алгоритме сквозного счета разностного аналога системы (1)–(4), аппроксимирующего искомые значения температуры, напряженности электрического поля и магнитной индукции на пространственно-временной сетке с неявным шаблоном [17]. При этом для определения x_p использовалась итерационная процедура, основанная на существовании корня нелинейного уравнения (2), в котором x_p является искомой величиной. В рамках данной методики проводимые вычисления заключаются в отделении, а затем в уточнении корня уравнения (2). На первом этапе значение x_p для каждого нового шага по времени предполагается известным (соответствующая величина берется либо с предыдущего шага по времени, либо с предыдущей итерации). После выполнения необходимых вычислений для каждого последующего номера итерации $s = 1, 2, \dots$ находится знак выражения

$$r^{(s)} = \mu_0 \int_{x_p^{(s)}}^a J(x, t) dx - \frac{dB}{dt} t.$$

Исходя из простого физического смысла уравнения (2), нетрудно понять, что в случае, когда $x_p^{(s)}$ больше истинного значения x_p , то знак $r^{(s)}$ будет отрицательным. И наоборот, если $x_p^{(s)} < x_p$, то $r^{(s)} > 0$. Поэтому этап отделения корня прерывается, как только знак $r^{(s)}$ для двух последовательных итераций меняется на противоположный. После этого нетрудно выполнить уточнение корня с заданной точностью, лежащего в интервале

$$x_p^{(s)} | r^{(s)} < x_p < x_p^{(s-1)} | r^{(s-1)}.$$

Поскольку при определении сеточных функций использовалась неявная разностная схема, то выбор шагов как по времени, так и по пространству определяется только соображениями точности. Поэтому на начальном этапе ввода магнитного поля шаг по времени с целью экономии расчетного времени может быть выбран крупным. Перед возникновением неустойчивости его необходимо уменьшить, так как этот процесс имеет лавинообразный характер и протекает весьма интенсивно (реально расчетный процесс выполняется в два этапа, в начале вычисления проводятся с крупным шагом по времени, а затем перед возникновением неустойчивости они повторяются с более мелким шагом, используя уже полученные результаты).

Изложенный алгоритм без существенных затруднений воспроизводится при анализе динамики критического состояния в сверхпроводниках цилиндрической формы, находящихся в изменяющихся продольном или поперечном внешнем магнитном поле, а также при определении границ их метастабильных состояний при вводе тока.

Результаты численных экспериментов

Для верификации предложенного метода решения результаты численного моделирования сопоставлялись с известными аналитическими выражениями, которые следуют из изотермической модели [5–8]. В частности, для плоскопараллельной пластины нетрудно записать формулы, описывающие изменение во времени границы проникновения экранирующих токов и выделяемой в процессе диффузии магнитного потока объемной плотности тепловых потерь. В терминах настоящей работы

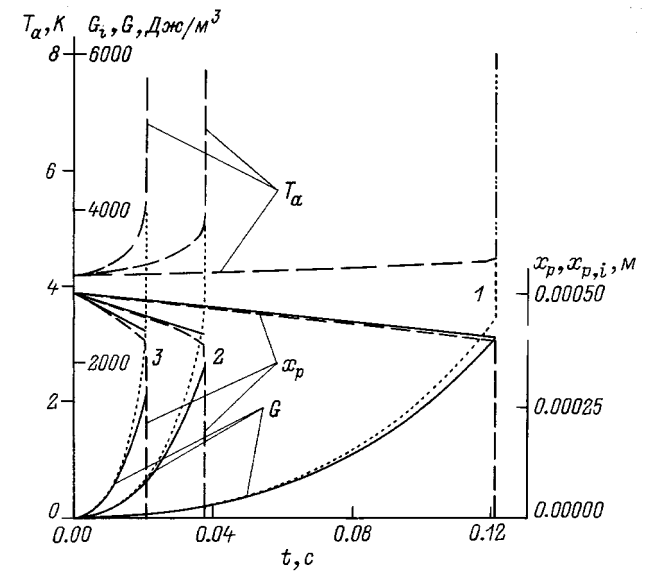


Рис. 2. Зависимость от времени температуры, глубины проникновения и тепловых потерь при различных скоростях ввода внешнего магнитного поля в охлаждаемый сверхпроводящий композит ($h = 100 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$). $dB/dt, \text{Тл/с}$: 1 — 2, 2 — 6, 3 — 10.

данные зависимости описываются выражениями

$$x_{p,i}(t) = a - \frac{dB/dt t}{\mu_0 \eta J_{c0}}, \quad G_i(t) = \frac{(dB/dt)^3 t^3}{6\mu_0^2 \eta J_{c0} a}.$$

На рис. 1 представлены результаты соответствующих аналитических (сплошные линии) и численных (штриховые линии) расчетов температуры поверхности охлаждаемой пластины, глубины проникновения и тепловых потерь

$$G = \frac{1}{a} \int_0^t \int_{x_p}^a EJ dx dt.$$

При проведении вычислений исходные параметры принимались равными: $a = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $c = 10^3 \text{ Дж/м}^3 \cdot \text{К}$, $\lambda = 200 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, $h = 10 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, $dB/dt = 10^{-3} \text{ Тл/с}$, $\eta = 0.5$, $\rho_m = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_s = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $J_{c0} = 4 \cdot 10^9 \text{ А/м}^2$, $T_{CB} = 9 \text{ К}$, $T_0 = 4.2 \text{ К}$. Они описывают усредненные тепло- и электрофизические параметры ниобий-титанового сверхпроводника в медной матрице, охлаждаемого жидким гелием.

Как следует из рис. 1, при наличии охлаждения и весьма малой скорости изменения внешнего магнитного поля температура пластины вплоть до возникновения неустойчивости — скачка магнитного потока — повышается незначительно. Поэтому на данном этапе диффузии магнитного потока используемая конечно-разностная аппроксимация и аналитические вычисления совпадают с хорошей степенью точности. Однако расчет динамики критического состояния после развития неустойчивости по изотермической и неизотермической моделям имеет существенное расхождение. Нетрудно понять, что в основе этого различия лежит взаимное влияние друг на

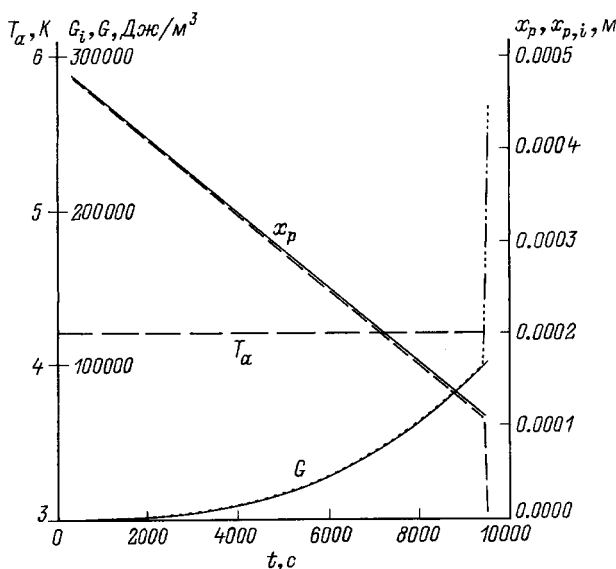


Рис. 1. Зависимость от времени температуры, глубины проникновения и тепловых потерь при медленном вводе внешнего магнитного поля в охлаждаемый сверхпроводящий композит.

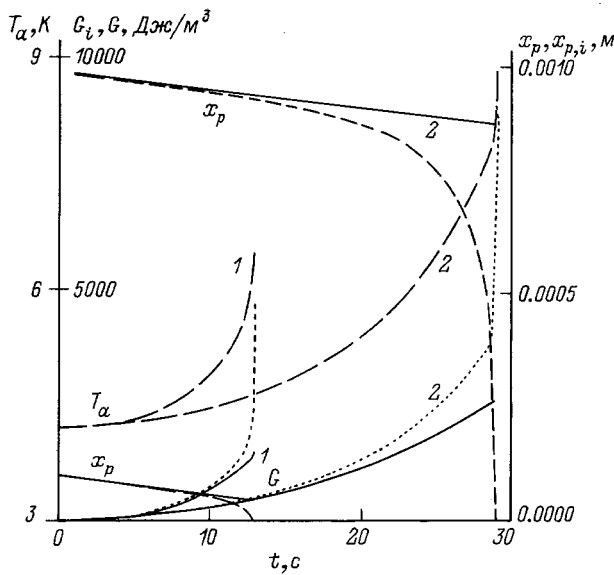


Рис. 3. Зависимость от времени температуры, глубины проникновения и тепловых потерь у неохлаждаемого сверхпроводящего композита при $dB/dt = 0.01$ Тл/с, $h = 0$; $a = 10^{-4}$ (1), $a = 10^{-3}$ (2).

друга протекающих внутри пластины соответствующих процессов изменения теплового и электромагнитного полей. В результате, как наглядно показано на рис. 1, развитие неустойчивости характеризуется практически мгновенным заполнением экранирующими токами всего поперечного сечения композита. Вследствие этого его температура резко повышается, что приводит к последующему уменьшению плотности экранирующих токов. Поэтому конечным результатом скачка магнитного потока может быть разрушение образцом сверхпроводящих свойств.

Отличие между изотермической и неизотермической моделями может иметь место и на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока. На рис. 2, 3 построены кривые, описывающие изменение во времени температуры композита, глубины проникновения магнитного потока и тепловые потери в зависимости от величины коэффициента теплоотдачи, скорости нарастания магнитного поля, толщины пластины. Видно, что при уменьшении h , увеличении dB/dt и a повышение температуры композита происходит более интенсивно. В результате этого соответствующие зависимости $x_p(t)$ и $G(t)$, полученные в неизотермическом приближении (штриховые кривые), в большей степени отклоняются от своих изотермических значений (сплошные кривые). Поскольку ошибка, вносимая предположением о изотермичности, увеличивается со временем, то ее значение перед возникновением неустойчивости может быть весьма значительной. Так, расхождение между расчетными значениями тепловых потерь при высоких скоростях нарастания магнитного поля может достигать 100% даже в случае охлаждаемого композита. Так как у неохлаждае-

мых токонесущих элементов влияние неизотермичности на протекающие процессы сказывается в большей степени, то подобные ошибки будут иметь место у массивных сверхпроводящих композитов даже при относительно малой скорости изменения внешнего магнитного поля (рис. 3).

Приведенные на рис. 1–3 результаты расчетов были получены для композита с высокотеплопроводной матрицей. Как известно, ее низкая электропроводность оказывает демпфирующее влияние на условия возникновения неустойчивости. Поэтому при наличии плохопроводящей матрицы неизотермическая диффузия магнитного потока до и в особенности после возникновения неустойчивости может иметь более нелинейный характер. Для иллюстрации сказанного на рис. 4 приведены штриховые кривые, описывающие динамику глубины проникновения магнитного потока и тепловых потерь в наиболее неблагоприятном случае с точки зрения изменения теплового состояния пластины — в жестком теплоизолированном сверхпроводнике без стабилизирующей матрицы ($\eta = 1$). Исходные параметры принимались равными $a = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $c = 30 T^3$ Дж/м³ · К, $\lambda = 0.0075 T^{1.8}$ Вт/м · К, $h = 0$ ВТ/м² · К, $dB/dt = 0.01$ Тл/с, $\rho_s = 5 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, $J_{C0} = 4 \cdot 10^9$ А/м², $T_{CB} = 9$ К, $T_0 = 4.2$ К. Здесь же сплошными линиями показаны соответствующие зависимости, которые следуют из изотермической модели. Нетрудно заметить, что по сравнению с линейным приближением нелинейная динамика критического состояния характеризуется более интенсивным проникновением магнитного потока внутрь сверхпроводника. Поэтому его неизотермическое состояние, с одной стороны, способствует равномерному распределению экранирующих токов по сечению сверхпроводника, но, с другой стороны, приво-

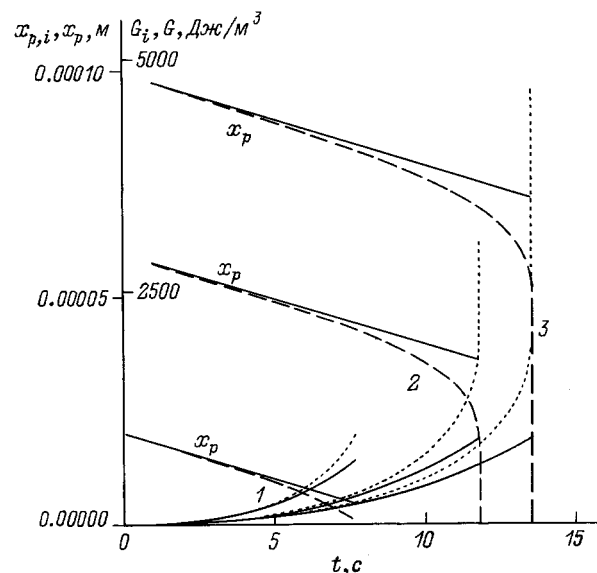


Рис. 4. Зависимость от времени глубины проникновения и тепловых потерь у неохлаждаемого сверхпроводника при $dB/dt = 0.01$ Тл/с, $h = 0$. a , м: 1 — $2 \cdot 10^{-5}$, 2 — $6 \cdot 10^{-5}$, 3 — 10^{-4} м.

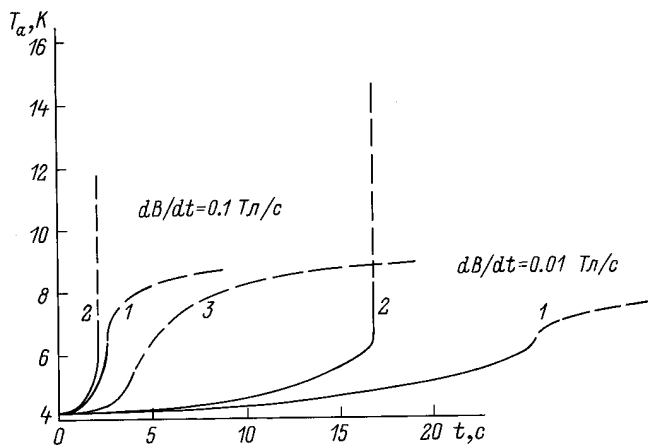


Рис. 5. Увеличение температуры поверхности теплоизолированного сверхпроводника при различных зависимостях теплоемкости от температуры. 1 — $c(T) = 30T^3$ Дж/(м³ · К), 2 — $c = c(T)|_{T=4.2\text{К}}$, 3 — $c = c(T)|_{T=9\text{К}}$.

дит к увеличению уровня тепловых потерь. Принимая при этом во внимание соответствующее уменьшение плотности критического тока, следует ожидать, что в адиабатических условиях тепловая предыстория сверхпроводника может оказать существенное влияние на условия возникновения и развития неустойчивости. На рис. 5 показаны результаты расчета температуры поверхности жесткого сверхпроводника ($a = 10^{-4}$ м) для различных функциональных зависимостей теплоемкости от температуры. Сплошные линии описывают увеличение температуры в случаях, когда экранирующие токи не полностью заполнили сечение пластины ($0 < x_p(t) < a$), штриховые — после полного проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводника ($x_p(t) = 0$). Приведенные результаты наглядно демонстрируют, что переход от одной расчетной зависимости теплоемкости от температуры к другой изменяет не только вид кривых $T_a(t)$, но и влияет на конечное значение температуры, до которой он нагревается на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока. В соответствии с этим видоизменяются и результаты расчета границы устойчивости критического состояния жесткого сверхпроводника, находящегося в адиабатических условиях.

Таким образом, отличительной чертой неизотермического теплового состояния жестких сверхпроводников и композитов на их основе является более интенсивное проникновение магнитного потока внутрь образца. Поэтому учет температурного фактора при анализе динамики критического состояния приводит к более равномерному распределению экранирующих токов по сечению сверхпроводника. Но в то же время при расчете тепловых потерь ошибки изотермического приближения увеличиваются. В наибольшей степени эти закономерности имеют место при отсутствии охлаждения, высоких скоростях изменения внешнего магнитного поля и увеличении поперечного размера провода. Это необходимо

учитывать при разработке крупных сверхпроводящих магнитных систем и прежде всего с плохо охлаждаемыми массивными токонесущими элементами, находящимися в быстроизменяющихся магнитных полях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-03527а).

Список литературы

- [1] *Bean C.P.* // *Rev. Mod. Phys.* 1964. Vol. 3. N 1. P. 31–39.
- [2] *Wipf S.L.* // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 161. N 2. P. 404–416.
- [3] *Swartz P.S., Bean C.P.* // *J. Appl. Phys.* 1968. Vol. 39. N 11. P. 4991–4998.
- [4] *Кремлев М.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. Вып. 6. С. 312–316.
- [5] *Брехна Г.* Сверхпроводящие магнитные системы. М.: Мир, 1976. 704 с.
- [6] *Альтов В.А., Зенкевич В.Б., Кремлев М.Г., Сычев В.В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
- [7] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
- [8] *Гуревич А.В., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [9] *Романовский В.Р.* // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. Вып. 10. С. 671–677.
- [10] *Morton N., Darby M.I.* // *Cryogenics.* 1973. Vol. 13. N 4. P. 232–235.
- [11] *Bussiere J.F., LeBlanc M.A.R.* // *J. Appl. Phys.* 1975. Vol. 46. N 1. P. 406–415.
- [12] *Gijsbertse E.A., van de Klundert L.J.M., van Weezep W.J.* // *Cryogenics.* 1981. Vol. 21. N 7. P. 419–425.
- [13] *Klimenko E.Yu., Martovetsky N.N.* // *IEEE Trans. Mag.* 1988. Vol. 24. N 2. P. 1167–1169.
- [14] *Клименко Е.Ю., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. 1989. Т. 2. № 11. С. 152–165.
- [15] *Keilin V.E., Romanovskii V.R.* // *Cryogenics.* 1993. Vol. 33. N 10. P. 986–994.
- [16] Волокнистые композиционные материалы // Под ред. Дж. Уитона. М.: Металлургия, 1978. 150 с.
- [17] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.