

04;10

Определение конечного равновесного радиуса и прироста эмиттанса неподстроенного к равновесным условиям релятивистского электронного пучка при транспортировке вдоль внешнего магнитного поля в газоплазменной рассеивающей среде

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
 Научно-исследовательский институт математики и механики им. акад. В.И. Смирнова,
 198904 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 26 декабря 1995 г.)

С помощью уравнения для эволюции поперечной энергии сегмента параксиального осесимметричного релятивистского электронного пучка (РЭП), распространяющегося в рассеивающей газоплазменной среде вдоль внешнего магнитного поля, найдено уравнение, связывающее значение конечного равновесного радиуса пучка с его начальным неравновесным значением. Для рассматриваемого случая найдено аналитическое выражение для прироста среднеквадратичного эмиттанса РЭП в процессе транспортировки пучка до момента достижения равновесного состояния. Исследована зависимость конечного равновесного радиуса и соответствующего прироста среднеквадратичного эмиттанса от плотности рассеивающей среды и индукции внешнего магнитного поля.

В последнее время внимание исследователей все больше привлекают вопросы динамики транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в газоплазменных средах в режиме самофокусировки [1–10]. При экспериментальных и численных исследованиях распространения РЭП в указанных средах зачастую наблюдается начальное отклонение параметров пучка от их равновесных значений. В частности, малое несоответствие радиуса РЭП равновесному условию при инжекции может привести к развитию резистивной перетяжечной неустойчивости пучка, которая характеризуется быстросрастающими радиальными пульсациями [2,4,6,10]. Однако, как показывают численное моделирование и аналитическая теория, перетяжечная мода в широком диапазоне параметров пучка и фоновой газоплазменной среды подавляется и пучок приходит к некоторому равновесному состоянию [1,6,10]. В связи с этим представляют определенный интерес теоретическое предсказание конечного равновесного радиуса РЭП, а также прироста среднеквадратичного эмиттанса пучка за время его эволюции к конечному равновесному состоянию. Указанная проблема ранее рассматривалась в работах [4,5]. Однако в [4,5] не изучалось влияние внешнего продольного магнитного поля, а также процесса многократного кулоновского рассеяния частиц пучка на атомах фонового газа (которые часто приходится учитывать на практике), на значение конечного равновесного радиуса пучка и прирост его эмиттанса.

Настоящая работа посвящена выводу обобщенных уравнений для определения конечного равновесного радиуса и соответствующего прироста среднеквадратичного эмиттанса с учетом влияния внешнего магнитного поля и процесса рассеяния в фоновой газоплазменной среде.

Рассмотрим моноскоростной азимутально-симметричный параксиальный РЭП, распространяющийся вдоль

постоянного внешнего магнитного поля с индукцией B_0 в рассеивающей газоплазменной среде. Цилиндрическую систему координат (r, Θ, z) выберем так, что вектор B_0 параллелен оси z . Предполагается, что имеют место частичная зарядовая компенсация с коэффициентом f_c и частичная магнитная (токовая) нейтрализация с соответствующим коэффициентом f_m . Кроме того, для простоты будем считать, что потери энергии частиц пучка на рассматриваемых дистанциях транспортировки РЭП отсутствуют, а также коэффициенты нейтрализации f_c и f_m , полный ток пучка I_b и индукция внешнего магнитного поля являются константами по времени, а именно

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{d(\chi T_B)}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_c}{dt} = 0, \quad (1)$$

где $\chi = (1 - f_m) - (1 - f_c)/\beta^2$, $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная скорость электронов пучка, c — скорость света); $T_B = e\beta I_b/(2c)$ — эффективная температура Беннета, характеризующая эффект самофокусировки пучка собственным электромагнитным полем; $\Omega_c = eB_0/(\gamma mc)$ — циклотронная частота частиц пучка во внешнем магнитном поле B_0 ; m, e — масса и заряд электрона.

Далее будем предполагать, что удвоенный среднеквадратичный радиус пучка R_i при инжекции не соответствует равновесному значению R_0 на малую величину δR_0 ,

$$R_i = R_0 + \delta R_0, \quad (2)$$

где $|\delta R_0|/R_0 \ll 1$.

Заметим, что при выполнении условий (1) интегралом движения поперечного сегмента пучка, характеризуемого временем инжекции τ , для рассматриваемых пучков является поперечная энергия сегмента пучка Ψ , определяемая следующим образом [1]:

$$\Psi = \varepsilon_{\perp} + A_{\beta}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = \int dr_{\perp} \chi \frac{\tilde{p}^2}{2m\gamma}, \quad (4)$$

$$A_{\beta} = -\frac{1}{2} \int dr_{\perp} \chi e\beta \frac{\varkappa}{(1-f_m)} A_z \quad (5)$$

— соответственно средняя поперечная кинетическая энергия частиц в сегменте и средняя потенциальная энергия частиц сегмента в коллективном электромагнитном поле системы плазма–пучок. Здесь $\chi = J_b(r)/I_b$, $J_b(r)$ — радиальный профиль плотности тока пучка, I_b — полный ток РЭП, \tilde{p}^2 — усредненный среднеквадратичный импульс частиц пучка в сегменте, A_z — z -компонента векторного потенциала коллективного электромагнитного поля.

Обобщая кинетическую теорию Э. Ли [1] для параксиальных РЭП на случай влияния внешнего продольного магнитного поля, можно получить уравнение для эволюции поперечной энергии сегмента пучка в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} = & -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + A_{\beta} \frac{d \ln(\varkappa T_B)}{dt} \\ & - \frac{1}{2\gamma} \frac{d(\Omega_c \gamma)}{dt} m\gamma L + \int dr_{\perp} \chi S, \end{aligned} \quad (6)$$

где S — величина, характеризующая темп закачки энергии в поперечное движение частиц пучка в результате многократного кулоновского рассеяния электронов РЭП на атомах фоновой газоплазменной среды; L — средний угловой момент частиц рассматриваемого сегмента.

При наличии упрощающих предположений (1) уравнение (6) сводится к простому виду

$$\Psi_f - \Psi_i = \gamma m (\beta c)^3 \sigma_s n_g t_f, \quad (7)$$

где Ψ_f и Ψ_i — соответственно значения поперечной энергии сегмента пучка в конечном равновесном состоянии и при инжекции РЭП, σ_s — транспортное сечение многократного кулоновского рассеяния на малые углы частиц пучка на атомах фонового газа, n_g — концентрация атомов фоновой среды, t_f — время выхода на равновесное состояние.

Нетрудно видеть, что при отсутствии рассеяния ($\sigma_s = 0$) Ψ является интегралом движения для рассматриваемого сегмента пучка. Эта ситуация при $B_0 = 0$ была рассмотрена в работах [4,5]. Далее введем в рассмотрение величину

$$\Gamma = \frac{A_{\beta}}{\varkappa T_B} + \ln \left(\frac{\sqrt{2} R_c}{R} \right)^2, \quad (8)$$

где R_c — радиус, такой что $A_z|_{r=R_c} = 0$. Нетрудно показать, что величина Γ может быть представлена в следующем виде:

$$\Gamma = -2 \int_0^{R_c} \frac{dr}{r} \left(\frac{I_b(r)}{I_b} \right)^2 + \ln \left(\frac{\sqrt{2} R_c}{R} \right)^2, \quad (9)$$

где $I_b(r) = \int_0^r dr' 2\pi r' J_b(r')$ — ток пучка в трубке радиуса r .

Величина Γ является константой для различных видов радиальных профилей плотности тока пучка $J_b(r)$. В частности, для однородного профиля $\Gamma = 0.193$, для гауссова — $\Gamma = 0.116$, для обрезанного при $r = 3R_b$ беннетовского $\Gamma = 0.195$. Таким образом, величина Γ весьма незначительно меняется при эволюции вида радиального профиля плотности тока РЭП. Кроме того, можно показать, что величина $d\Gamma/dt$ характеризует влияние фазового перемешивания траекторий частиц пучка на изменение среднеквадратичного эмиттанса пучка [11].

Обратимся к выводу уравнения, связывающего конечный равновесный удвоенный среднеквадратичный радиус пучка R_f с начальным значением удвоенного среднеквадратичного радиуса R_i , который считается известным. Для этого будем использовать уравнение огибающей пучка для удвоенного среднеквадратичного радиуса R . В рассматриваемом случае имеем [2]

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{4\varkappa T_B}{\gamma m R} + \frac{\Omega_c^2}{4} R = \frac{4(E^2 + P_{\Theta}^2/m^2)}{\gamma^2 R^3}, \quad (10)$$

где

$$P_{\Theta} = m\gamma \left(L + \frac{\Omega_c R^2}{4} \right) \quad (11)$$

— средний канонический угловой момент частиц сегмента пучка,

$$E^2 = \frac{\gamma^2 R^2}{4} \left[\frac{4\varepsilon_{\perp}}{m\gamma} - \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \left(\frac{2L}{R} \right)^2 \right] \quad (12)$$

— среднеквадратичный эмиттанс РЭП.

Кроме того, из (3), (7) и (8) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp f} + \varkappa T_B \left[\Gamma_f + \ln \left(\frac{R_f}{\sqrt{2} R_c} \right)^2 \right] - \varepsilon_{\perp i} \\ - \varkappa T_B \left[\Gamma_i + \ln \left(\frac{R_i}{\sqrt{2} R_c} \right)^2 \right] = t_f \gamma m (\beta c)^3 \sigma_s n_g, \end{aligned} \quad (13)$$

где индекс f относится к конечным значениям параметров, i — начальным значениям.

Поскольку конечное состояние является равновесным, то выполнены условия

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)_f = \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)_f = 0. \quad (14)$$

С помощью (10)–(12) и (14) нетрудно получить условие динамического равновесия на финальной стадии

$$\frac{(\varepsilon_{\perp})_f}{m\gamma} = -\frac{L_f \Omega_c}{2} + \frac{\varkappa T_B}{m\gamma}. \quad (15)$$

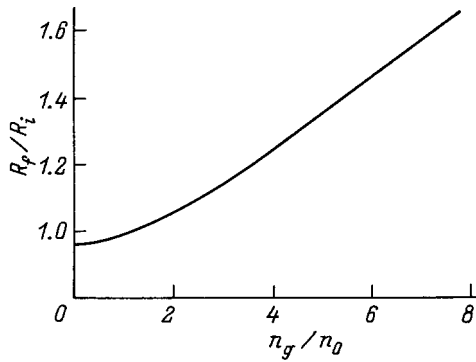


Рис. 1.

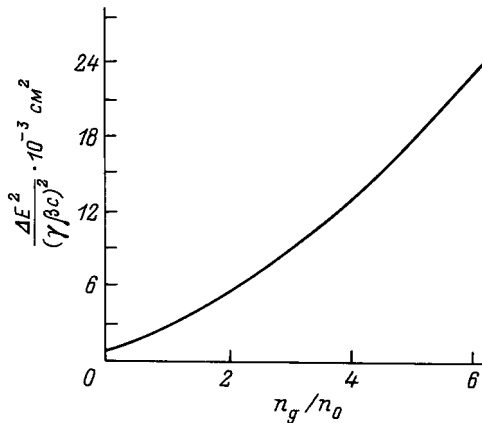


Рис. 2.

Можно показать, что при условии $d\gamma/dt = 0$ P_Ω является интегралом движения сегмента пучка. Тогда имеем

$$L_f = L_i + \frac{\Omega_c}{4} (R_i^2 - R_f^2). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$\frac{(\varepsilon_\perp)_f}{m\gamma} = -\frac{L_i\Omega_c}{2} - \frac{\Omega_c^2}{8} R_i^2 \left(1 + \frac{R_f^2}{R_i^2}\right) + \frac{\varkappa T_B}{m\gamma}. \quad (17)$$

Используя (13) и (17), имеем следующее уравнение:

$$(1 - \Gamma_f - \Gamma_i) + \ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right) - \frac{L_i k_c}{(\beta c)U} - \frac{k_c^2}{4U} R_i^2 \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2\right] = \frac{2\varepsilon_{\perp i}}{m\gamma(\beta c)^2 U} + \frac{2L_r \sigma_s n_g}{U}, \quad (18)$$

где $U = \varkappa I_b / I_A$ — обобщенный первеанс пучка, $I_A = \beta \gamma m c^3 / e$ — предельный ток Альфвена, $k_c = \Omega_c / \beta c$ — волновое число циклотронных колебаний частиц пучка в продольном внешнем магнитном поле с индукцией B_0 .

В ситуации отсутствия процесса рассеяния ($\sigma_s = 0$) и внешнего магнитного поля ($k_c = 0$) для первоначально

холодного пучка ($\varepsilon_{\perp i} = 0$) из (18) следует уравнение, полученное в [4],

$$\ln\left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 = 1 + (\Gamma_f - \Gamma_0). \quad (19)$$

Поскольку параметр Γ слабо меняется при изменении вида радиального профиля плотности тока пучка ($\Gamma_f - \Gamma_0 \ll 1$), то имеем

$$R_i \simeq 1.649 R_f, \quad (20)$$

$$E_f^2 \simeq U R_f^2 = 0.368 U R_0^2. \quad (21)$$

Далее выразим в уравнении (18) значение $\varepsilon_{\perp i}$ через R_i и R_0 , где R_0 — равновесный радиус, соответствующий начальному эмиттансу пучка. Из (11)–(13) при $(dR/dt)_i = 0$ и $L_i = L_0$ получим

$$\frac{2\varepsilon_\perp}{m\gamma(\beta c)^2 U} = \frac{R_0^2}{R_i^2} - \frac{2L_0 k_c}{\beta c U} \frac{R_0^2}{R_i^2}. \quad (22)$$

Тогда, подставляя это выражение в уравнение (18), окончательно получим

$$(1 + \Gamma_f - \Gamma_i) + \ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right) + \frac{k_c^2}{4U} R_i^2 \left[\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 - 1\right] = \frac{R_0^2}{R_i^2} + \frac{L_0 k_c}{\beta c U} \left[1 - 2\left(\frac{R_0}{R_i}\right)^2\right] + \frac{2L_r \sigma_s n_g}{U}. \quad (23)$$

Определим далее изменение среднеквадратичного эмиттанса пучка в процессе транспортировки его до конечного равновесного состояния, а именно

$$\Delta E^2 = E_f^2 - E_i^2, \quad (24)$$

где E_i^2, E_f^2 — соответственно начальное и конечное значения среднеквадратичного эмиттанса сегмента пучка.

В соответствии с (11), (12) и (14) имеем

$$\frac{\Delta E^2}{(\gamma\beta c)^2} = \frac{U}{2} (R_f^2 - R_0^2) + \frac{k_c^2}{16} (R_f^4 - R_0^4) - \left(\frac{L_i}{\beta c} + \frac{k_c R_i^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{L_0}{\beta c} + \frac{k_c R_0^2}{4}\right)^2, \quad (25)$$

где R_0 — равновесный среднеквадратичный радиус пучка, соответствующий начальному эмиттансу E_i .

Используя полученные уравнения (23) и (25), рассмотрим несколько упрощенных ситуаций. Сначала рассмотрим случай $k_c = 0, \sigma_s = 0$ ($B_0 = 0$ и рассеяние отсутствует). Тогда, используя (2), из (23) имеем

$$\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^2 \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{R_i^2}{R_0^2} \left(\frac{R_0^2}{R_i^2} - 1\right)^2, \quad (26)$$

что при условии $|\delta R_0|/R_0 \ll 1$ сводится к выражению

$$\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^2 \simeq 1 + \frac{2(\delta R_0)^2}{R_0^2}. \quad (27)$$

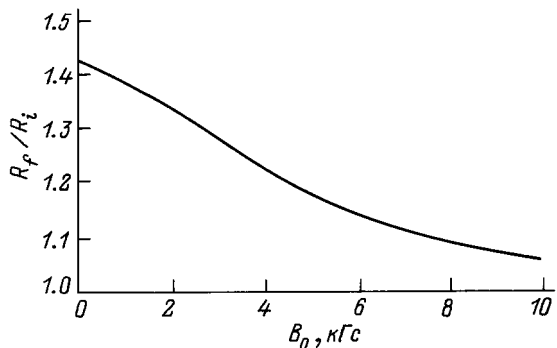


Рис. 3.

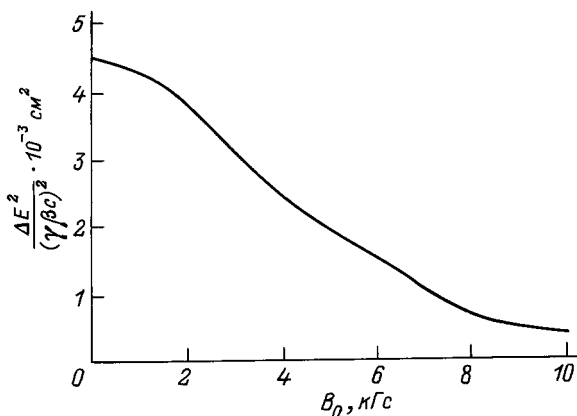


Рис. 4.

В этом случае из (25) легко получить результат работы [5]

$$\Delta E^2 = (\gamma\beta c)^2 U (\delta R_0)^2. \quad (28)$$

В ситуации отсутствия внешнего магнитного поля ($k_c = 0$) и при наличии процесса рассеяния с учетом малости изменения параметра при эволюции радиально-го профиля тока пучка ($|\Gamma_f - \Gamma_0| \ll 1$) имеем

$$\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^2 \simeq \exp(\Psi) \left[1 + 2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)^2\right], \quad (29)$$

где $\Psi = 2L_r \sigma_s n_g / U$.

Прирост среднеквадратичного эмиттанса в этом случае имеет вид

$$\Delta E^2 = (\gamma\beta c)^2 \frac{U}{2} \left[R_0^2 (\exp(\Psi) - 1) + 2 \exp(\Psi) (\delta R_0)^2 \right]. \quad (30)$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 для случая РЭП с энергией электронов $E = 5$ МэВ ($\gamma = 10$), $I_b = 10$ кА, $\varkappa = 0.5$, $R_0 = 1.3$ см, $R_i = 1$ см и $L_r \approx 3L_\beta \approx \sqrt{U}/R_b$ представлены графики зависимости R_f/R_i и $\Delta E^2/(\gamma\beta c)^2$ от концентрации атомов фонового газа n_g ($n_0 = 10^{19}$ см $^{-3}$). Нетрудно видеть, что процесс рассеяния, как и следовало ожидать, может существенно повлиять на значение конечного равновесного радиуса R_f , а также на прирост эмиттанса пучка.

Для случая отсутствия процесса рассеяния ($\sigma_s = 0$), но при наличии внешнего продольного магнитного поля B_0 из (23) и (25) для первоначального невращающегося пучка ($L_i = L_0 = 0$) имеем

$$\ln \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 + \frac{k_c^2}{4U} R_i^2 \left[\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 - 1\right] = \left(\frac{R_0}{R_i}\right)^2 - 1, \quad (31)$$

$$\frac{\Delta E^2}{(\gamma\beta c)^2} \simeq \frac{U}{2} (R_f^2 - R_0^2) + \frac{k_c^2}{16} (R_f^4 - R_0^4). \quad (32)$$

На рис. 3 и 4 для приведенных выше параметров РЭП представлена зависимость R_f/R_i и $\Delta E^2/(\gamma\beta c)^2$ от величины индукции внешнего магнитного поля B_0 . Как видно из рисунков, соответствующие значения индукции могут заметно влиять на величину конечного равновесного радиуса и изменения среднеквадратичного эмиттанса.

Список литературы

- [1] Lee E.P. // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
- [2] Lee E.P., Cooper R.K. // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
- [3] Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 988–991.
- [4] Lee E.P. // Livermore Lab. Rep. 1980. N UCID-18495. P. 15.
- [5] Lee E.P., Yu S.S. // Livermore Lab. Rep. 1979. N UCID-18330. P. 23.
- [6] Lampe M., Joyce C. // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. N 11. P. 3371–3376.
- [7] Колесников Е.К., Мануйлов А.С. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 3. С. 40–44.
- [8] Колесников Е.К., Мануйлов А.С. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 12. С. 43–46.
- [9] Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Абашкина И.В. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 11. С. 136–139.
- [10] Колесников Е.К., Мануйлов А.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 3. С. 46–50.
- [11] Barletta W.A., Lee E.P., Yu S.S. // Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21. N 8. P. 961–972.
- [12] Fernsler R.F., Hubbard R.F., Lampe M. // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. N 7. P. 3278–3293.