

01;03

Неустойчивость заряженного слоя вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра

© А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 10 апреля 1996 г.)

Введено и проанализировано дисперсионное уравнение для спектра капиллярных движений сферического слоя вязкой жидкости, покрывающей твердое сферическое ядро слоем конечной толщины. Показано, что наличие двух механизмов вязкой диссипации энергии капиллярных движений жидкости — затухание в объеме слоя и на твердом ядре приводит к ограничению спектра реализующихся капиллярных движений жидкости как со стороны высоких, так и со стороны низких мод. При фиксированном заряде системы, закритическом для нескольких первых мод капиллярных движений, максимальными инкрементами при малом размере твердого ядра обладают моды из середины диапазона неустойчивых мод, в тонких же слоях жидкости максимальные инкременты имеют наиболее высокие из неустойчивых мод. Это указывает на различия в реализации неустойчивости заряженной поверхности сферического слоя при малых и больших относительных размерах твердого ядра.

В ряде академических, технических и технологических проблем приходится иметь дело с неустойчивостью заряженного слоя вязкой жидкости конечной глубины, лежащего на криволинейной твердой подложке. Неустойчивость заряженной жидкой поверхности тающих градин в грозовом облаке, сопровождающаяся эмиссией значительного количества заряженных микрокапелек [1], играет важную роль в процессах микроразделения зарядов и в процессе зарождения разряда линейной молнии [2]. Помимо геофизических приложений электростатической неустойчивости заряженного слоя вязкой жидкости это явление встречается в жидкостной масс-спектрометрии [3,4]. Так, в некоторых типах жидкостных масс-спектрометров получение ионов нелетучих и термически нестабильных веществ осуществляется путем эмиссии в вакуумных низкотемпературных (~ 100 К) условиях микрокапелек и кластеров с мениска на вершине металлического капилляра, по которому осуществляется подача раствора в разрядную систему. При этом вследствие низкой температуры раствор на срезе капилляра замерзает и электрогидродинамическая эмиссия микрокапелек идет из пленки жидкости на поверхности ледяного ядра [3,5]. Существование пленки жидкости обеспечивается джоулевым нагревом при протекании по пленке электрического тока. С качественно сходной ситуацией — с эмиссией заряженных микрокапель с поверхности тонкой пленки жидкости в сильном электрическом поле приходится сталкиваться и в жидкометаллических источниках ионов [6].

Задача об устойчивости заряженного слоя вязкой жидкости на поверхности сферического ядра ранее рассматривалась для асимптотического случая маловязкой жидкости в [7], где было получено и дисперсионное уравнение, но его численный анализ не был проведен. В этой связи представляется полезным рассмотреть обсуждаемую задачу в более общей постановке, не ограничиваясь маловязкими жидкостями.

1. Пусть твердое сферическое ядро радиуса R_0 окружено сферически симметрично расположенным шаровым слоем идеально проводящей жидкости внешнего радиуса R . Будем считать жидкость несжимаемой и маловязкой, характеризуемой коэффициентом кинематической вязкости ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . На поверхности жидкой фазы равномерно распределен заряд Q . Поля скоростей капиллярного волнового движения и давления обозначим соответственно $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$. Искажение свободной поверхности жидкости $\xi(\mathbf{r}, t)$, возникающее из-за капиллярного волнового движения, будем считать малым вместе с величинами $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$. Кроме того, будем считать, что система обладает осевой симметрией.

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. Тогда все остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) будут выражены в единицах своих характерных значений $r_* = R$, $t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}$, $U_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$, $P_* = R^{-1}\sigma$, $Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2}$, $\nu_* = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$.

Система уравнений гидродинамики, описывающая капиллярные движения жидкости в такой системе, будет состоять из линеаризованного уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{\text{in}} + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

условия несжимаемости жидкости

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

и граничных условий на поверхности твердого ядра

$$r = R_0, \quad \text{откуда } U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0 \quad (3)$$

и на свободной поверхности жидкости

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\Theta, t) = 0,$$

откуда

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$-(P^{\text{in}} - P^{\text{ex}}) + 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + P_\sigma - P_E = 0. \quad (6)$$

В этих выражениях $\xi(\Theta, t)$ — функция, описывающая возмущение равновесной сферической поверхности капли; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности жидкости; P^{ex} — давление внешней среды на поверхность капли; P^{in} — давление внутри жидкости; \mathbf{U} — поле скоростей; P_σ — лапласовское давление под искаженной волновым движением сферической поверхностью жидкого слоя [8]

$$P_\sigma = 2 - (2 + \Delta_\Omega)\xi(\Theta, t),$$

Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Давление электрического поля на поверхность заряженной идеально проводящей капли P_E определяется выражением [7]

$$P_E = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{1}{2\pi} Q^2 \xi + \frac{1}{4\pi} Q^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P_m(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_m(\mu) d\mu,$$

где $P_m(\mu)$ — нормированные полиномы Лежандра, $\mu \equiv \cos \theta$.

2. Для решения задачи (1)–(6) используем метод скаляризации, подробно изложенный в [9]. В соответствии с этим представим поле скоростей в виде суммы трех ортогональных полей

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{r} \Psi_2(\mathbf{r}, t) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) \Psi_3(\mathbf{r}, t),$$

где первое слагаемое определяет потенциальную часть поля скоростей, второе — вихревую тороидальную, а третье — вихревую полоидальную.

В результате система векторных уравнений (1), (2) примет скалярный вид

$$\Delta \Psi_i(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu} (1 - \delta_{i1}) \frac{\partial \Psi_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$P^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Выражая компоненты поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ через Ψ_i , получим

$$U_r = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_\Omega \Psi_3,$$

$$U_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_3}{\partial \Theta} \right),$$

$$U_\varphi = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \Theta}.$$

После несложных математических преобразований граничные условия на поверхности твердого ядра для проекций поля скоростей (39) могут быть выражены через скалярные функции Ψ_i в виде:

$$\text{при } r = R_0 \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_\Omega \Psi_3 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \Psi_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_3) = 0, \quad (9)$$

$$\Psi_2 = 0. \quad (10)$$

Граничные условия (4)–(6) примут вид

$$\text{при } r = 1 \quad \frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_\Omega \Psi_3 \right], \quad (11)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3 = 0, \quad (12)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2}{r} = 0, \quad (13)$$

$$-P^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) + 2\nu \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \Delta_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) \right) \right] - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0. \quad (14)$$

3. Полагая

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_m Z_m P_m(\mu) \exp(st), \quad (15)$$

решения системы уравнений (7) будем искать в виде

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_m \left[C_m^1 r^m + D_m^1 r^{-(m+1)} \right] P_m(\mu) \exp(st),$$

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_m \left[C_m^j i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) + D_m^j k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) \right] \times P_m(\mu) \exp(st) \quad (j = 2, 3), \quad (16)$$

$C_m^1, C_m^j, D_m^1, D_m^j$ — константы.

Отметим, что задача для определения функции Ψ_2 полностью автономна и не зависит от функций Ψ_1, Ψ_3 и ξ . Другими словами, тороидальная компонента движения жидкости, описываемая Ψ_2 , не дает вклада в дисперсионное уравнение гармонически полоидальных движений жидкости в капле и не оказывает влияния на рельеф ее поверхности.

Подставляя (16) в граничные условия (11)–(12) и (14), получим

$$m C_m^1 - (m+1) D_m^1 + m(m+1) \left[C_m^3 i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + D_m^3 k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] = S Z_m, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& 2(m-1)C_m^1 - 2(m+2)D_m^1 + \left\{ -2\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right. \\
& + \left. \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right\} C_m^3 \\
& + \left\{ 2\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] \right. \\
& \times \left. k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right\} D_m^3 = 0, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [S + 2\nu m(m-1)]C_m^1 + [S + 2\nu(m+1)(m+2)]D_m^1 \\
& + 2\nu m(m+1) \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + (m-1)i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right] C_m^3 \\
& + 2\nu m(m+1) \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + (m-1)k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right] D_m^3 \\
& + \left[(m-1)(m+2) - \frac{Q^2}{4\pi}(m-1) \right] Z_m = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

При записи (17)–(19) были использованы известные [10] соотношения для цилиндрических функций

$$\frac{\partial}{\partial x} f_m(x) = f_{m+1}(x) + \frac{m}{x} f_m(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_m(x) = -\frac{2}{x} f_{m+1}(x) + \left[1 + \frac{m(m-1)}{x^2} \right] f_m(x),$$

$$f_m(x) = \begin{cases} i_m(x), \\ (-1)^{m+1} k_m(x). \end{cases}$$

Здесь $i_m(x)$ и $k_m(x)$ — сферические цилиндрические функции первого и третьего рода соответственно. Граничные условия (8), (9) для компонент поля скоростей на поверхности твердого ядра распишем с учетом (16)

$$\begin{aligned}
& mR_0^{(m-1)}C_m^1 - (m+1)R_0^{-(m+2)}D_m^1 + \frac{m(m-1)}{R_0} \\
& \times \left[C_m^3 i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) + D_m^3 k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) \right] = 0, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_0^{(m-1)}C_m^1 + R_0^{-(m+2)}D_m^1 + \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) \right. \\
& + \left. \frac{(m+1)}{R_0}i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) \right] C_m^3 + \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) \right. \\
& + \left. \frac{(m-1)}{R_0}k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) \right] D_m^3 = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

Система пяти однородных алгебраических уравнений (17)–(21) для пяти неизвестных величин

$C_m^1, D_m^1, C_m^3, D_m^3, Z_m$ имеет нетривиальное решение только в том случае, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

где $A_{11} = m, A_{12} = -(m+1), A_{13} = m(m+1)i_m(\sqrt{S/\nu}),$

$A_{14} = m(m+1)k_m(\sqrt{S/\nu}), A_{15} = -S, A_{21} = 2(m-1),$

$$A_{22} = -2(m+2), \quad A_{23} = -2\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right)$$

$$+ \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right),$$

$$A_{24} = 2\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + \left[\frac{S}{\nu} + 2(m+1)(m-1) \right] k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right),$$

$$A_{25} = 0, \quad A_{31} = S + 2\nu m(m-1), \quad A_{32} = S + 2\nu(m+1)(m+2),$$

$$A_{33} = 2\nu m(m+1) \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + (m-1)i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right],$$

$$A_{34} = 2\nu m(m+1) \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) + (m-1)k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right) \right],$$

$$A_{35} = (m-1)(m+2) - \frac{Q^2}{4\pi}(m-1), \quad A_{41} = mR_0^{(m-1)},$$

$$A_{42} = -(m+1)R_0^{-(m+2)}, \quad A_{43} = \frac{m(m+1)}{R_0}i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right),$$

$$A_{44} = \frac{m(m+1)}{R_0}k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right), \quad A_{45} = 0,$$

$$A_{51} = R_0^{(m-1)}, \quad A_{52} = R_0^{-(m+2)},$$

$$A_{53} = \sqrt{\frac{S}{\nu}}i_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) + \frac{(m+1)}{R_0}i_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right),$$

$$A_{54} = -\sqrt{\frac{S}{\nu}}k_{m+1}\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right) + \frac{(m+1)}{R_0}k_m\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}R_0\right),$$

$$A_{55} = 0.$$

Алгебраическое соотношение (22) связывает между собой частоту и номер моды, т.е. является дисперсионным уравнением, определяющим спектр возможных гармонически полоидальных и чисто вихревых полоидальных движений в слое жидкости на поверхности твердого сферического ядра.

4. На рис. 1–6 представлены результаты численных расчетов по (22) в виде зависимостей вещественной и

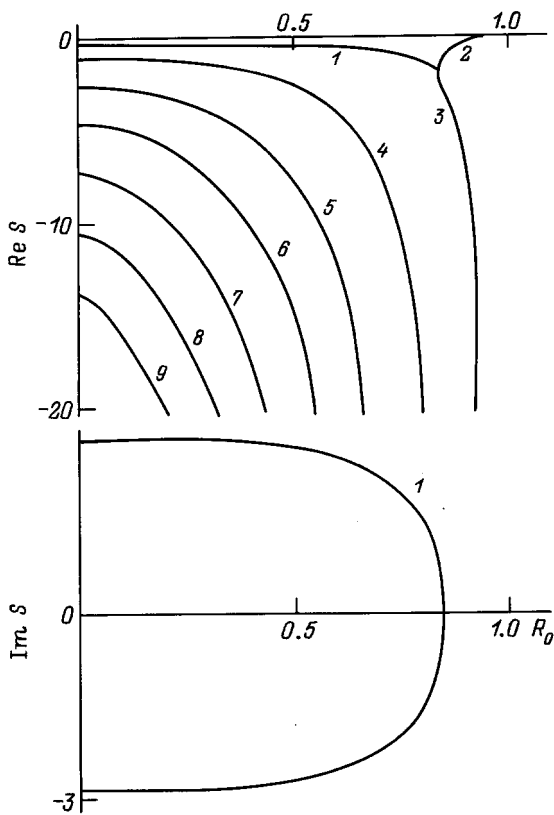


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент частоты S реализующихся капиллярно-полоидальных движений жидкости от величины радиуса ядра R_0 .

мнимой компонент безразмерной комплексной частоты от безразмерного радиуса ядра для различных мод и при различных значениях безразмерных физических параметров вязкости ν и заряда W .

На рис. 1 и 2 указанные зависимости приведены при $W = 0$, $\nu = 0.03$ для мод с $m = 2$ (основной моды) и 6 соответственно. На рис. 3 та же зависимость для основной моды приведена для в десять раз большей вязкости $\nu = 0.3$ и $W = 0$. Из этих рисунков можно видеть, что на спектр реализующихся движений важное влияние оказывает как затухание в объеме жидкого слоя, так и затухание на дне. Причем из рис. 1 и 2 видно, что влияние затухания на дне для моды с $m = 2$ более существенно, чем для моды с $m = 6$. Видно, что при принятой величине вязкости область значений радиуса ядра R_0 , в которой существуют капиллярные колебания для шестой моды, шире чем для основной, что указывает на определяющую роль для тонких слоев жидкости затухания движений на твердом дне. Этот феномен должен сказываться (за счет ограничения спектра реализующихся капиллярных движений) на закономерностях развития финальной стадии неустойчивости заряженной поверхности жидкости, когда на ней формируются эмиссионные выступы и начинается сброс избыточного заряда [1]. В частности, в достаточно тонких слоях вязкой жидкости, когда затухание на дне подавляет несколько первых

мод капиллярных колебаний жидкого слоя, реализация неустойчивости будет идти на счет преимущественного развития первой не подавляющейся вязкостью высокой моды с номером $m \equiv m_*$. Это приведет к формированию на неустойчивой по отношению к собственному заряду поверхности жидкого слоя не двух эмиссионных выступов, как это имеет место для капли без ядра [1], а m_* выступов. По-видимому, именно такая ситуация зафиксирована на фотографии в [11, с. 2437]. Из рис. 1 и 3 видно, что частоты капиллярных колебаний выделенной моды уменьшаются с увеличением вязкости.

Зависимости $Re S = Re S(R_0)$ для существенно закритического заряда системы ($W = 13$) при $\nu = 0.03$ приведены для $m = 2$ на рис. 4 и 6 на рис. 5 (отметим, что при $W = 13$ неустойчивы моды с $m < 11$). Кривые с номером 2 на этих рисунках определяют инкременты неустойчивости соответствующих мод. Кривые с большими номерами определяют декременты вихревых полоидальных движений. Несложно видеть, что утоньшение слоя жидкости (увеличение R_0) приводит к снижению инкрементов неустойчивых движений и к увеличению декрементов вихревых затухающих движений жидкости.

На рис. 6 приведены значения инкрементов нескольких неустойчивых мод, номера которых указаны у соответствующих кривых, рассчитанные при $W = 13$, $\nu = 0.1$. Из физического смысла задачи очевидно, что связь величин инкрементов с номерами мод определяется степенью закритичности заряда и влиянием вязкого затухания в объеме и на поверхности твердого ядра. Отметим, что m -я мода становится неустойчивой при $W = 2 + m$. Это означает, что при принятом

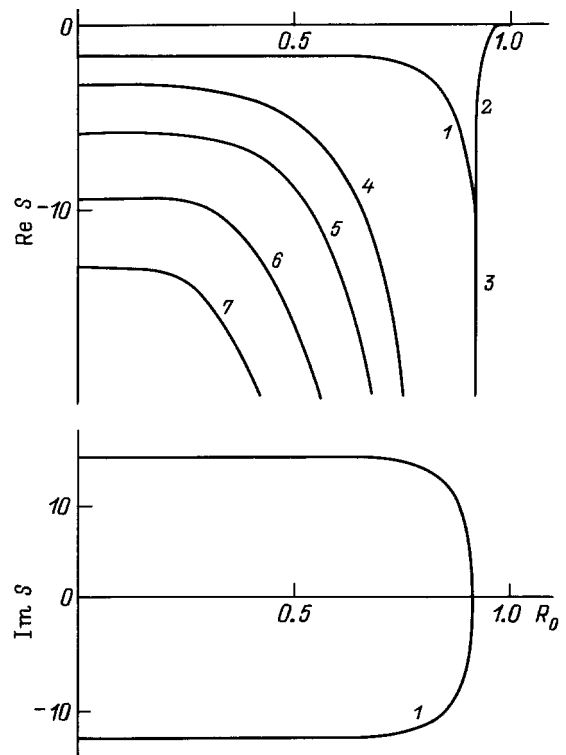


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для $m = 6$.

значении W заряд максимально закритичен для основной моды с $m = 2$ и минимально закритичен для $m = 10$. Тем не менее инкремент основной моды в описанной системе оказывается не самым большим из-за существенного влияния вязкой диссипации. Другим существенным моментом является то, что соотношение между величинами инкрементов различных мод зависит и от толщины жидкого слоя: в тонких слоях инкременты высоких мод оказываются большими инкрементов мод с меньшими номерами. Бросается в глаза и сильная зависимость величин инкрементов от толщины слоя жидкости в области малых толщин.

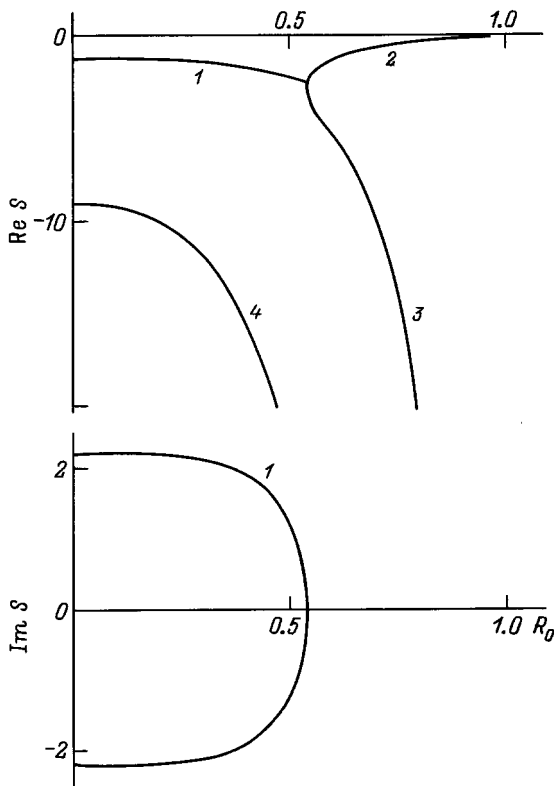


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, но при $\nu = 0.3$.

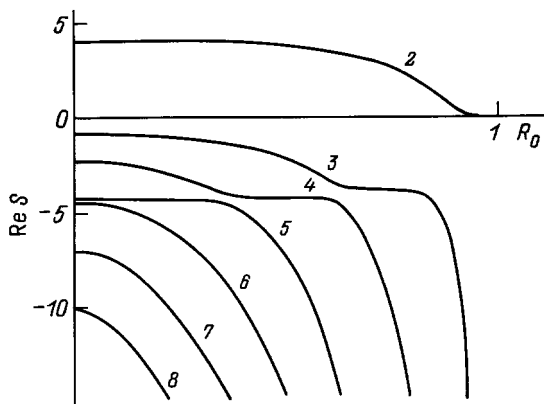


Рис. 4. То же, что на рис. 1, но только вещественной компоненты при $W = 13$.

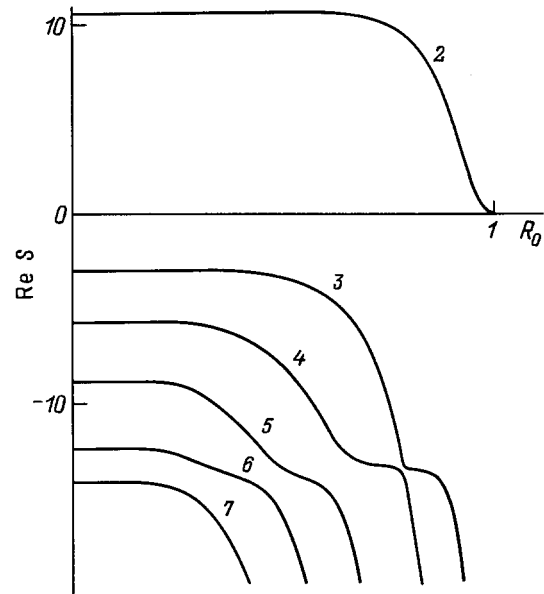


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но для $m = 6$.

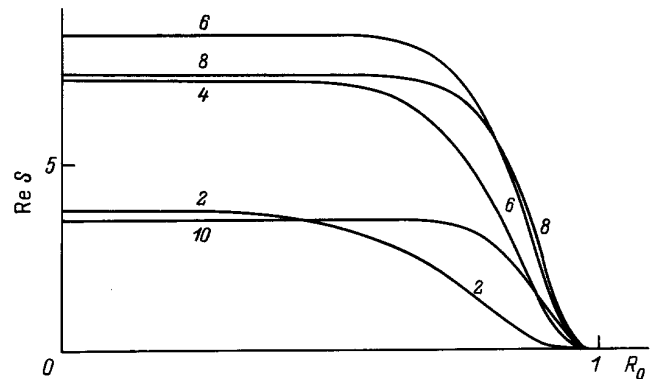


Рис. 6. Зависимости безразмерных инкрементов нескольких неустойчивых мод от безразмерного радиуса ядра R_0 .

На рис. 1–3 кривые 1 описывают капиллярные колебания жидкого слоя. На рис. 1–5 кривые 2 и 3 описывают аperiodически затухающие гармонически полоидальные движения. Кривые же с номерами больше трех соответствуют аperiodически затухающим чисто полоидальным вихревым движениям. Из приведенных зависимостей легко видеть, что утоньшение слоя жидкости, увеличение ее вязкости и увеличение номера моды приводят к быстрому увеличению декрементов затухания движений этого типа.

5. Вернемся к задаче определения вихревой тороидальной компоненты поля скоростей, связанной со скалярной функцией Ψ_2 , которая определяется системой уравнений (10), (12). Подставляя (16) в (10), (12), найдем

$$C_m^2 i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right) + D_m^2 k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right) = 0, \quad (23)$$

$$\left[\sqrt{\frac{S}{\nu}} i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1) i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] C_m^2 + \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}} k_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1) k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] D_m^2 = 0. \tag{24}$$

Система алгебраических уравнений (23), (24) имеет нетривиальное решение, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов при C_m^2 , D_m^2 . Это условие определяет и дисперсионное уравнение, описывающее спектр вихревых тороидальных движений в слое вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра, имеющее вид

$$i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right) \left[-\sqrt{\frac{S}{\nu}} k_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1) k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] - k_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} R_0 \right) \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}} i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (m-1) i_m \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] = 0. \tag{25}$$

На рис. 7 приведены зависимости декрементов затухания тороидальных вихревых движений, связанных с основной модой ($m = 2$), от толщины слоя вязкой жидкости, рассчитанные по (25), в виде зависимостей $\text{Re } x = \text{Re } x(R_0)$, где $x \equiv S/\nu$. Из рис. 7 видно, что утоньшение слоя жидкости приводит к быстрому увеличению декрементов затухания тороидальных движений. Численные расчеты также показывают, что с увеличением номера моды декременты связанных с ней тороидальных движений быстро увеличиваются.

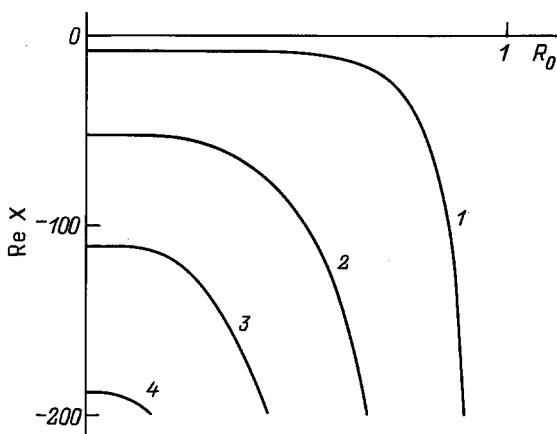


Рис. 7. Зависимости декрементов затухания тороидальных вихревых движений, связанных с основной модой ($m = 2$), от безразмерного радиуса ядра.

6. Подводя итог вышесказанному, отметим, что частоты капиллярных колебаний жидкого слоя на поверхности твердого ядра, декременты реализующихся вихревых полоидальных и тороидальных движений и инкременты неустойчивых мод весьма сильно зависят от наличия в капле твердого ядра, когда отношение радиуса ядра к

радиусу капли приближается к единице. Наличие двух механизмов вязкой диссипации — затухания в слое и на твердом дне — ограничивает спектр мод, принимающих участие в формировании эмиссионных выступов на сильно заряженной поверхности жидкого слоя, отводя определяющую роль высоким модам. Это может привести для тонких слоев вязких жидкостей к формированию большого количества эмиссионных выступов в отличие от капли без ядра, где таких выступов всего два.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–14.
- [3] Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурлат В.Е. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [5] Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 166. P. 267–274.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [7] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 6. С. 29–36.
- [8] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [9] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Препринт ИМРАН. № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [10] Справочник по специальным функциям / Под ред. А.Абрамовиц, И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [11] Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.