

01;05;09

Стохастическая динамика джозефсоновского вихря в неоднородном переходе

© Ф.Х. Абдуллаев, Э.Н. Цой

Физико-технический институт, НПО "Физика-Солнце" АН Узбекистана, 700084 Ташкент, Узбекистан

(Поступило в Редакцию 29 апреля 1996 г.)

Изучено движение вихря в длинном джозефсоновском переходе с локальной неоднородностью (микропроптивлением) под действием переменного стороннего тока. Изучены нелинейные резонансы в динамике вихря. Аналитически и численно исследован процесс стохастического депининга вихря, захваченного на неоднородности, под действием периодического тока.

Введение

Большое внимание исследователей к динамике джозефсоновских вихрей в длинных неоднородных переходах связано с возможными физическими приложениями типа параметрического джозефсоновского осциллятора, перестраиваемых генераторов субмиллиметрового излучения, логических устройств [1,2] и т. д. При этом анализируется влияние на движение вихря двух типов неоднородностей: распределенных (часто в виде периодических рельефов) и точечных (микрозакоротки или микропроптивления). В работе [3] показана возможность захвата вихря возле неоднородности под действием постоянного тока. Возникновение стохастической динамики вихря под действием переменного тока изучено в [4]. Стационарные состояния вихрей в поле двух микрозакороток исследованы в [5], стохастическое ускорение (аналог задачи Улама) вихря под действием осциллирующей примеси исследовано в [6]. Аналитическое рассмотрение стохастической динамики вихря под действием переменного тока, проведенное в [4], основано на изучении специального типа отображения справедливого для движения в окрестности сепаратрисы на фазовой плоскости параметров вихря при отсутствии затухания. Здесь нами аналитически и численно рассмотрена динамика вихря в широкой области нелинейных резонансов и получен критерий стохастичности движения джозефсоновского вихря при учете также эффектов диссипации.

Рассматриваемая проблема представляет интерес и для теории нелинейных волн. Механизмы возникновения динамического хаоса нелинейных волн недостаточно изучены и предлагаемая простая модель может быть основой для сравнения выводов теории с экспериментом.

Движение вихря в поле точечной неоднородности

Рассмотрим динамику вихря в длинном джозефсоновском переходе (ДДП) под действием переменного стороннего тока. В стандартных безразмерных переменных уравнение для разности фаз волновых функций $\varphi(x, t)$

имеет вид [1-3]

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\alpha \varphi_t + \beta \varphi_{xxt} - F(t) + \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \delta(x - a_i) \sin \varphi_i \right], \quad (1)$$

где α и β — параметры затухания, связанные соответственно с туннелированием через барьер и потоком вдоль барьера нормальных электронов; член $F = F_0 \sin(\Omega_0 t)$ описывает влияние распределенного стороннего тока; пространственная переменная x и время t нормированы на джозефсоновскую длину проникновения λ_J и обратную плазменную частоту ДДП $1/\omega_p$ соответственно.

В переходе имеются точечные неоднородности расположенные на расстоянии a_i . Случай $\varepsilon_i < 0$ соответствует микрозакороткам, $\varepsilon_i > 0$ соответствует микропроптивлениям. Ниже мы будем изучать случай $\varepsilon_i > 0$, при этом расстояние между неоднородностями принимает много больше размера вихря, т.е. $a_i \gg d$, где $d \sim (1 - v^2)^{1/2}$. Тогда можно анализировать взаимодействие вихря с каждой неоднородностью отдельно, поскольку влиянием соседней неоднородности можно пренебречь. При малых $\varepsilon, \gamma, \beta, F \ll 1$ можно искать решение в виде кинка (антикинка) с переменными параметрами (координата центра $\zeta(t)$ и скорость $v(t)$)

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\sigma \frac{x - \zeta(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right) \right], \quad (2)$$

где $\sigma = \pm 1$ — полярность, соответствующая кинку (антикинку).

Используя теорию возмущений для уравнения СГ [3,7], можно получить уравнения для $\zeta(t)$ и $v(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & -\alpha v(1 - v^2) - \beta v/3 + (\pi \sigma F_0/4) \sin(\Omega_0 t)(1 - v^2)^{3/2} \\ & - (\varepsilon/2)(1 - v^2) \operatorname{sh}(y)/\operatorname{ch}^3(y), \\ \frac{d\zeta}{dt} = & v + (\varepsilon/2)v\zeta \operatorname{sh}(y)/\operatorname{ch}^3(y), \quad y = \zeta/(1 - v^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем исследовать далее случай малых скоростей ($v^2 \ll 1$), так как именно он интересен для малых возмущений. В этом случае систему (3) можно записать в виде [3,4]

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{\text{sh}(\zeta)}{\text{ch}^3(\zeta)} = -\Gamma \frac{d\zeta}{d\tau} + i \sin(\Omega\tau), \quad (4)$$

где $\Gamma = (\alpha + \beta/3)/\nu_0$, $f = \pi\sigma F_0/(4\nu_0^2)$, $\Omega = \Omega_0/\nu_0$, $\tau = t\nu_0$, $\nu_0 = (\varepsilon/2)^{1/2}$ — частота малых колебаний кинка возле неоднородности.

Таким образом, задача о динамике вихря в ДДП сводится к исследованию движения частицы единичной массы в поле притягивающего ангармонического потенциала $U(\zeta) = -(1/2) \text{sech}^2\zeta$ под действием внешней переменной силы. Заметим, что кроме изменения параметров вихря малые возмущения приводят к излучению вихрем линейных электромагнитных волн. Однако при малых скоростях энергия излучения мала ($\sim \exp(-1/v^2)$) и на временах $t < f^{-2}$ можно пользоваться уравнениями адиабатического приближения. Уравнение, аналогичное (4), возникает также при исследовании взаимодействия солитона нелинейного уравнения Шредингера с осциллирующей примесью [8]. Кроме того, данная задача подобна задаче о распространении луча в среде, показатель преломления которой зависит от пространственных координат [9].

Анализ движения вихря в отсутствие диссипации. Критерий стохастичности движения

В данном разделе мы изучим на основе уравнения (4) движения вихря в случае пренебрежимо малой диссипации, когда можно положить $\Gamma = 0$. Тогда гамильтониан системы можно записать в следующем виде:

$$H = H_0 + fH_1 \\ = (1/2)[(d\zeta/d\tau)^2 - \text{sech}^2(\zeta)] - f \sin(\Omega\tau)\zeta. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала основные черты невозмущенного движения частицы ($f = 0$). Фазовый портрет для данного случая представлен на рис. 1. Сепаратриса (кривая 1), которая определяется соотношениями

$$\zeta = \pm \text{arsh}(\tau), \quad v = \pm(1 + \tau)^{-1/2} \quad (6)$$

разделяет область периодических (финитных) и пролетных (инфинитных) траекторий (кривые 2 и 3 соответственно). Удобно для анализа движения в области $H_0 < 0$ перейти к переменным действие-угол (J, Θ). В результате получим

$$H_0(J) = -(1 - J)^2/2, \quad \omega_0(J) = dH_0/dJ = 1 - J, \quad (7)$$

где $\omega_0(J)$ — частота невозмущенных колебаний.

Значение действия J изменяется от 0 для колебаний возле дна ямы до 1 вблизи сепаратрисы; соответственно

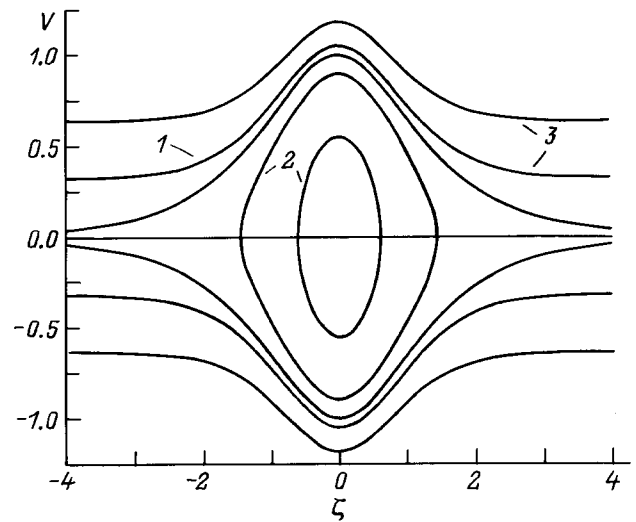


Рис. 1. Фазовый портрет невозмущенной системы (4). Сепаратриса (1) разделяет область периодических (2) и пролетных (3) траекторий.

значение частоты ω_0 изменяется от 1 до 0. При дальнейшем увеличении энергии частицы ($H_0 > 0$) движение становится пролетным.

Внешняя сила нарушает интегрируемость системы и приводит к дополнительному члену в гамильтониане. Следуя подходу, использованному в [9], можно получить следующие соотношения:

$$fH_1(J, \Theta) = -f \sin(\Omega\tau) \text{arsh} \left[a \sin(\Theta)/(1 - a^2)^{1/2} \right] \\ = -f \sin(\Omega t) \sum_{k=0}^{\infty} H_{1,2k+1}(J) \sin[(2k+1)\Theta], \quad (8)$$

где

$$H_{1,2k+1}(J) = \frac{2\Gamma(k+1/2) \cdot \Gamma(k+3/2)a^{2k+1}}{\pi(2k+1) \cdot \Gamma(2k+2)} \\ \times F(k+1/2, k+3/2, 2k+2, a^2), \\ a^2 = J(2 - J),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; $F(a, b, c, d)$ — гипергеометрическая функция.

Из выражения (8) видно, что возмущение имеет только нечетные гармоники по Θ , следовательно, резонансными с внешним возмущением будут те траектории, для которых выполняется соотношение

$$\omega_0(J) = \Omega/n, \quad n = 2k + 1. \quad (9)$$

При учете внешнего воздействия о характере движения проще всего судить по отображению Пуанкаре. Данное отображение определяет последовательность точек, соответствующих сечениям некоторой траектории

Номер резонанса n	Начальная скорость ($x = 0$)	Пороговая амплитуда по (12) f_{th}	Пороговая амплитуда из численного эксперимента f_{th}	Наибольший показатель Ляпунова λ
9	0.9750	0.0262	0.011	$3.52 \cdot 10^{-2}$
7	0.9584	0.0506	0.022	$2.77 \cdot 10^{-2}$
5	0.9166	0.1226	0.058	$5.80 \cdot 10^{-2}$
3	0.7454	0.5106	0.253	$3.94 \cdot 10^{-2}$

в фазовом пространстве уравнения (4) через интервалы времени $2\pi/\Omega$. При малых f , согласно теореме Колмогорова–Арнольда–Мозера, нерезонансные траектории лишь незначительно деформируются (рис. 2, область 1). Вблизи резонансных траекторий, невозмущенная частота которых удовлетворяет условию (9), происходит нелинейный резонанс — расщепление данной траектории. Это приводит к появлению пар особых точек отображения Пуанкаре — эллиптической и гиперболической. На рис. 2 (область 2) представлена сепаратриса нелинейного резонанса для $n = 3$. Используя стандартную технику нелинейного резонанса [10], можно оценить ширину n -го резонанса

$$\Delta\omega = 2[fH_{1,n}(J)|\omega'_0|]^{1/2}, \quad \omega'_0 = d\omega_0(J)/dJ. \quad (10)$$

Расстояние между резонансами по частоте определяется выражением

$$|\delta\omega| = |\omega_{2k+1} - \omega_{2k+3}| = 2\Omega[(2k+1)(2k+3)]. \quad (11)$$

Если увеличивать значение ε , то ширина будет резонанса расти и возможно перекрывание соседних резонансов. В этом случае движение становится хаотическим, т.е. аналогичным движению броуновской частицы (рис. 2, область 3). Согласно критерию Чirikова [11,12], возникновение стохастичности вблизи

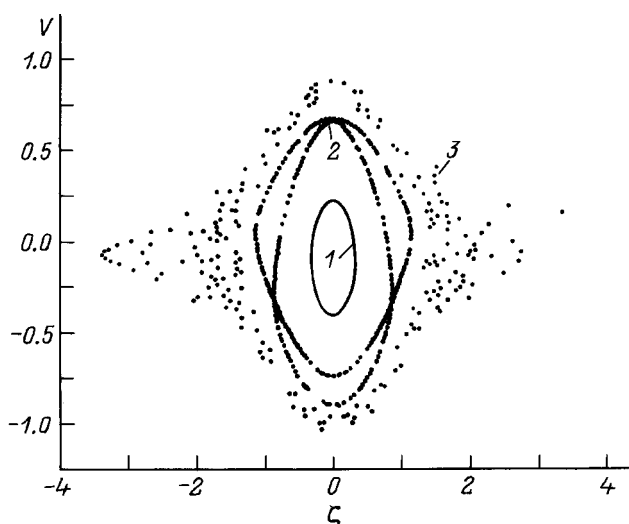


Рис. 2. Отображение Пуанкаре для случая $\Gamma = 0, \Omega = 2, \varepsilon = 0.14$: 1 — нерезонансная траектория, начальные координаты и скорость равны $(0, -0.4)$; 2 — движение вблизи резонанса с $n = 3, (0, -0.898)$; 3 — стохастическое движение и депининг вихря, $(0, -0.957)$.

n -го резонанса происходит при выполнении условия $K = (\Delta\omega/\delta\omega)^2 \geq 1$, или, если использовать уравнения (10), (11), при

$$f \geq f_{th} = \Omega^2/[H_{1,n}n^2(n+2)^2]. \quad (12)$$

Таким образом, почти для всех начальных условий и параметров задачи, удовлетворяющих условию (12), движение вихря будет стохастическим. Здесь необходимо отметить, что даже в области развитой стохастичности всегда присутствуют области регулярного движения.

Для проверки аналитических результатов было проведено численное моделирование методом Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка уравнения (4). Результаты численного счета для $\Omega = 2$ приведены в таблице.

Для количественной оценки степени хаоса определялся наибольший показатель Ляпунова [13], который характеризует локальную неустойчивость траекторий в фазовом пространстве [10]. Если взять начальные точки, расположенные на расстоянии $d(0)$, то расстояние между траекториями в момент времени t можно записать как $d(t) \cong d(0)\exp(\lambda t)$. Если $\lambda < 0$, то движение локально устойчиво и регулярно (периодическое или квазипериодическое), если $\lambda > 0$, то движение локально неустойчиво (хаотическое). В таблице приведены значения λ для различных начальных условий и параметров. Как показывают результаты численного моделирования, критерий перекрывания резонансов дает удовлетворительную оценку возникновения стохастичности. Расхождение аналитических и численных значений связано с тем, что при выводе (12) фактически мы пренебрегаем смещением и шириной соседнего $(n+2)$ -го резонанса.

Отметим, что хаотическое движение в данной системе представляет собой переходный процесс. Вихрь, получивший в процессе диффузии по резонансам достаточное количество энергии, удаляется от неоднородности и движется в дальнейшем как свободная частица. Поэтому критерий стохастичности (12) можно рассматривать и как условие депининга вихря от локальной неоднородности.

Влияние диссипации на движение вихря

В данном разделе мы рассмотрим влияние диссипации ($\Gamma \neq 0$) на особенности возникновения хаоса. При "включении" затухания в системе (4) (вблизи точек $(0, 0), (\pm\infty, 0)$) возникают притягивающие точки отображения Пуанкаре — аттракторы, положение и параметры которых зависят от соотношения параметров Γ, f ,

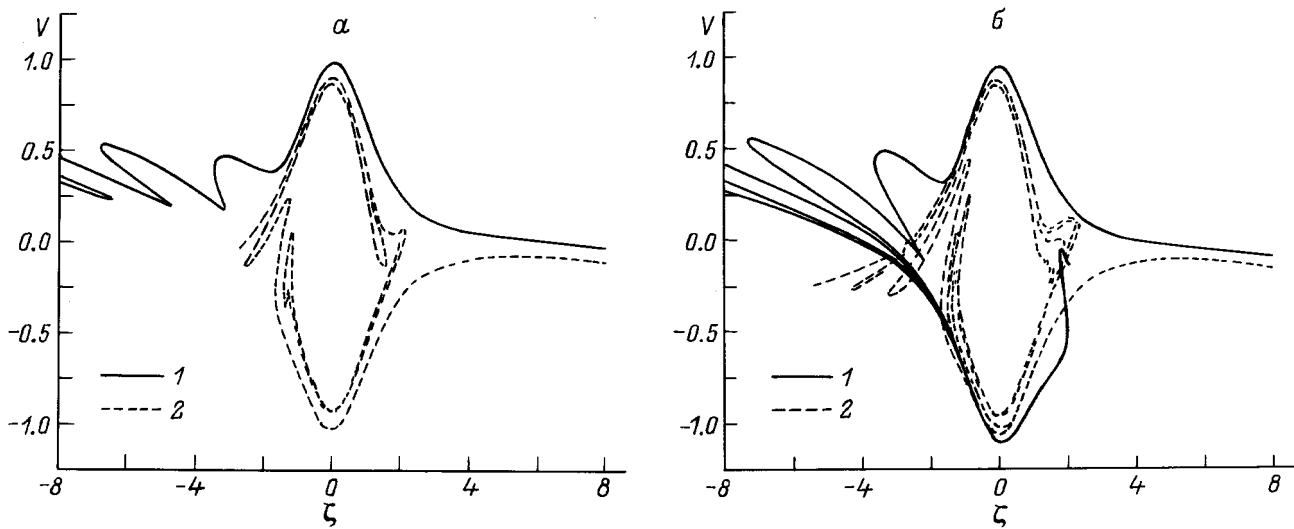


Рис. 3. Инвариантные устойчивое (1) и неустойчивое (2) многообразия уравнения (4) для стационарной точки $x \rightarrow +\infty$ $\Omega = 1$, $\Gamma = 0.02$, пороговая амплитуда $f_c = 0.075$: *a* — непересекающиеся многообразия при $f = 0.06$, *b* — гомоклиническая структура при $f = 0.1$.

Ω . Большинство траекторий притягиваются к основному аттрактору вблизи $(0, 0)$. При увеличении амплитуды внешней силы f окрестность этой точки может стать неустойчивой. Это происходит вследствие образования гомоклинической структуры следующим образом. Точки равновесия $(\pm\infty, 0)$ и сепаратриса (рис. 1, кривая 3) невозмущенной системы (3) порождают неподвижные точки отображения и инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия, связанные с данными точками, в возмущенной системе. При определенных значениях параметров данные многообразия могут пересечься в так называемой гомоклинической точке. Существование одной гомоклинической точки влечет за собой существование бесконечного множества подобных точек [10, 13 с. 88]. Наличие таких точек, или существование гомоклинической траектории, означает локальную неустойчивость фазового пространства, т. е. чувствительность системы к начальным условиям. В данном случае говорят о возникновении гомоклинического хаоса [10, 13]. С этой точки зрения уравнение (4) интересно тем, что в невозмущенной системе отсутствуют гиперболические положения равновесия, хотя гомоклиническая структура, как мы увидим в дальнейшем, возникает. Для получения условий возникновения подобной структуры, а значит, и стохастичности в системе используется метод Мельникова [14]. Он состоит в вычислении функции Мельникова $M(t_0)$, характеризующей расстояние между возмущенными инвариантными многообразиями. Если $M(t_0)$ имеет простые нули, то существует гомоклиническая точка, в которой пересекаются многообразия [14]. Для уравнения (4) $M(t_0)$ есть

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [-\Gamma v_s(t) + f \sin(\Omega(t + t_0))] v_s(t) dt, \quad (13)$$

где v_s — скорость на невозмущенной сепаратрисе (6).

Из условия $M(t_0) \leq 0$ получаем критерий появления стохастического движения вихря

$$f \geq f_c = \pi\Gamma / [2K_0(\Omega)], \quad (14)$$

где $K_0(\Omega)$ — функция Макдональда.

Используя асимптотики $K_0(\Omega)$, можно получить следующие условия:

$$\begin{aligned} f &\geq \Gamma(\pi\Omega/2)^{1/2} \exp(\Omega) \quad \text{при } \Omega \gg 1, \\ f &\geq (\pi\Gamma/2)[\ln(\Omega/2)]^{-1} \quad \text{при } \Omega \ll 1. \end{aligned} \quad (15)$$

На рис. 3 показаны инвариантные многообразия, соответствующие неподвижной точке при $\zeta \rightarrow +\infty$. Видно, что при значениях f , меньших критического, гомоклинические точки отсутствуют (рис. 3, *a*). При $f > f_c$ имеем пересечение инвариантных многообразий. При построении рис. 3 использовалось отображение Пуанкаре достаточно малого отрезка вблизи $\zeta \geq 10$, причем неустойчивое многообразие вычислялось для $\tau > 0$, а устойчивое — для $\tau < 0$. Отметим, что нам известна только одна работа, в которой аналитически и численно показано наличие гомоклинической структуры для инфинитного потенциала (потенциал Морса) [15].

Численное моделирование показывает, что условие (14) достаточно точно определяет пересечение многообразий. Такое пересечение изначально возникает в окрестности невозмущенной сепаратрисы, а затем с ростом f охватывает все большие и большие области фазового пространства. В результате окрестность основного аттрактора также становится неустойчивой, что приводит к хаотичности почти во всем пространстве. Как и в случае $\Gamma = 0$, хаос имеет переходный характер. Однако в данном случае частица, набрав энергию не уходит на бесконечность, а из-за диссипации застревает

на больших $\zeta (d\zeta/d\tau \approx 0)$ и находится там в течение долгого времени. Так как эти расстояния много больше характерного размера влияния неоднородности, то подобный уход также можно интерпретировать как депиннинг вихря от микросопротивления.

Заключение

В настоящей работе показано, что включение стороннего тока $J(t)$ приводит к нетривиальной динамике вихря. При отсутствии тока вихрь будет захватываться микросопротивлением и совершать возле него затухающие колебания. Под действием переменного тока возникают периодические, квазипериодические и стохастические режимы движения. Последние проявляются в том, что вихрь, совершив хаотические колебания возле неоднородности и получив достаточное количество энергии, отрывается от нее. Оценим величины плотности стороннего тока, необходимого для стохастического депиннинга вихря. Примем следующие значения характерных величин ДДП [1,2]: $\omega_p \sim 10^8$ рад/с, $\Gamma \sim 0.01$ ($\alpha, \beta \sim 10^{-3}-10^{-2}$), плотность критического тока $J_c \sim 10^8$ А/м², $\varepsilon \sim 0.1$. Тогда из условий (15) для амплитуды плотности стороннего тока J получим:

1) $\omega_{\text{вн}} \sim (10^{-3}-10^{-2})\omega_p \ll \omega_p\nu_0$ — малые частоты внешнего тока:

$$J \geq 2\nu_0\Gamma |\ln(\Omega/2)|^{-1} J_c \sim 10^5-10^6 \text{ А/м}^2,$$

2) $\omega_{\text{вн}} \sim \omega_p \gg \omega_p\nu_0$ — большие частоты внешнего тока:

$$J \geq 4\nu_0^2\Gamma(2\pi)^{1/2}\Omega^{1/2} \exp(\Omega) J_c \sim 10^7 \text{ А/м}^2,$$

$$\Omega = \omega_{\text{вн}}/(\omega_p\nu_0).$$

Явление стохастического депиннинга вихрей, возможно, будет полезно для определения количественных характеристик локальных неоднородностей в ДДП. Для этого генерируется медленный джозефсоновский вихрь, который захватывается микросопротивлением и из-за затухания локализуется на нем. По значению амплитуды переменного тока, отрывающего кинк от примеси, можно оценить параметр неоднородности ε .

Авторы выражают благодарность Б.А. Умарову за плодотворное обсуждение задачи и Международному научному фонду (грант № MZGOOO, 1994–1995 гг.) за частичную поддержку проведенных исследований.

Список литературы

[1] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985, 320 с.
 [2] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. Физика и применения. М.: Мир, 1984. 639 с.
 [3] McLaughlin D.W., Scott A.C. // Phys. Rev. A. 1978. Vol. 18. P. 1652.

[4] Malomed B.A. // Phys. Lett. A. 1987. Vol. 120. P. 28. Physica D. 1987. Vol. 27. P. 113.
 [5] Bountis T., Pnevmatikos St. // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 143. P. 221.
 [6] Abdullaev F.Kh., Darmanyan S.A., Umarov B.A. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 4498.
 [7] Карпман В.И., Маслов Е.М. // ЖЭТФ. 1977. Вып. 73. С. 537.
 [8] Abdullaev F.Kh., Abdumalikov A.A. // Phys. St. Sol. (b). 1991. Vol. 167. P. 503.
 [9] Абдуллаев С.С., Заславский Г.М. // ЖЭТФ. 1981. Вып. 80. Вып. 2. С. 524.
 [10] Лухтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
 [11] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
 [12] Chirikov B.V. // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 265.
 [13] Стохастические системы. Тематический выпуск. ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 8. С. 6.
 [14] Мельников В.К. // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3.
 [15] Tsironis G.P. Dynamical Studies of the Discrete Nonlinear Schrodinger Equation. Series of Scientific Monographies. Crete, 1994. 121 p.