

01;03

Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса–Френкеля слоя жидкости конечной толщины

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов, Д.Ф. Белоножка

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 апреля 1996 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для спектра капиллярных движений на заряженной плоской поверхности вязкой жидкости, покрывающей твердую подложку слоем конечной толщины. Показано, что для волн, длины которых сравнимы с толщиной слоя, важную роль начинает играть вязкое затухание на твердом дне. Спектр капиллярных движений жидкости, реализующихся в такой системе, ограничен как со стороны высоких, так и со стороны низких волновых чисел. Декременты затухания капиллярных движений жидкости с длинами, сравнимыми с толщиной слоя, значительно увеличиваются, а инкременты неустойчивости Тонкса–Френкеля снижаются по сравнению с жидкостью бесконечной глубины.

Введение

В различных научных, технических и технологических задачах приходится иметь дело с неустойчивостью заряженной поверхности жидкости (неустойчивость Тонкса–Френкеля (НТФ)) конечной глубины. Это задачи об устойчивости водяного слоя на поверхности ледяного ядра (тающей градины) в грозовом облаке или в жидкостном масс-спектрометре вакуумного типа; проблема устойчивости слоя жидкого металла в жидкометаллических источниках ионов, где имеет место электродиспергирование с боковой поверхности иглы эмиттера, по которой подается жидкий металл (см., например, [1]). В связи со сказанным представляет интерес задача о расчете капиллярных колебаний и электростатической неустойчивости слоя жидкости конечной толщины. Подобная задача уже рассматривалась ранее в работах [2–5], которые, однако, не решили проблемы: в работе [2] допущена ошибка — потеряно одно слагаемое в дисперсионном уравнении. В работах [3–5] рассмотрены лишь асимптотические случаи. В [3] проанализированы ситуации весьма большой и очень малой толщины слоя жидкости при большой и нулевой вязкости, причем асимптотическое выражение дисперсионного уравнения для тонких слоев жидкости выписано некорректно. Промежуточные ситуации, представляющие наибольший интерес для практики, не рассмотрены. В [4] в приближении идеальной жидкости исследовано влияние раскливающего давления на устойчивость заряженного тонкого жидкого слоя. В [5] задача решена для тонких слоев маловязких жидкостей.

1. Будем решать задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской заряженной поверхности идеально проводящей жидкости конечной глубины d с плотностью ρ , вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ , в поле тяжести g и в электростатическом поле. Верхняя среда обладает диэлектрической проницаемостью ϵ . Напряженность электрического поля E у поверхности жидкости определяется

разностью потенциалов между электродами: нижним, расположенным при $z = -d$, на котором лежит слой жидкости, поддерживаемым при потенциале $\Phi_1 = 0$, и параллельным ему противоэлектродом, отстоящим от поверхности жидкости на b , имеющим потенциал $\Phi_2 = V$.

Расположим декартову систему координат так, чтобы ось z была направлена вертикально в верх $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ (\mathbf{n}_z — орт декартовой координаты z), а ось x — по направлению движения плоской капиллярной волны $\sim \exp(st + ikx)$. Примем также, что плоскость $z = 0$ совпадает со свободной невозмущенной поверхностью жидкости (s — комплексная частота, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица). Пусть функция $\xi(x, t) = \xi_0 \exp(st + ikx)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением весьма малой ($\xi_0 \sim (kT/\gamma)^{1/2}$) амплитуды; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением $\xi(x, t)$, имеющее тот же порядок малости.

Для упрощения дальнейших рассуждений обезразмерим все величины на их характерные значения, принимая $g = \rho = \gamma = 1$,

$$d_* = \left(\frac{\rho g}{\gamma}\right)^{-1/2}, \quad \nu_* = \left(\frac{\gamma^3}{\rho^3 g}\right)^{1/4}, \quad k_* = \left(\frac{\rho g}{\gamma}\right)^{1/2},$$

$$s_* = \left(\frac{\rho g^3}{\gamma}\right)^{1/2}, \quad W_* = \sqrt{\rho g \gamma}.$$

Линеаризованная система уравнений гидродинамики вязкой жидкости (за всеми безразмерными величинами сохраняем прежние обозначения), описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$z = -d: \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$z = 0: -\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} + U_z = 0, \quad (4)$$

$$z = 0: \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$z = 0: -P(\mathbf{U}) + \rho g \xi + 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_i = 0, \quad \mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

$$z = -d: \Phi_1 = 0, \quad (8)$$

$$z = b: \Phi_2 = V, \quad (9)$$

$$z = \xi: \Phi_1 = \Phi_2, \quad (10)$$

$P(\mathbf{U})$, $P_E(\xi)$, $P_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ , имеющие первый порядок малости по ξ [6,7]; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные вектора нормали и касательной к поверхности жидкости; индекс 1 относится к жидкости, 2 — к внешней среде.

2. Двумерность задачи (возмущение формы поверхности $\xi(x, t)$ и поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ считаем независимыми от координаты y) позволяет провести скаляризацию задачи на основе теоремы Гельмгольца, вводя потенциал поля скоростей $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и функцию тока $\psi(\mathbf{r}, t)$ [6],

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{N}}_1 \varphi + \hat{\mathbf{N}}_2 \psi. \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv [\nabla, \mathbf{n}_y],$$

\mathbf{n}_y — орт декартовой координаты y ; $\hat{\mathbf{N}}_1$ и $\hat{\mathbf{N}}_2$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа. Эрмитов оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а антиэрмитовый $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую.

Подставляя разложение (11) в векторные уравнения (1), (2) и приняв собственные значения операторов $\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1$ отличными от нуля, получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi = 0, \quad (12)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad (13)$$

$$P(\mathbf{U}) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g z. \quad (14)$$

Подставив разложение (11) в (3)–(6), преобразуем граничные условия для векторного поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в граничные условия для скалярных функций $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$. Условие (3) на нижнем электроде преобразуется в условия

$$z = -d: \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Условия (4)–(6) на свободной поверхности жидкости примут вид

$$z = 0: \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi + 2\rho \nu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0. \quad (19)$$

Система уравнений (12)–(14) с граничными условиями (15)–(19) представляет гидродинамическую часть задачи в скаляризованном виде.

Чтобы удовлетворить динамическому граничному условию для нормальных компонент тензора напряжений (19), следует воспользоваться выражением (A19) для $P_E(\xi)$, полученным в Приложении, и известным выражением для добавки к давлению сил поверхностного натяжения P_σ , имеющим в линейном по ξ приближении вид [6],

$$P_\sigma(\xi) \approx -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

3. Ограниченные, периодические по x решения системы (12), (13) в декартовой системе координат будем искать в форме

$$\varphi = (C_1 \operatorname{sh}(mz) + C_2 \operatorname{ch}(mz)) \exp(st - ikx), \quad (20)$$

$$\psi = (C_3 \operatorname{sh}(qz) + C_4 \operatorname{ch}(qz)) \exp(st - ikx), \quad (21)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, s — комплексные величины.

Подстановка (23), (24) в граничные условия (15)–(19) приводит к однородной системе пяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_1, C_2, C_3, C_4, \xi_0$

$$GC_1 + 2\rho \nu q C_3 + F \xi_0 = 0,$$

$$2\rho \nu k C_2 + GC_4 = 0,$$

$$-C_1 \operatorname{sh}(kd) + C_2 \operatorname{ch}(kd) - C_3 \operatorname{sh}(qd) + C_4 \operatorname{ch}(qd) = 0,$$

$$kC_1 \operatorname{ch}(kd) - kC_2 \operatorname{sh}(kd) + qC_3 \operatorname{ch}(qd) - qC_4 \operatorname{sh}(qd) = 0,$$

$$C_2 + C_4 - s \xi_0 = 0,$$

где

$$G = \frac{\rho \nu}{k} (k^2 + q^2), \quad q^2 = k^2 + s/\nu,$$

$$F = \rho g + \gamma k^2 - \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi} k \operatorname{cth}(kb).$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения полученной системы уравнений является равенство нулю ее определителя, составленного из коэффициентов, стоящих при искомым

величинах C_i и ξ_0 ,

$$\begin{vmatrix} G & 0 & 2\rho\nu q & 0 & F \\ 0 & 2\rho\nu q & 0 & G & 0 \\ -\text{sh}(kd) & \text{ch}(kd) & -\text{sh}(qd) & \text{ch}(qd) & 0 \\ k \text{ch}(kd) & -k \text{sh}(kd) & q \text{ch}(qd) & -q \text{sh}(qd) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие дает дисперсионное отношение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе

$$\begin{aligned} &4qk^2(k^2 + q^2) + (k^2 + q^2)^2 \\ &\times (k \text{sh}(kd) \text{sh}(qd) - q \text{ch}(kd) \text{ch}(qd)) \\ &+ 4k^3q(q \text{sh}(kd) \text{sh}(qd) - k \text{ch}(kd) \text{ch}(qd)) \\ &- \frac{Z(k)}{\nu^2}(q \text{ch}(qd) \text{sh}(kd) - k \text{ch}(kd) \text{sh}(qd)) = 0, \\ &Z(k) \equiv k + k^3 - Wk^2 \text{cth}(kb), \\ &W = \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi}, \quad E_0 = -V/b. \end{aligned} \quad (22)$$

В предельном случае бесконечно глубокой идеальной жидкости (22) записывается совсем просто

$$s^2 = \frac{k}{\rho} (\varepsilon E_0^2 k \text{cth}(kb) - \rho g - \gamma k^2)$$

и определяет критические условия реализации НТФ. Это соотношение аналогично выражению, полученному в [7] для идеальной, идеально проводящей жидкости, и отличающемуся от него лишь множителем $\text{cth}(kb)$, учитывающим конечность расстояния до верхнего электрода. Это незначительное, на первый взгляд, обстоятельство приводит к интересным физическим последствиям, а именно указывает на зависимость критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости от расстояния до верхнего противозэлектрода b , которая становится заметной при k сравнимом с b .

4. Кратко проанализируем дисперсионное соотношение (22) и рассмотрим некоторые его асимптотические формы. Несложно видеть, что если (k, q) — решение (22), то $(k, -q)$ и (k, \bar{q}) — также решения (22) в силу свойств гиперболических функций [8] (\bar{q} — величина, комплексно сопряженная q). Тривиальным решением (22) является $q = 0$. Кроме того, $q = k$ — всегда решение (22). Действительно, подстановка $q = k$ в (22) приводит к равенству

$$\begin{aligned} &8q^5 + 4q^4(q \text{sh}^2(qd) - q \text{ch}^2(qd)) \\ &+ 4q^4(q \text{sh}^2(qd) - q \text{ch}^2(qd)) \\ &- \frac{Z(k)}{\nu^2}(q \text{ch}(qd) \text{sh}(qd) - q \text{ch}(qd) \text{sh}(qd)) = 0, \end{aligned}$$

которое является тождеством в силу известной связи гиперболических синуса и косинуса. Таким образом,

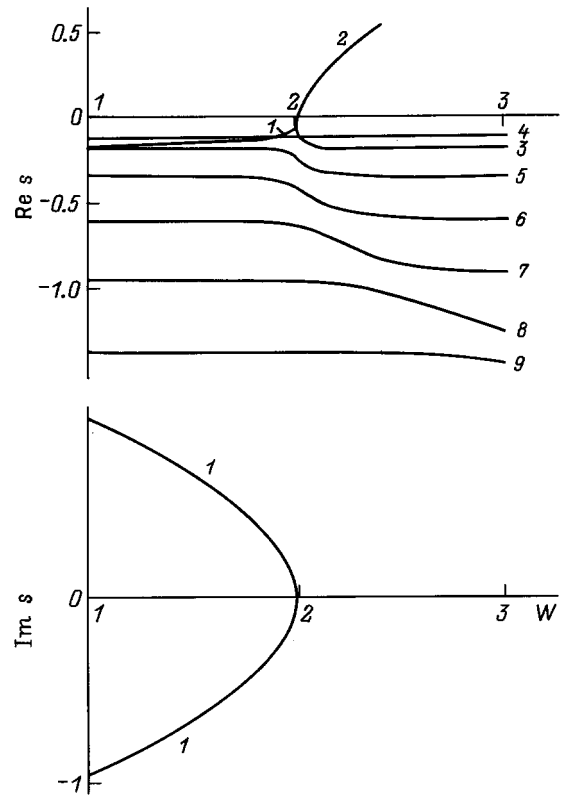


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты s капиллярного движения жидкости от величины безразмерного параметра W , характеризующего давление электрического поля на свободную поверхность жидкости. $b = 10, k = 1, \nu = 0.1, d = 5$.

простейшими очевидными решениями (22) являются $s = 0$ ($q = k$) и $s = -\nu k^2$ ($q = 0$). Число нетривиальных корней дисперсионного уравнения, в случае когда вязкость и глубина жидкого слоя — ненулевые ограниченные величины, составляет бесконечное счетное множество. Первые два (в порядке возрастания их вещественных компонент) из этого множества определяют потенциально-вихревые движения, подобные существующим в бесконечно глубокой жидкости, а остальные — аperiodически затухающие вихревые движения, возникающие вследствие взаимодействия течений с дном.

Рассмотрим переход от анализируемой ситуации слоя жидкости конечной глубины с твердым плоским дном к бесконечно глубокой жидкости. При $d \rightarrow \infty$: $\text{cth}(kd) \rightarrow 1, \text{cth}(qd) \rightarrow 1$ и дисперсионное уравнение (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{k^2 + s/\nu} - k \right) \left\{ 4k^3 \sqrt{k^2 + s/\nu} \right. \\ &\left. - (2k^2 + s/\nu)^2 - \frac{Z(k)}{\nu} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Нетривиальные решения определяются множителем в фигурных скобках. Несложно видеть, что при предельном переходе к бесконечно глубокому слою тривиальное

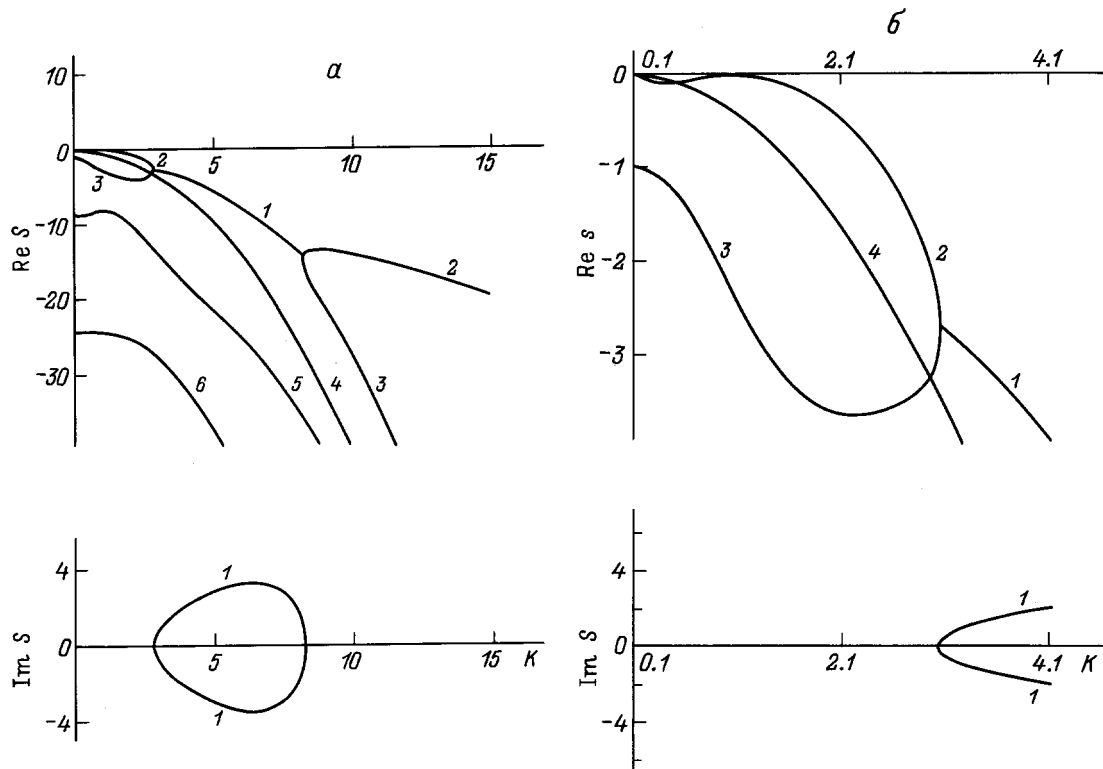


Рис. 2. Зависимости вещественной и мнимой компонент частоты s от волнового числа k при $b = 10, \nu = 0.4, d = 1, W = 2$ (а) и левая часть рис. 2, а, представленная с бóльшим разрешением (б).

решение $s = 0$ сохраняется, а бесконечное счетное множество нетривиальных решений редуцируется к четырем, из которых лишь два лежат на верхнем листе двулистной римановой поверхности, на которой определено все выражение (23), и, следовательно, наблюдаемы.

В приближении слоя жидкости малой глубины $d \ll 1$ произведение qd будем считать малым и примем в (22) $\text{ch}(qd) \approx 1, \text{sh}(qd) \approx qd$, что позволяет переписать (22) в виде

$$\begin{aligned} & \sqrt{k^2 + s/\nu} \left\{ 4k^2 \left(2k^2 + \frac{s}{\nu} \right) + \left(2k^2 + \frac{s}{\nu} \right)^2 \right. \\ & \times (kd \text{sh}(kd) - \text{ch}(kd)) \\ & + 4k^3 \left(\left(k^2 + \frac{s}{\nu} \right) d \text{sh}(kd) - k \text{ch}(kd) \right) \\ & \left. - \frac{Z(k)}{\nu^2} (\text{sh}(kd) - kd \text{ch}(kd)) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Несложно видеть, что простейшие решения уравнения (22) сохраняются.

Если принять $kd \approx qd$ (т.е. если проводить анализ в окрестности решения $s = 0$), то в (24) следует пренебречь членами $kd \text{sh}(kd) \approx k^2 d^2$ и положить $\text{ch}(kd) = 1$. В этом приближении получим дисперсионное уравнение, имеющее лишь простейшие решения

$$q(k^2 - q^2)^2 = 0.$$

Нетривиальные решения уравнения (24), определяющиеся множителем в фигурных скобках, являются корнями квадратного уравнения и могут быть легко выписаны

$$s_{1,2} = -2k^2\nu(1 + AB) \pm \sqrt{4k^4\nu^2(AB - 2A - 1) - Z(k)AC},$$

$$A = 1/(dk \text{sh}(kd) - \text{ch}(kd)), \quad B = 1 + dk \text{sh}(kd),$$

$$C = dk \text{ch}(kd) - \text{sh}(kd).$$

Таким образом, в приближении тонкого слоя сохраняются оба простейших решения и только два нетривиальных, которые в зависимости от величин физических параметров могут быть и вещественными, и комплексными, т.е. могут определять аperiodические и волновые потенциально-вихревые движения, аналогичные движениям в бесконечно глубокой жидкости. Аperiodически затухающие вихревые движения, связанные с наличием дна, в анализируемом приближении пропадают.

Поскольку попытка предельного перехода к бесконечно тонкому слою, когда $kd \approx qd$ (при $\text{sh}(kd) \approx kd, \text{ch}(kd) \approx 1$ ($d \rightarrow 0$)), приводит к дисперсионному уравнению, имеющему лишь тривиальные решения, проанализируем этот случай, сохраняя малые величины до третьего по порядку малости,

$$\text{sh}(kd) \approx kd + \frac{k^3 d^3}{6}, \quad \text{ch}(kd) \approx 1 + \frac{k^2 d^2}{2}.$$

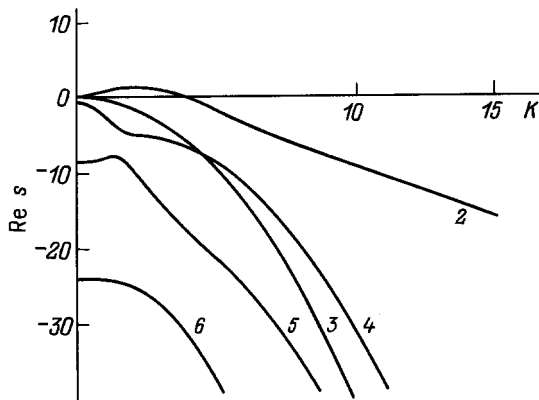


Рис. 3. Зависимости вещественной компоненты s от волнового числа k при $b = 10, \nu = 0.4, d = 1, W = 4$.

Подставим эти разложения в (22) и запишем получающееся уравнение в виде, содержащем s в явной форме,

$$\frac{s}{\nu} \sqrt{k^2 + s/\nu} \left\{ \frac{s}{2\nu} \left(\frac{s}{\nu} + 4k^2 \right) + \frac{s}{\nu} + \frac{Z(k)kd^3}{3\nu^2} \right\} = 0.$$

Видно, что это уравнение содержит оба простейших решения и два нетривиальных, определяемых квадратным уравнением с коэффициентами, зависящими от различных степеней малого параметра,

$$s^2 \frac{d^2}{2\nu^2} + \frac{s}{\nu} (1 + 2d^2k^2) + \frac{Z(k)}{3\nu^2} kd^3 = 0. \quad (25)$$

Оба корня уравнения (25)

$$s_{1,2} = \nu \left(\frac{1}{d^2} + 2k^2 \right) \pm \sqrt{\nu^2 \left(\frac{1}{d^2} + 2k^2 \right)^2 - \frac{2}{3} Z(k)kd}, \quad (26)$$

так же как и решения уравнения (24), сводящиеся к (26), описывают потенциально-вихревые движения жидкости.

В проведенном анализе бросается в глаза то обстоятельство, что все решения дисперсионного уравнения для жидкости любой конечной глубины определены на верхнем листе римановой поверхности и теоретически могут быть наблюдаемы. В случае же жидкости бесконечной глубины имеются и ненаблюдаемые решения, определяемые на нижнем листе двулистной римановой поверхности.

5. Численный анализ дисперсионного уравнения (22) показывает, что оно имеет бесконечное однопараметрическое семейство решений (количество ветвей с номерами, большими 3, и с ординатами, увеличивающимися по абсолютной величине по мере увеличения номера ветви бесконечно) (рис. 1) в отличие от дисперсионного уравнения для жидкости бесконечной глубины [9], спектр капиллярных движений которой описывается кривыми 1–3 на рис. 1. С математической точки зрения это обстоятельство связано с появлением в рассматриваемой ситуации в дисперсионном уравнении гиперболических функций от комплексной частоты. С физической точки

зрения появление бесконечного семейства аperiodически сильно затухающих движений связано с отражением движущейся жидкости от дна. Кривая 2 на рис. 1, в области $Re s > 0$, определяет инкремент неустойчивости заряженной поверхности жидкости (инкремент НТФ). Кривая 1 описывает затухающее волновое движение. Кривая 3, так же как и часть кривой 2, в области $Re s < 0$ определяет затухающие аperiodические движения жидкости. Все новые по сравнению со случаем бесконечно глубокой жидкости ветви дисперсионного уравнения определяют вихревые сильно аperiodически затухающие движения.

Влияние конечности толщины слоя на параметры движений жидкости существенно сказывается, когда она становится сравнимой с длиной волны, как это видно из рис. 2, 3, где приведены зависимости комплексной частоты от волнового числа для докритических и закритических значений электрического поля у поверхности жидкости. На рис. 2, б приведена левая часть рис. 2, а в более крупном масштабе, чтобы было видно, как происходит переход от состояния устойчивых капиллярных движений жидкости к НТФ, которая реализуется при $W > 2$. При этом часть ветви 2, касающаяся при $k = 1$ оси абсцисс, поднимается над нею и дает инкремент нарастания НТФ, как это видно на рис. 3, где приведена зависимость $Re s = Re s(k)$ при $W = 4$.

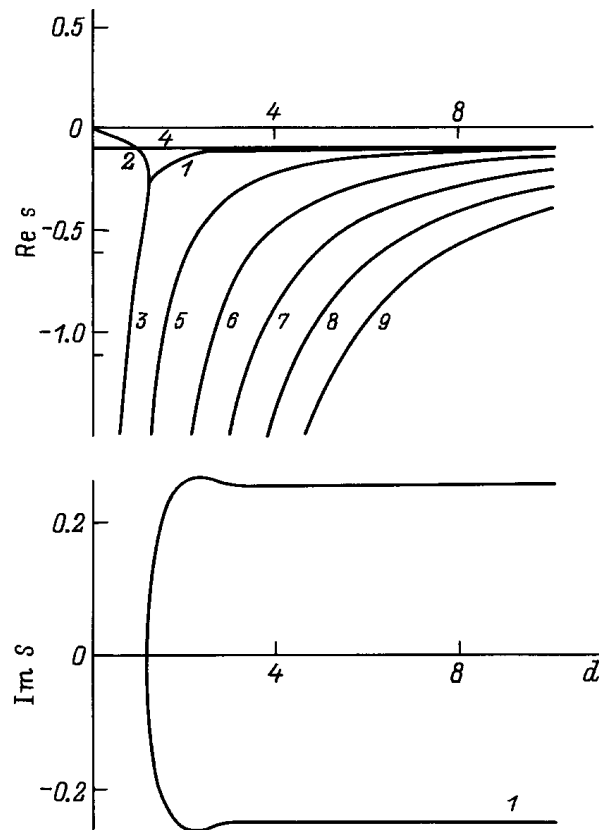


Рис. 4. Зависимости вещественной и мнимой компонент s от глубины слоя жидкости d для $k = 1, b = 10, \nu = 0.1, W = 1.9$.

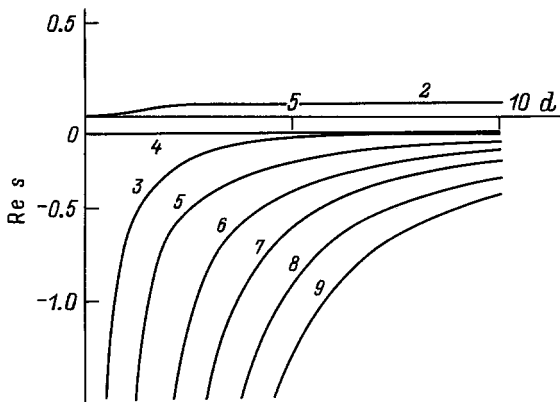


Рис. 5. Зависимости вещественной компоненты s от глубины слоя жидкости d для $k = 1$, $b = 10$, $\nu = 0.1$, $W = 2.02$.

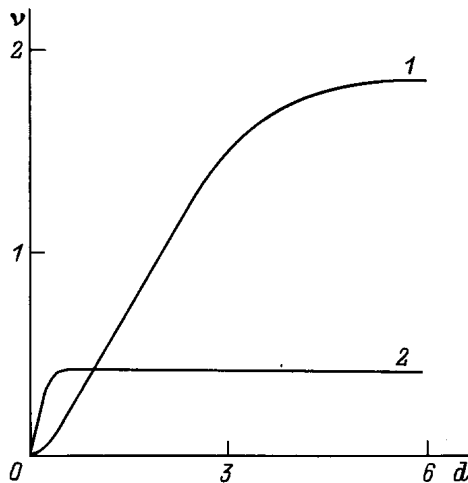


Рис. 6. Зависимости вязкости от толщины слоя жидкости, при которой прекращается капиллярное волновое движение, при $b = 10$, $W = 0$; $k = 1$ (1), 10 (2).

На рис. 4, 5 приведены зависимости комплексной частоты от глубины слоя жидкости d для $k = 1$ при докритическом ($W = 1.9$) и закритическом ($W = 2.02$) значениях электрического поля у поверхности жидкости. Видно, что и инкремент НТФ, и частоты капиллярных волн, и декременты затухания аperiодических вихревых движений жидкости зависят от d . Причем эта зависимость наиболее существенна при $d < 2$. Расчеты зависимости комплексной частоты от вязкости в докритическом и закритическом режимах показывают, что с увеличением вязкости декременты затухающих движений растут и инкремент НТФ убывает.

Тот факт, что на условие существования капиллярных волн влияют и вязкость, и толщина слоя, подтверждает и зависимость, приведенная на рис. 6, которая для $k = 1$ (кривая 1) и 10 (кривая 2) при фиксированной толщине слоя определяет характерную вязкость полного исчезновения капиллярного волнового движения. Геометрическое место точек, находящихся выше кривой,

соответствует ситуации, когда капиллярное волновое движение с данным волновым числом отсутствует, ниже кривой оно существует. Как видно из графика, влияние толщины слоя становится заметным при $d < \lambda$ и слабо сказывается при $d > \lambda$.

Заключение

Из вышеприведенного анализа следует, что утоньшение заряженного слоя жидкости до толщины, сравнимой с рассматриваемой длиной волны, приводит к увеличению декрементов всех затухающих движений жидкости и к снижению инкремента НТФ. Уменьшение толщины слоя жидкости приводит также к сужению спектра реализующихся в нем волновых движений за счет ограничения как со стороны высоких, так и со стороны низких значений волновых чисел. Сужается и спектр значений волновых чисел, характеризующих движения, принимающие участие в реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля. Волновое число наиболее неустойчивой моды увеличивается с увеличением напряженности электрического поля у поверхности жидкости и с уменьшением толщины слоя.

Приложение А

Решим задачу о расчете электрического давления на поверхность слоя жидкости в вышеописанной геометрии. Математическая формулировка задачи расчета электрического поля между электродами имеет вид (7)–(10). Известный факт отсутствия электрического поля в проводнике позволяет сразу принять, что в жидком слое потенциал электрического поля $\Phi_1 = \text{const} = 0$. Поэтому решаемая задача редуцируется к более простой задаче определения электрического потенциала Φ_2 в области между возмущенной поверхностью жидкости и плоским противоз электродом

$$\Delta \Phi_2 = 0, \quad (\text{A1})$$

$$z = \xi: \quad \Phi_2 \equiv 0, \quad (\text{A2})$$

$$z = b: \quad \Phi_2 \equiv V. \quad (\text{A3})$$

Будем искать Φ_2 в виде

$$\Phi_2 = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}, \quad (\text{A4})$$

где $\Phi^{(0)}$ — стационарное решение, получающееся при $\xi \equiv 0$; $\Phi^{(1)}$ — малая добавка к $\Phi^{(0)}$, происходящая из-за деформации поверхности $\xi(x, t)$ и имеющая тот же порядок малости.

Раскладывая граничное условие (A2) в окрестности невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$ в линейном по ξ и $\Phi^{(1)}$ приближении

$$z = 0: \quad \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \xi \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \equiv 0 \quad (\text{A5})$$

и подставляя (A4) в (A1), (A3), (A5), несложно получить задачи для нахождения потенциалов в нулевом $\Phi^{(0)}$ и в первом $\Phi^{(1)}$ приближениях

$$\Delta\Phi^{(0)} = 0, \quad (\text{A6})$$

$$z = 0: \Phi^{(0)} \equiv 0, \quad (\text{A7})$$

$$z = b: \Phi^{(0)} \equiv V, \quad (\text{A8})$$

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0, \quad (\text{A9})$$

$$z = 0: \Phi^{(1)} \equiv -\xi \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial z}, \quad (\text{A10})$$

$$z = b: \Phi^{(1)} \equiv 0. \quad (\text{A11})$$

Ясно также, что $\Phi^{(1)}$ следует искать в классе функций ограниченных и периодических по x .

Решение задачи нулевого приближения имеет вид

$$\Phi^{(0)} = -E_0 z, \quad E_0 = -V/b. \quad (\text{A12})$$

Решение задачи первого приближения ищем в форме

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = \Phi_*^{(1)}(x, z) \exp(mt),$$

что после подстановки в (A9)–(A11) дает

$$\Phi^{(1)} = -\frac{E_0 \xi}{\text{sh}(kb)} \text{sh}[k(z-b)]. \quad (\text{A13})$$

Окончательно решение задачи (A1)–(A3) с точностью до малых первого порядка имеет вид

$$\Phi = -E_0 z + \frac{E_0 \xi}{\text{sh}(kb)} \text{sh}[k(z-b)]. \quad (\text{A14})$$

Для проекций вектора напряженности электрического поля на оси, необходимых для записи выражения для давления электрического поля на поверхность жидкости, найдем

$$E_x = -\frac{ikE_0 \xi}{\text{sh}(kb)} \text{sh}[k(z-b)], \quad (\text{A15})$$

$$E_z = E_0 + \frac{kE_0 \xi}{\text{sh}(kb)} \text{ch}[k(z-b)]. \quad (\text{A16})$$

В окрестности невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$ необходимые для работы с динамическим граничным условием компоненты вектора напряженности электрического поля на возмущенной поверхности запишутся в виде

$$E_x = ikE_0 \xi, \quad (\text{A17})$$

$$E_z = E_0 (1 + k\xi \text{cth}(kb)). \quad (\text{A18})$$

Эти величины определяют компоненты максвеловского тензора напряжений

$$\Pi_{ik} = \varepsilon E_i E_k - \frac{\varepsilon}{2} E^2 \delta_{ik}$$

на возмущенной поверхности жидкости

$$-\Pi_{zz} = \Pi_{xx} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{E_0^2}{2} + E_0^2 k \xi \text{cth}(kb) \right),$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yz} = \Pi_{yy} = 0, \quad \Pi_{xz} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_0^2 ik \xi.$$

Принимая во внимание, что орт \mathbf{n} нормали к возмущенной волновым движением плоской свободной поверхности жидкости в линейном по малому параметру приближении записывается в виде

$$\mathbf{n} = ik\xi \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_z,$$

и сохраняя слагаемые нулевого и первого порядков малости, несложно получить выражение для плотности потока импульса, втекающего в жидкость (т.е. для силы, действующей на единицу площади поверхности),

$$\Pi_{ik} n_k = \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} \left(ik\xi \mathbf{n}_x + (1 + 2k\xi \text{cth}(kb)) \mathbf{n}_z \right).$$

Умножая скалярно этот вектор на вектор нормали \mathbf{n} , в линейном по ξ приближении легко найти выражение для давления электрического поля на свободную поверхность жидкости в рассматриваемой системе электродов, происходящее из-за возмущения $\xi(x, t)$,

$$P_E(\xi) = \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} (1 + 2k\xi \text{cth}(kb)). \quad (\text{A19})$$

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] He J., Miskovsky N.M., Citler P.H., Chung M. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 4. P. 1475–1482.
- [3] Surgy N.G., Chabrerie J.-P., Denoux O., Wesfreid J.E. // J. Phys. II (France). 1990. Vol. 3. N 8. P. 1201–1225.
- [4] Grigor'ev A.I., Munchiev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
- [5] Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1990. Вып. 60. № 6. С. 29–36.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 661 с.
- [8] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1980. 976 с.
- [9] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Вып. 62. № 9. С. 12–21.