

01;07

## Новый метод решения задач переноса излучения в излучающих, поглощающих и рассеивающих средах

© В.С. Юферев, М.Г. Васильев, Л.Б. Проэкт

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 22 мая 1996 г.)

В основе предлагаемого метода лежит новый способ аппроксимации угловой зависимости интенсивности излучения. Вся область изменения телесных углов разбивается на  $N$  ячеек, симметричных относительно центра сферы. В каждой из ячеек излучение задается в виде  $P_1$  приближения, а для определения множества локальных нулевых и первых моментов получается система дифференциальных уравнений. В некоторых специальных случаях предлагаемый подход может рассматриваться как обобщение метода дискретных ординат, позволяющее естественным образом решить проблему выбора весов в квадратурных формулах. Эффективность метода демонстрируется на двух тестовых одномерных примерах. Показано, что в этом случае достаточно высокая точность решения задачи достигается уже при  $N = 2$ .

### Введение

Задачи радиационного теплообмена по-прежнему остаются одними из наиболее трудоемких с вычислительной точки зрения. Для их решения было предложено большое количество методов (см., например, обзоры [1–3]), однако ни один из них не может считаться достаточно универсальным и пригодным на все случаи жизни. Более того, несмотря на поразительное развитие вычислительной техники, до сих пор, например, отсутствует решение задачи радиационного теплообмена в такой достаточно простой геометрии, как полупрозрачный круговой цилиндр конечной длины с зеркально отражающими прозрачными границами и коэффициентом преломления, большим единицы.

Основные методы решения задач переноса излучения можно условно разделить на две группы в зависимости от того, какая форма уравнения переноса излучения используется для получения численного решения — дифференциальная или интегральная. К первой группе относятся методы сферических гармоник, ( $P_N$ ) моментов, собственных функций Кейса, дискретных ординат ( $S_N$ ). Ко второй — зонный метод и метод конечных элементов и их разновидности. Отдельную группу образуют метод Монте-Карло и "ray tracing" методы.

При решении уравнения переноса излучения в дифференциальной форме основная проблема состоит в выборе способа аппроксимации зависимости интенсивности излучения от направления. Обычно используется два подхода. В первом угловая зависимость интенсивности излучения аппроксимируется набором функций, заданных во всем диапазоне телесных углов. Указанный подход может быть назван методом глобальной аппроксимации. Практическое его применение ограничено случаями, когда оказывается достаточным использование первых членов разложения, например  $P_1$ - или  $P_3$ -приближения в методе сферических гармоник [4–6]. Для улучшения точности  $P_N$ -метода при наличии разрывных граничных

условий в работах [7,8] была предложена его модификация, основанная на использовании самостоятельных разложений [9,10] в каждой из полусфер в одномерном случае и в каждой из четверти сферы — в двумерном.

Альтернативный подход, который можно назвать локальным, используется в методе дискретных ординат, когда все поле излучения разбивается на дискретное число потоков, с каждым из которых связано фиксированное направление в пространстве и соответствующее значение весового коэффициента в квадратурных формулах, используемых для вычисления интегралов излучения. В результате уравнение переноса излучения заменяется конечной системой дифференциальных уравнений, описывающих пространственные изменения интенсивности излучения в этих направлениях.  $S_N$ -метод был впервые предложен Чандрасекхаром [11] как обобщение метода Шустера–Шварцшильда и в дальнейшем нашел широкое применение для решения различных задач радиационного теплообмена (см., например, [12–16]) вплоть до использования в коммерческих кодах [17].

Известно, что точность метода дискретных ординат определяется конструкцией квадратурной схемы, т.е. выбором весовых коэффициентов. Какие-либо строгие математические принципы, позволяющие находить значения весов, в настоящее время отсутствуют, хотя недавно в этом направлении и были получены достаточно интересные результаты [18]. Указанное обстоятельство существенно снижает эффективность данного метода. В настоящей работе предлагается новый подход к решению задач переноса излучения, который позволяет естественным образом решить эту проблему.

В основе подхода лежит новый способ аппроксимации угловой зависимости интенсивности излучения, объединяющий в некотором смысле метод сферических гармоник и метод дискретных ординат. Действительно,  $S_N$ -метод можно рассматривать как метод коллокации на сфере, поскольку уравнение переноса удовлетворяется на конечном множестве фиксированных значений

углов, определяющих направления распространения излучения. В противоположность этому в предлагаемом методе уравнение переноса излучения удовлетворяется в среднем в каждом из элементарных телесных углов разбиения сферы. Угловая зависимость излучения в этих ячейках может быть аппроксимирована различными способами. В данной работе для этой цели используется  $P_1$  приближение вследствие своей простоты и физической ясности. Таким образом, можно сказать, что предлагаемый метод занимает относительно  $S_N$ -метода такое же положение, как метод конечных элементов относительно метода конечных разностей или метода коллокаций.

Основная идея предлагаемого подхода была впервые сформулирована в работе [19,20] как обобщение метода дифференциального приближения и показала прекрасные результаты при решении некоторых тестовых задач. В настоящей работе дается общее изложение данного метода.

## Формулировка метода

Разобьем всю область изменения телесных углов на  $N$  областей (ячеек)  $\Omega_m$  таким образом, что  $\Omega_m = \Omega_m^+ \cup \Omega_m^-$ , а подобласти  $\Omega_m^+$ ,  $\Omega_m^-$  являются симметричными относительно центра сферы, т.е. для каждого направления  $\{l_i^{m,+}, i = 1, 2, 3\} \in \Omega_m^+$ , где  $l_i^m$  есть направляющие косинусы относительно осей координат  $x_i$ , существует симметричное направление  $\{l_i^{m,-}, i = 1, 2, 3\} \in \Omega_m^-$ , так что  $l_i^{m,-} = -l_i^{m,+}$ . Представим интенсивность излучения в каждой из ячеек  $\Omega_m$  в виде, аналогичном  $P_1$ -приближению (для простоты изложения рассматривается сферическое приближение)

$$I(\mathbf{r}, \Omega) = s_m^{-1} (I_0^m(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^3 l_i^m A_i^m(\mathbf{r})), \quad l_i^m \in \Omega_m, \quad (1)$$

где

$$s_m = \int_{\Omega_m} d\Omega.$$

Легко показать, что благодаря свойству симметрии углового разбиения коэффициент  $I_0^m$  оказывается равным локальному нулевому моменту интенсивности излучения в области  $\Omega_m$ , в то время как для первого и второго локальных моментов будем иметь

$$q_n^m = \int_{\Omega_m} l_n^m I d\Omega = \sum_{j=1}^3 p_{nj}^m A_j^m, \quad (2a)$$

$$I_{2,nj}^m = \int_{\Omega_m} l_n^m l_j^m I d\Omega = p_{nj}^m I_0^m, \quad (2b)$$

где

$$p_{nj}^m = s_m^{-1} \int_{\Omega_m} l_n^m l_j^m d\Omega, \quad j, n = 1, 2, 3.$$

Можно видеть, что уравнение (2b) эквивалентно условию замыкания в  $P_1$ -методе применительно к ячейке  $\Omega_m$ .

С другой стороны, в отличие от  $P_1$ -приближения коэффициенты  $A_i^m$  не совпадают с компонентами плотности потока излучения  $q_i^m$ , а связаны с ними формулой (2a). Выражая из (2a)  $A_j^m$  через  $q_n^m$  и подставляя в (1), получим

$$A_i^m = \sum_{n=1}^3 \tilde{p}_{in}^m q_n^m, \quad (3a)$$

$$I = s_m^{-1} (I_0^m + \sum_{n=1}^3 a_n^m q_n^m), \quad (3b)$$

где  $a_n^m = \sum_{i=1}^3 \hat{l}_i^m \tilde{p}_{in}^m$ , матрица  $\{\tilde{p}_{ij}^m\}$  является обратной к матрице  $\{p_{ij}^m\}$ .

Представление (1)–(3) показывает, что полные моменты интенсивности излучения являются суммой локальных моментов, т.е.

$$I_0 = \sum_{m=1}^N I_0^m, \quad q_i = \sum_{m=1}^N q_i^m, \\ I_{2,nj} = \sum_{m=1}^N I_{2,nj}^m, \quad i, j, n = 1, 2, 3, \quad (4)$$

таким образом, все интегральные условия, которые в методе дискретных ординат используются при конструировании квадратурных формул, в данном случае выполняются автоматически.

Разбиение сферы может быть выполнено различными способами. В простейшем из них, используя сферическую систему координат, элементарные ячейки  $\Omega_m = \Omega_{pq}^m$  определяются множествами

$$(\Theta_{p-1} \leq \Theta < \Theta_p) \cup (\pi - \Theta_p < \Theta \leq \pi - \Theta_{p-1}), \\ (\varphi_{q-1} \leq \varphi < \varphi_q) \cup (\varphi_{q-1} + \pi \leq \varphi < \varphi_q + \pi), \\ 1 \leq p \leq N_1, \quad 1 \leq q \leq N_2, \quad N = N_1 \cdot N_2. \quad (5)$$

Тензор  $\{p_{ij}\}$ , соответствующий этому разбиению, приводится в Приложении. При решении одномерных и некоторых многомерных задач разбиение (5) можно упростить, положив  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , т.е. использовать только разбиение по углам  $\Theta$ . В этом простейшем случае

$$s_m = 4\pi(\mu_{m-1} - \mu_m), \quad \mu = \cos \Theta, \\ p_{ij} = 0, \quad \text{если } i \neq j, \quad \text{и } A_i^m = \frac{1}{p_{ii}} q_i^m. \quad (6)$$

Другой способ конструирования  $\{\Omega_m\}$  состоит в симметричном разбиении сферы на области одинаковой формы и равной площади. Однако в этом случае разнообразие возможных разбиений оказывается ограниченным. Минимальное из них ( $N = 3$ ) получается в результате проекции куба на сферу. Далее следует  $N = 4$  — проекция октаэдра на сферу,  $N = 6$  — проекция ромбического октаэдра и т.д. В общем случае разбиение  $\{\Omega_m\}$  может зависеть от пространственных

координат и это является еще одним существенным преимуществом данного метода, поскольку позволяет использовать конкретные особенности решаемой задачи. Однако в данной работе мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда разбиение  $\{\Omega_m\}$  от пространственных координат не зависит.

### Основные уравнения

Чтобы получить уравнения относительно  $I_0^m$  и  $q_i^m$  необходимо вычислить локальные нулевой и первый моменты от исходного уравнения переноса излучения, которое имеет вид

$$\sum_{j=1}^3 l_j \frac{\partial I}{\partial x_j} + \beta I = \frac{\omega}{4\pi} \beta \times \int_{4\pi} \Phi(\Omega, \Omega') I(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega' + \beta(1 - \omega) I_B, \quad (7)$$

где  $\beta = k + \sigma$ ,  $\omega = \sigma / (k + \sigma)$ ,  $k$  и  $\sigma$  — есть коэффициенты поглощения и рассеяния соответственно.

Проинтегрируем (7) по области  $\Omega_m$ . Тогда, подставляя в интеграл рассеяния вместо  $I$  представление (1) и учитывая свойства симметрии индикатриссы рассеяния, будем иметь

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial q_j^m}{\partial x_j} = \beta \sum_{n=1}^N (\omega r_{mn} - \delta_{mn}) I_0^n + \beta(1 - \omega) s_m I_B, \quad (8a)$$

где

$$r_{mn} = \frac{1}{4\pi s_n} \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_m} \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega d\Omega', \quad (8б)$$

$\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Умножим далее (7) на  $l_i$  и проинтегрируем снова по  $\Omega_m$ . В результате с учетом (1), (2б) и свойств симметрии индикатриссы рассеяния получим

$$\sum_j p_{ij}^m \frac{\partial I_0^m}{\partial x_j} + \beta q_i^m = \beta \omega \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 f_{ij}^{mn} A_j^n, \quad (9a)$$

где

$$f_{ij}^{mn} = \frac{1}{4\pi s_n} \int_{\Omega_m} \int_{\Omega_n} l_i^m l_j^n \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega d\Omega'. \quad (9б)$$

Подстановка сюда выражения (3а), связывающего коэффициенты  $A_j^m$  с плотностью потока излучения  $\mathbf{q}^m$ , дает

$$\sum_{j=1}^3 p_{ij}^m \frac{\partial I_0^m}{\partial x_j} = \beta \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 (\omega h_{il}^{mn} - \delta_{mn} \delta_{il}) q_l^n, \quad (10a)$$

где

$$h_{il}^{mn} = \sum_{j=1}^3 f_{ij}^{mn} \tilde{p}_{jl}^n. \quad (10б)$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка (8), (10) определяет множество локальных нулевых и первых моментов  $I_0^m$  и  $q_i^m$ . В принципе она может быть сведена к системе уравнений второго порядка относительно  $I_0^m$  или  $q_i^m$ . Последняя система является более удобной для численного решения. Поскольку процедура приведения в общем случае является достаточно громоздкой, то мы проделаем эту операцию на нескольких конкретных примерах.

а) Плоский слой, осевая симметрия. Используя разбиение (5), (6) и полагая, что ось  $Ox_3$  направлена перпендикулярно границам слоя, будем иметь

$$f_{ij}^{mn} = \delta_{i3} \delta_{j3} f^{mn}, \quad h_{il}^{mn} = \delta_{i3} \delta_{l3} f^{mn} / p_{33}^n, \quad q^m = p_{33}^m A_3^m.$$

В результате уравнения (8), (10) принимают вид

$$\frac{1}{\beta} \frac{dq^m}{dx_3} = \sum_{n=1}^N (\omega r_{mn} - \delta_{mn}) I_0^n + (1 - \omega) s_m I_B, \quad (11a)$$

$$p_{33}^m \frac{dI_0^m}{dx_3} = \beta \sum_{n=1}^N (\omega h_{33}^{mn} - \delta_{mn}) q^n. \quad (11б)$$

Дифференцируя (11a) по  $x_3$  и исключая  $I_0$ , получаем искомую систему уравнений второго порядка относительно  $q^m$

$$\frac{d^2 q^m}{dx_3^2} = \beta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{1}{p_{33}^n} (\omega r_{mn} - \delta_{mn}) \times (\omega h_{33}^{nl} - \delta_{nl}) q^l + \beta(1 - \omega) s_m \frac{dI_B}{dx_3}. \quad (12)$$

Отметим, что уравнение (12) справедливо для любой функции рассеяния.

б) Многомерный случай, одномерное разбиение. При некоторых условиях одномерное разбиение, использованное в предыдущем подразделе, может оказаться достаточно точным и в многомерных задачах. Поскольку в этом случае по-прежнему  $p_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , то вместо уравнения (12) будем иметь

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 q_j^m}{\partial x_j \partial x_i} = \beta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{1}{p_{ii}^n} (\omega r_{mn} - \delta_{mn}) \times (\omega h_{ik}^{nl} - \delta_{nl} \delta_{ik}) q_k^l + \beta(1 - \omega) s_m \frac{dI_B}{dx_i}. \quad (13)$$

в) Многомерный случай, разбиение общего вида. Рассеяние изотропное. Из (8б), (9б) следует, что  $f_{ij}^{mn} = 0$ ;  $r_{mn} = s_m / (4\pi)$ . В результате, исключая  $q_i^m$  из (8), (9), будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^3 p_{ij}^m \frac{\partial^2 I_0^m}{\partial x_i \partial x_j} = -\beta^2 \sum_{n=1}^N \left( \omega \frac{s_m}{4\pi} - \delta_{mn} \right) I_0^n - \beta^2 (1 - \omega) s_m I_B. \quad (14)$$

## Сравнение предлагаемого подхода с методом дискретных ординат

Как уже отмечалось, в методе дискретных ординат уравнение (6) заменяется системой уравнений (для простоты изложения рассматривается случай изотропного рассеяния)

$$\sum_{i=1}^3 l_i^m \frac{\partial I_m}{\partial x_i} + \beta I_m = \frac{\omega}{4\pi} \beta \sum_{n=-N}^N \omega_n I_n + \beta(1-\omega)I_B,$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad (15)$$

где индекс  $m$  указывает соответствующее направление в пространстве,  $\omega_n$  — веса квадратурной формулы.

Обычно направления выбираются таким образом, что  $l_i^m = -l_i^{-m}$ . Тогда, обозначая  $J_0^m = I_{-m} + I_m$ ,  $q^m = I_m - I_{-m}$ , после стандартных преобразований уравнений (15), получим

$$\sum_{i=1}^3 l_i^m \frac{\partial J_0^m}{\partial x_i} + \beta q^m = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 l_i^m \frac{\partial q^m}{\partial x_i} + \beta J_0^m = 2\beta \left( \frac{\omega}{4\pi} \sum_{n=1}^N \omega_n J_0^n + (1-\omega)I_B \right). \quad (16)$$

Исключая из (16)  $q^m$ , будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^3 l_i^m l_j^m \frac{\partial^2 J_0^m}{\partial x_i \partial x_j} + \beta J_0^m = -2\beta^2 \left( \frac{\omega}{4\pi} \sum_{n=1}^N \omega_n J_0^n + (1-\omega)I_B \right). \quad (17)$$

Сравнение уравнений (14) и (17) показывает, что они имеют одинаковую структуру. Следовательно, предлагаемый подход можно рассматривать как обобщение метода дискретных ординат, позволяющее естественным образом решить проблему выбора весов в квадратурных формулах. Более того, в данном методе невозможно возникновение "ray effect", описанного в [16] применительно к  $S_N$ -методу.

## Граничные условия

Рассмотрим для определенности непрозрачную, излучающую и отражающую границу. В этом случае граничные условия для интенсивности излучения имеют вид

$$I(\Omega) = \varepsilon I_B(T_\omega) + \rho_s I(\Omega') + \frac{\rho_d}{\pi} \int_{n \cdot \Omega'' < 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega''| I(\Omega'') d\Omega'',$$

$$\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \quad (18)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент черноты;  $\rho_s, \rho_d$  — коэффициенты зеркального и диффузного отражения;  $\mathbf{n}$  — вектор внутренней нормали к границе области, а направление  $\Omega'$  связано с  $\Omega$  условием, что угол отражения равен углу падения.

Проектируя уравнение (18) на внутреннюю нормаль и интегрируя по области  $\Omega_m$ , а более точно, по тем направлениям, принадлежащим  $\Omega_m$ , которые удовлетворяют условию  $\Omega \cdot \mathbf{n} > 0$ , получим уравнения, связывающие  $I_0^m$  и  $q_i^m$  на границе области

$$\int_{\Omega_m, \mathbf{n} \cdot \Omega > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) I(\Omega) d\Omega = \varepsilon_\omega I_B(T_\omega) \int_{\Omega_m, \mathbf{n} \cdot \Omega > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega_m, \mathbf{n} \cdot \Omega > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) \rho_s I(\Omega') d\Omega + \frac{\rho_d}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_m, \mathbf{n} \cdot \Omega'' < 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega''| I(\Omega'') d\Omega'' \int_{\Omega_m, \mathbf{n} \cdot \Omega > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega. \quad (19)$$

Вычисление интегралов, входящих в уравнение (19), представляет наиболее трудоемкую часть при подготовке численного алгоритма, основанного на применении данного метода. Наиболее легко указанные вычисления проводить в одномерном случае для плоского слоя. Используя разбиение (5), (6), получаем

$$I_0^m (1 - \tilde{\rho}_s^m) + 2q_0^m \frac{1 + \tilde{\rho}_s^m}{\mu_{m-1} + \mu_m} = \varepsilon I_B s_m - \frac{\rho_d}{\pi} s_m$$

$$\times \sum_{n=1}^N \left( \frac{q^n}{2} - I_0^n \frac{\mu_n + \mu_{n-1}}{4} \right),$$

где

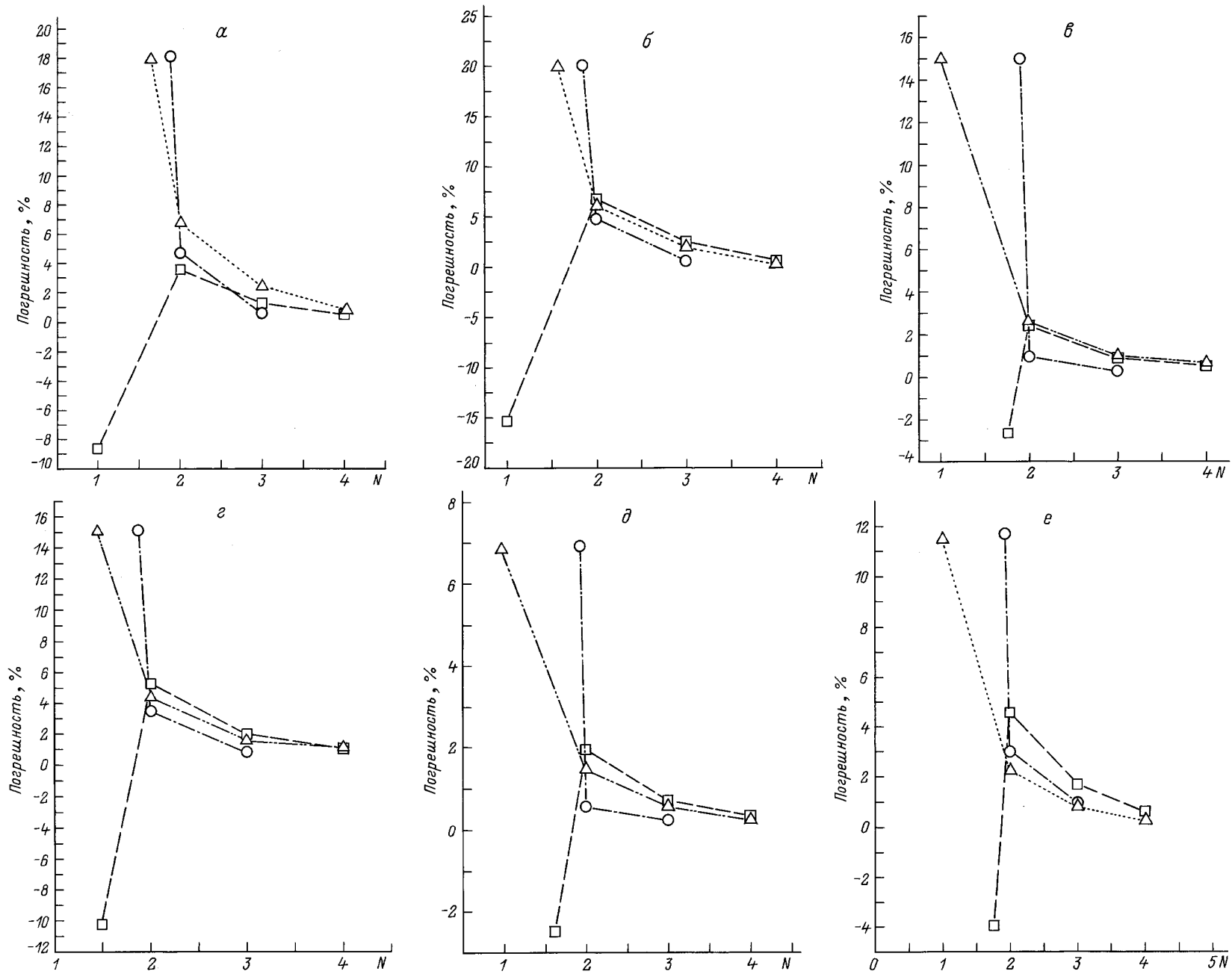
$$\tilde{\rho}_s^m = \frac{2}{\mu_{m-1}^2 - \mu_m^2} \int_{\mu_m}^{\mu_{m-1}} \mu \rho_s d\mu,$$

$$\tilde{\rho}_s^m = \frac{1}{\mu_{m-1} - \mu_m} \int_{\mu_m}^{\mu_{m-1}} \frac{\mu^2 \rho_s(\mu)}{P_{33}} d\mu.$$

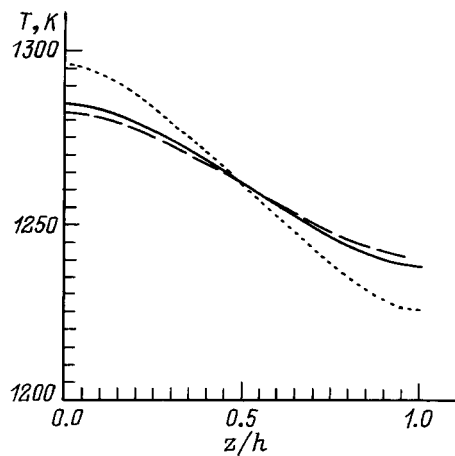
## Численные примеры

Чтобы продемонстрировать эффективность данного метода были рассмотрены две задачи.

1. Прохождение излучения через плоский слой линейно-анизотропной рассеивающей среды ( $\Phi(\Omega, \Omega') = 1 + b \cos \psi$ ). Предполагалось, что коэффициент преломления среды равен 1, а внешнее излучение распространяется по нормали к границе слоя. Эта задача может рассматриваться как тестовая, поскольку решение ее известно и может быть найдено, например, в работе [4]. При решении указанной задачи было использовано равномерное разбиение интервала изменения  $\mu$  от 0 до 1. На рис. 1 показана зависимость погрешности вычисления коэффициента отражения слоя  $R$  от величины разбиения  $N$  для нескольких значений



**Рис. 1.** Зависимость погрешности вычисления коэффициента отражения  $R$  от величины разбиения  $N$ .  $\omega$ :  $\circ$  — 0.1;  $\square$  — 0.5;  $\triangle$  — 0.9;  $\tau = 0.1$  (а, б), 1 (в, г), 15 (д, е);  $b = 0$  (а, в, д), 1 (б, г, е).



**Рис. 2.** Распределение температуры по толщине полупрозрачной пластины, нагреваемой с одной стороны излучением с температурой  $T = 1500$  К.  $\tau = 1$ ; радиационно-кондуктивный параметр равен 0.058; сплошная кривая — точное решение, пунктир —  $N = 1$  ( $P_1$ -приближение), штриховая —  $N = 2$ .

альбедо  $\omega$ , оптической толщины слоя  $\tau$  и коэффициента анизотропии рассеяния  $b$ . Погрешность вычислялась по формуле

$$\mathcal{E} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} 100\%.$$

Положение расчетных точек на рисунке между вертикальными линиями  $N = \text{const}$  означает, что погрешность выходит за пределы рисунка. Видно, что сходимость решения достигается практически при  $N = 2-3$ .

2. Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной пластине, нагреваемой внешним излучением. Предполагалось, что рассеяние излучения отсутствует, а коэффициент поглощения является постоянным. Подобные задачи также неоднократно рассматривались ранее (см., например, [4–5]). Цель, которая преследовалась в данном случае, состояла в том, чтобы показать высокую эффективность метода, связанную с возможностью учета конкретной особенности задачи, а именно явления полного внутреннего отражения. Такой учет достигался тем, что значение угла полного внутреннего отражения  $\Theta_B$  совпадало с одним из углов разбиения  $\Theta_m$ . На рис. 2 показано распределение температуры по толщине пластины. Видно, что уже при  $N = 2$  достигается отличное совпадение с точным решением.

## Заключение

Подход, предложенный в данной работе для решения задач переноса излучения, обладает следующими преимуществами.

1. Устраняется главная проблема метода дискретных ординат, связанная с адекватным выбором дискретных направлений и соответствующих весов квадратурных формул.

2. Появляется возможность учитывать конкретные особенности задачи при выборе разбиения  $\Omega_m$ .

3. Появляется принципиальная возможность корректной аппроксимации граничных условий в случае границы произвольной формы.

4. Поскольку  $P_1$ -приближение само по себе дает удовлетворительные результаты во многих задачах, можно ожидать, что удовлетворительная точность будет достигаться при использовании достаточно грубого разбиения  $\Omega_m$ . Приведенные результаты тестовых расчетов одномерных задач подтверждают эти ожидания. Уже  $N = 2$ , т. е. первая поправка к  $P_1$ -приближению позволяет получить решение, весьма близкое к точному.

5. Если отсутствует рассеяние или индикатрисса рассеяния является изотропной, метод позволяет легко свести исходную задачу к решению системы уравнений второго порядка, разрешенных относительно старших производных.

6. Метод может быть обобщен на случай, когда разбиение  $\Omega_m$  зависит от пространственных координат.

Уже на данном этапе метод может быть использован для решения одномерных задач с произвольной индикатриссой рассеяния, а также при решении двумерных и трехмерных задач в прямоугольной области, если среда является изотропно-рассеивающей.

Основные проблемы, связанные с применением данного метода и требующие дальнейшего исследования, являются следующие: 1) проверка эффективности метода в  $2D$  и  $3D$  задачах; 2) конструирование симметричных разбиений, в которых области  $\Omega_m$  имеют одинаковую форму и площадь; 3) разработка эффективных методов вычисления интегралов, входящих в граничные условия, при произвольной форме границы области.

## Приложение. Тензор $p_{ij}$

Обозначим

$$l_1 = \sin \Theta \cos \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi,$$

$$l_2 = \sin \Theta \sin \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad l_3 = \cos \Theta = \mu,$$

тогда

$$s_m = 2(\mu_{m-1} - \mu_m)(\varphi_m - \varphi_{m-1}),$$

$$p_{11} = \frac{1}{2}(1 - f)(1 + e),$$

$$p_{12} = p_{21} = g \frac{\cos 2\varphi_{m-1} - \cos 2\varphi_m}{4(\varphi_m - \varphi_{m-1})}(1 - f),$$

$$p_{22} = \frac{1}{2}(1 - f)(1 - e),$$

$$p_{13} = p_{31} = g \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{m-1}}{\varphi_m - \varphi_{m-1}},$$

$$p_{23} = p_{32} = g \frac{\cos \varphi_{m-1} - \cos \varphi_m}{\varphi_m - \varphi_{m-1}}, \quad p_{33} = f,$$

где

$$f = \frac{1}{3}(\mu_m^2 + \mu_m \mu_{m-1} + \mu_{m-1}^2),$$

$$e = \frac{\sin 2\varphi_m - \sin 2\varphi_{m-1}}{2(\varphi_m - \varphi_{m-1})},$$

$$g = \frac{(1 - \mu_m^2)^{3/2} - (1 - \mu_{m-1}^2)^{3/2}}{3(\mu_{m-1} - \mu_m)}.$$

## Список литературы

- [1] *Howell J.R.* // J.Heat Transfer. 1988. Vol. 110. P. 1220–1229.
- [2] *Chan S.H.* // Rev. of Numer. Fluid Mech. and Heat Transfer. 1987. Vol. 1. P. 305–350.
- [3] *Viscanta R., Menguc M.P.* // Prog. Energy Combust. Sci. 1987. Vol. 13 P. 97–160.
- [4] *Оцисик М.Н.* Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. С. 616.
- [5] *Зигель Р., Хауэл Дж.* Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. С. 934.
- [6] *Menguc M.P., Viscanta R.* // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1985. Vol. 33. N 6. P. 533–549.
- [7] *Ziering S., Schiff D.* // Nuclear Sci. and Eng. 1958. Vol. 3. P. 635–647.
- [8] *Schiff D., Ziering S.* // Nuclear Sci. and Eng. 1960. Vol. 7. P. 172–183.
- [9] *Yvon J.* // J. Nuclear Energy. 1957. Vol. 4. P. 305.
- [10] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [11] *Chandrasekhar S.* Radiative Transfer. New York: Dover, 1960.
- [12] *Carlson B.G., Lathrop K.D.* // Computing Methods in Reactor Physics / Ed. by H. Greenspan, C.N. Kelber, D. Okrent, New York: Gordon and Breach, 1968.
- [13] *Fiveland W.A.* // J. Heat Transfer. 1987. Vol. 109. P. 809–812.
- [14] *Truelove J.S.* // J. Heat Transfer. 1987. Vol. 109. P. 1048–1051.
- [15] *Sanchez A., Smith T.F.* // J. Heat Transfer. 1992. Vol. 114. P. 465–472.
- [16] *Menart J.A., Lee H.S., Kim T.K.* // J. Heat Transfer. 1993. Vol. 115. P. 184–193.
- [17] *Giridharam M.G., Lowry S., Krishnan A.* // 30<sup>th</sup> AIAA Thermophysics Conf. San-Diego (USA), 1995.
- [18] *Koch R., Krebs W., Wittig S., Viscanta R.* // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1995. Vol. 43. N 4. P. 353–372.
- [19] *Юфеев В.С.* // ТБТ. 1995. Т. 33. N 6. С. 961–966.
- [20] *Lathrop K.D.* // Nucl. Sci. Eng. 1968. Vol. 32. P. 357–369.